Organización
de las Naciones Unidas
para la Educación,
la Ciencia y la Cultura

Aportes para la enseñanza de la Matemática

SERCE
SEGUNDO ESTUDIO REGIONAL COMPARATIVO Y EXPLICATIVO

Organización
de las Naciones Unidas
para la Educación,
la Ciencia y la Cultura

Segundo Estudio
Regional Comparativo
y Explicativo

Aportes para la enseñanza de la Matemática

LLECE
Laboratorio Latinoamericano
de Evaluación de la Calidad
de la Educación

Esta es una publicación de la Oficina Regional de Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe (OREALC/UNESCO Santiago) y del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación · LLECE

Jorge Sequeira
Director
OREALC/UNESCO Santiago

Héctor Valdés
Coordinador del LLECE

Carmen Gloria Acevedo
Sandra Carrillo
Mauricio Castro
Roy Costilla
Silvia Ortiz
Ernesto Treviño
Equipo del LLECE

Marcelo Avilés
Jefe Unidad de Comunicaciones y Publicaciones

María Eugenia Meza
Edición

Alejandro Urbán
Diseño portada

Gerardo Patiño
Diseño interior

Ximena Milosevic
Ana María Baraona
Diagramación

El uso de un lenguaje que no discrimine ni reproduzca esquemas discriminatorios entre hombres y mujeres es una de las preocupaciones de nuestra Organización. Sin embargo, no hay acuerdo entre los lingüistas acerca de la manera de hacerlo en castellano. En tal sentido, y para evitar la sobrecarga gráfica que supondría utilizar en español o/a; los/las y otras formas sensibles al género con el fin de marcar la presencia de ambos sexos, hemos optado por usar la forma masculina en su tradicional acepción genérica, en el entendido que es de utilidad para hacer referencia tanto a hombres y mujeres sin evitar la potencial ambigüedad que se derivaría de la opción de usar cualesquiera de las formas de modo genérico.

ISBN 978-956-322-004-9

Impreso por Salesianos Impresores S.A.

Santiago, Chile; enero, 2009.

Aportes para la enseñanza de la Matemática

Liliana Bronzina
Graciela Chemello
Mónica Agrasar

Índice

AGRADECIMIENTOS

Esta serie fue posible gracias a la gestión del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) de la OREALC/UNESCO Santiago, y a los aportes de muy diversos especialistas comprometidos con el SERCE.

Las autoras agradecen el empuje, la contextualización y la coordinación de la serie a Héctor Valdés; el trabajo sobre las bases de datos a Mauricio Castro; los procesamientos de datos y la orientación para plasmarlos de modo adecuado a Daniel Bogoya, Carlos Pardo y Andrés Burga León; la lectura crítica de las especialistas Teresa León y Silvia Puig; el acompañamiento y aportes a Giuliana Espinosa y Lilia Toranzos; y la fuente de inspiración respecto a la forma en que las evaluaciones masivas pueden usarse en las escuelas, a Pedro Ravela.

Presentación

El Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE), cuyo Primer Reporte fue publicado a mediados de 2008, ha aportado importantes informaciones que constituyen insumos sustantivos para la toma de decisiones en materia de políticas sociales y educativas en los países de América Latina y el Caribe. El desafío que queda por delante es realizar estudios más específicos, que permitan contar con información precisa sobre cómo optimizar el aprendizaje de los estudiantes, especialmente de aquellos que, por diferentes causas, están en desventaja social.

PARTICIPANTES:
Argentina
Brasil
Chile
Colombia
Costa Rica
Cuba
Ecuador
El Salvador
Guatemala
México
Nicaragua
Panamá
Paraguay
Perú
República Dominicana
Uruguay
Estado de Nuevo León (México)[1]

El presente texto es el segundo de la colección Aportes para la Enseñanza, estando los anteriores dedicados a Lectura y Ciencias Naturales. El objetivo de la serie es proporcionar a los docentes orientaciones que los ayuden a mejorar sus prácticas pedagógicas en las áreas exploradas por el SERCE, para lograr que los estudiantes construyan los aprendizajes necesarios para participar plenamente en la sociedad. Esta colección es coherente con una concepción de evaluación de la calidad de la educación que no se limita a hacer diagnósticos de situación, sino que proporciona, además, elementos para favorecer las prácticas educativas y avanzar hacia una educación de calidad sin exclusiones.

La colección Aportes para la Enseñanza constituye sin lugar a dudas el valor agregado más importante del SERCE respecto de otras evaluaciones internacionales. Esfuerzos como los que este tipo de estudios supone no pueden quedar reducidos al ámbito del mundo académico, o de quienes toman decisiones de política educativa: es imprescindible que lleguen a las escuelas, porque son los docentes los verdaderos autores de los cambios educativos.

1 *Nuevo León, fue el único de una serie de estados subnacionales –que desde 2004 se han integrado al LLECE– que siguió todos los procesos y requisitos para participar en esta evaluación. La idea del SERCE fue acoger a determinados estados que, disponiendo de cierta autonomía en educación, gracias a la organización política de sus países, quisieron someterse a evaluaciones internacionales referidas a la calidad de su educación. Con el tiempo sólo quedó Nuevo León, que participó de la experiencia como un país más.*

Aportes para la Enseñanza de la Matemática comienza con una presentación general del estudio SERCE y de las pruebas de esta área; para luego dar a conocer los resultados de los estudiantes por dominio curricular y por proceso cognitivo.

Otro apartado pone el acento en algunos aspectos de la enseñanza actual de la matemática y, por último, describe los desempeños de los estudiantes, analizando aciertos y errores e incluyendo elementos para su análisis y propuestas de intervención docente.

Jorge Sequeira
Director
OREALC/UNESCO Santiago

Prólogo

"La matemática tiene las progresiones geométricas que elevan los números a maravillosa altura, las sociedades tienen la educación".

José Martí

Las pruebas de Matemática utilizadas por el SERCE presentan una progresión de niveles de desempeño definida a partir del análisis de la combinación adecuada entre procesos cognitivos y contenidos curriculares, según niveles crecientes de dificultad. De esta manera, el Nivel IV agrupa las preguntas de mayor demanda cognitiva.

En el caso de esta área curricular, en dicho nivel superior de desempeño en el SERCE se ubica, aproximadamente, el 11% de los estudiantes tanto de tercer como de sexto grado de básica. Es decir, sólo ese porcentaje de estudiantes de ambos grados puede responder correctamente la mayoría de las preguntas de mayor demanda cognitiva de las pruebas de Matemática. Ello acusa un significativo déficit de calidad de la educación en este campo que se está ofreciendo a los estudiantes de primaria de América Latina y el Caribe.

Basta con ese dato para que la conciencia de nuestro profesorado se movilice y promueva la búsqueda de las causas de tales deficiencias. Ese es el propósito esencial del texto Aportes para la Enseñanza de la Matemática: movilizar la conciencia del magisterio de nuestra región, con la finalidad de estudiar y encontrar qué factores están influyendo en que el aprendizaje de esta importante área curricular no esté dando los frutos esperados.

Cuando se habla de calidad de la educación matemática de nuestros estudiantes, la palabra de orden es "comprender" cuáles son las herramientas necesarias para resolver ciertos problemas y distinguirlos de otros, en cuya solución se emplean otras herramientas. Comprender también que pueden variar los procedimientos y, sin embargo, ser válidos; que los problemas pueden presentar datos de más, o de menos; que pueden tener una, ninguna o varias soluciones posibles; que cada uno tiene la posibilidad de buscar, crear y validar su propio procedimiento. Comprender, en definitiva, que no todo "está hecho".

¿Quién podría decir que es una tarea fácil? Nadie, pues es exactamente todo lo contrario: se trata de una tarea que se enfrenta a muchas y variadas complejidades. Entre otras, a la complejidad proveniente de la multiplicidad (lo que da origen al número, a la aritmética); la complejidad que procede del espacio (lo que da lugar a la geometría); la que proviene del símbolo (álgebra); la que está determinada por el cambio y la causalidad determinística (cálculo), la que proviene de la incertidumbre en la causalidad múltiple incontrolable (probabilidad, estadística), y la complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática).

Pero tampoco es una tarea imposible de realizar. Sostengo que es posible elevar a planos muy superiores la calidad de la educación matemática que reciben los estudiantes de nuestra región. Para ello será necesario que los docentes busquen y logren un continuo apoyo en la intuición directa de lo concreto; un apoyo permanente en lo real; que centren la educación matemática en el desarrollo de los procesos de pensamiento matemático; que tengan muy en cuenta los impactos de la nueva tecnología en la enseñanza de esta área. Que reconozcan permanentemente la importancia de la motivación de sus estudiantes por aprender esta ciencia, pues una gran parte de los fracasos en esta disciplina científica tienen su origen en un posicionamiento inicial afectivo totalmente destructivo de sus propias potencialidades en este campo.

Al mismo tiempo, es muy útil reconocer la importancia de la historia de la matemática para elevar la motivación de los estudiantes a conocerla con profundidad. La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente, en muchas ocasiones con genuina pasión, por seres humanos de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando dieron con ellas por primera vez.

Estamos seguros de que este texto ayudará al magisterio latinoamericano y caribeño a comprender de qué manera podemos lograr que el estudiante manipule adecuadamente los objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad y reflexione sobre su propio proceso de pensamiento para mejorarlo conscientemente. Todo lo anterior, con el fin de que los alumnos adquieran confianza en sí mismos y se diviertan con su propia actividad mental.

Estos son los objetivos de una educación matemática de alta calidad que, efectivamente, eleve el saber de nuestras sociedades a maravillosa altura, así como lo hacen las progresiones geométrica a los números.

Dr. C. Héctor Valdés Veloz
Coordinador del LLECE
OREALC / UNESCO Santiago

Antecedentes

LLECE Y SERCE

El Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) es la red de sistemas de evaluación de la calidad de la educación de América Latina, coordinado por la Oficina Regional de Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe (OREALC/UNESCO Santiago), con sede en Santiago de Chile.

Sus funciones están centradas en:

- Producir información sobre logros de aprendizajes de los alumnos y analizar los factores asociados a dichos avances.
- Apoyar y asesorar a las unidades de medición y evaluación de los países.
- Ser foro de reflexión, debate e intercambio de nuevos enfoques en evaluación educativa.

Conforme a sus objetivos, el Laboratorio desarrolló entre 2002 y 2006 el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE), que evalúa y compara el desempeño alcanzado por los estudiantes latinoamericanos de tercero y sexto grados de educación primaria en las áreas de lenguaje, matemática y ciencias de la naturaleza.

En 1997, el LLECE había realizado el primero de dichos estudios sobre lenguaje, matemática y factores asociados en tercero y cuarto grado. Este permitió obtener, por primera vez, información comparativa sobre los logros de aprendizaje de los alumnos de los 13 países de América Latina y el Caribe que participaron.

El SERCE busca explicar sus resultados, a partir de distintos factores escolares y de contexto. Pretende así generar conocimiento relevante para la toma de decisiones de políticas educativas y para mejorar las prácticas docentes y escolares y, con esto, promover una mayor equidad en los aprendizajes.

En su diseño, implementación y análisis participaron diversos equipos de evaluadores, pedagogos, especialistas en currículo, expertos en construcción de instrumentos de evaluación, técnicos y monitores de la región.

Su amplia cobertura, que recoge información sobre los estudiantes y sus familias; los docentes, los directores y las escuelas permite identificar cuáles son los factores que tienen mayor incidencia en los desempeños de los estudiantes. El cumplimiento de altas exigencias teóricas y de método, confieren al SERCE capacidad de generalización: lo que el estudio informa sobre los estudiantes evaluados puede extenderse al resto de los estudiantes de la región y del país.

La información recogida esta vez por el SERCE abarca casi 200 mil estudiantes, 9 mil aulas y más de 3 mil escuelas. El estudio analiza los resultados de estos alumnos en forma contextualizada, considerando sus realidades, familias, lugares donde viven y escuelas a las que asisten.

Por todas estas características, es la evaluación de desempeños de estudiantes más importante y ambiciosa de las desarrolladas en América Latina y el Caribe.

El estudio, comenzó en 2002, recogió la información en 2006, y publicó sus primeros resultados en 2008, con el Primer Reporte SERCE.

LAS PRUEBAS SERCE DE MATEMÁTICA

Para la evaluación de los aprendizajes de Matemática, fueron construidas pruebas alineadas con un marco curricular común a los países latinoamericanos participantes del estudio.

El Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES) estuvo encargado de analizar currículos, textos escolares e instrumentos de evaluación de los países participantes. Es así como el conjunto de referentes básicos para el estudio SERCE fue efectuado de manera consensuada.

A fin de establecer dominios de contenidos y procesos cognitivos comunes a los estudiantes de educación primaria de todos los países participantes, fue identificado qué se enseña en esta área en la región. Este marco, consensuado y validado por el conjunto de países, fue estructurado desde el enfoque de habilidades para la vida, cuyo foco en matemática está en la resolución de problemas.

Este enfoque asume que la alfabetización matemática es un proceso permanente a lo largo de la existencia, que incluye aquellos conocimientos, destrezas, capacidades, habilidades, principios, valores y actitudes necesarios de incluir en el currículo escolar del área para que los estudiantes latinoamericanos aprendan a desarrollar su potencial, hagan frente a situaciones, tomen decisiones utilizando la información disponible, resuelvan problemas, defiendan y argumenten sus puntos de vista, entre tantos otros aspectos centrales que los habilitan para la inserción en la sociedad como ciudadanos plenos, críticos y responsables.

El LLECE invitó a los países a elaborar y enviar preguntas para integrar la prueba. Equipos del LLECE seleccionaron este material y elaboraron pruebas que mandaron a todos los países para que estos hicieran observaciones en cuanto a formulación, pertinencia con el currículum real, contenido y proceso cognitivo. Cada país, además, hizo sus adaptaciones lingüísticas para que alguna palabra no fuera un obstáculo para los niños en la comprensión de la pregunta[2].

2 Por ejemplo, en un ítem para algunos países decía 'la cometa', mientras que otros usaron las palabras 'volantín', 'barrilete', 'piscucha' o 'papalote'.

Con los ítems, o preguntas, fue construida una prueba piloto, aplicada en 2005. Luego de un procesamiento específico –de tipo estadístico y pedagógico– para determinar la calidad de los ítems, el LLECE elaboró la prueba definitiva para tercero y sexto grados.

La prueba del SERCE que evalúa los desempeños responde a una estructura de instrumento de aplicación masiva.
Aporta una información diferente y complementaria de la que el docente obtiene en el aula. En ella interesa el desempeño de los estudiantes de la región –y no el de estudiantes en particular– para obtener información sobre la misma y los países que la conforman.

Básicamente, las preguntas son del tipo 'opción múltiple', con cuatro alternativas de respuesta de las cuales una sola es correcta. Sin embargo, para evaluar ciertos procedimientos matemáticos fueron empleadas preguntas de respuesta abierta, en las que el estudiante debe exponer las estrategias utilizadas para responder.

Estructurado en seis (6) cuadernillos, el instrumento definido para evaluar el área de matemática en tercer grado contuvo 72 preguntas, de las cuales 66 eran cerradas de opción múltiple y seis (6) de respuesta abierta. Cada estudiante le correspondió responder un único cuadernillo, asignado en forma aleatoria, con 24 preguntas en total.

Por su parte, el instrumento dirigido a evaluar el área de matemática en sexto grado, también estructurado en seis (6) cuadernillos, fue diseñado con 87 preguntas cerradas de opción múltiple y 9 de respuesta abierta, haciendo un total de 96 preguntas. Cada estudiante respondió un único cuadernillo, asignado en forma aleatoria, con 32 preguntas en total.

MARCO CONCEPTUAL DE LA PRUEBA DE MATEMÁTICA

El marco conceptual de la evaluación de desempeños del SERCE está formado por dos ejes conceptuales:

- *El marco curricular de los países de América Latina.* Su análisis supuso un esfuerzo de sistematización sobre qué se enseña en la región, para llegar a establecer dominios de contenidos y procesos cognitivos comunes a los estudiantes de enseñanza primaria de todos los países participantes.

- *El enfoque de habilidades para la vida.* Es decir, aquello que los estudiantes de enseñanza primaria deberían aprender y desarrollar para insertarse y desenvolverse en la sociedad.

Tomando en cuenta lo anterior, una educación matemática de calidad debe proporcionar a los estudiantes las herramientas que les permitan actuar en una variedad de situaciones de la vida diaria. Hoy, el foco de la enseñanza está puesto en la motivación y gestión del conocimiento y en que el estudiante desarrolle la capacidad de utilizar conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos para interpretar y

Una educación de calidad es aquella que permite a todas las personas ser miembros activos de la sociedad. Por ello, debe abarcar ciertos conocimientos de base, valores, comportamientos y habilidades que se correspondan con las necesidades de la vida actual.

comprender el mundo real. Es decir, ha dejado de estar centrada en el aprendizaje de algoritmos y procedimientos de cálculo, o en el uso de la resolución de problemas sólo como elemento de control de lo aprendido.

En la actualidad, el énfasis está puesto en que los estudiantes tengan la posibilidad de interpretar datos, establecer relaciones, poner en juego conceptos matemáticos, analizar regularidades, establecer patrones de cambio, planificar estrategias de solución, ensayar procedimientos y aceptarlos o descartarlos, registrar procedimientos utilizados, analizar la razonabilidad de resultados, argumentar y defender posiciones propias.

Cabe destacar que la resolución de problemas propicia el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que exige poner en juego diferentes tipos de razonamiento.

Se presta, además, al desarrollo de habilidades para reconocer y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos con diferentes y crecientes grados de dificultad.

Las habilidades matemáticas deberían tener sentido también fuera de un contexto exclusivamente escolar, ya que las habilidades de interpretar, identificar, calcular, recodificar, graficar, comparar, resolver, optimizar, demostrar, aproximar, comunicar, entre otras, proporcionan al estudiante la preparación para desenvolverse con éxito en la vida social y para afrontar los retos del futuro en un mundo de cambio permanente.

Atendiendo a este enfoque, la prueba de matemática del SERCE evaluó no sólo los saberes aprendidos por los estudiantes de tercero y sexto grado de enseñanza primaria, sino el uso que pueden hacer de los mismos para comprender e interpretar el mundo, en una variedad de situaciones y contextos de la vida de todos los días. Asimismo tienden a monitorear el desarrollo de las capacidades necesarias para un protagonismo social activo.

QUÉ EVALUÓ EL SERCE EN EL ÁREA MATEMÁTICA

Para evaluar qué saben los estudiantes latinoamericanos en matemática fueron utilizadas dos dimensiones: los dominios de contenidos y los procesos cognitivos.

Para matemática fueron establecidos cinco grandes dominios de contenidos:
***Numérico*: números y operaciones**
***Geométrico*: espacio y forma**
***De la medición*: tamaño y medida**
***Estadístico*: del tratamiento de la información**
***Variacional*: estudio del cambio.**

Dominios de contenidos

El dominio de contenidos se refiere al campo semántico relacionado con los saberes específicos de la matemática para tercer y sexto grado; es decir, al conjunto de conceptos, propiedades, procedimientos y relaciones entre ellos, así como a los sistemas de representación, formas de razonamiento y de comunicación, a las estrategias de estimación, aproximación, cálculo y a las situaciones problemáticas asociadas.

CUADRO 1 **DESCRIPCIÓN DE LOS DOMINIOS DE LA PRUEBA DE MATEMÁTICA**

DOMINIOS	DESCRIPCIÓN
Numérico	Abarca la comprensión del concepto de número y de la estructura del sistema de numeración; del significado de las operaciones en contextos diversos, sus propiedades y efecto; así como de las relaciones entre ellas y el uso de los números y de las operaciones en la resolución de problemas diversos.
Geométrico	Comprende los atributos y propiedades de figuras y objetos bidimensionales y tridimensionales; las nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad; los diseños y las construcciones con cuerpos y figuras geométricas; la construcción y manipulación de representaciones de objetos del espacio; el reconocimiento de ángulos y polígonos y su clasificación.
De la medida	Implica la aprehensión de los conceptos de cada magnitud; de los procesos de conservación, las unidades de medida, la estimación de magnitudes y de rangos; la selección y el uso de unidades de medida y patrones, de sistemas monetarios y del sistema métrico decimal.
Estadístico o del tratamiento de la información	Está vinculado con la recolección, organización e interpretación de datos; la identificación y el uso de medidas de tendencia central (promedio, media y moda); y el empleo de diversas representaciones de datos, para la resolución de problemas.
Variacional (del cambio)	Referido al reconocimiento de regularidades y patrones; a la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; a la noción de función y a la proporcionalidad (caso de la variación lineal) en contextos aritméticos y geométricos.

CUADRO 2 **DESCRIPCIÓN DE LOS DOMINIOS POR GRADO DE LA PRUEBA DE MATEMÁTICA**

DOMINIOS	TERCER GRADO EDUCACIÓN PRIMARIA	SEXTO GRADO EDUCACIÓN PRIMARIA
Numérico	Números naturales: uso, funciones, orden, significado de las operaciones, propiedades, cálculo exacto, estimación. Sistema de numeración decimal. Números pares e impares. Resolución de problemas que involucran adición, sustracción y significado inicial de multiplicación y división. Significado inicial de la fracción como parte de un todo.	Números naturales: uso y orden. Sistema de numeración decimal, valor posicional y relativo. Potenciación y radicación. Criterios de divisibilidad. Fracciones, relación parte-todo, equivalencia, fracciones decimales. Representación en la recta.
Geométrico	Localización en el espacio. Transformaciones. Puntos de referencia. Formas geométricas (clasificación). Cuadrados y cubos.	Figuras planas. Polígonos. Sistemas de referencia. Ejes de simetría. Perpendicularidad. Paralelismo. Angulos y su clasificación. Cubo, prisma y cilindro. Transformaciones en el plano. Razones y proporciones. Proporcionalidad directa.
De la medida	Uso de instrumentos de medida. Magnitudes lineales, longitud y peso. Sistemas monetarios. Elección y comparación de unidades. Estimación de medidas. Medidas convencionales y no convencionales.	Sistemas de unidades: longitud, peso (masa), perímetro, área, volumen, ángulos, tiempo. Cambio de moneda.
Estadístico o del tratamiento de la información	Recolección y organización de la información. Creación de registros personales. Técnicas de observación. Pictograma. Diagrama de barras.	Representación gráfica. Promedio. Valor más frecuente. Diagramas. Tabulación. Recopilación de datos.
Variacional (del cambio)	Secuencias y patrones.	Patrones de formación. Proporcionalidad directa asociada a situaciones aritméticas y geométricas.

Tres niveles de procesos cognitivos fueron implicados en la evaluación SERCE:
-Reconocimiento de objetos y elementos.
-Solución de problemas simples.
-Solución de problemas complejos.

Procesos cognitivos

Los procesos cognitivos son las operaciones mentales que el sujeto utiliza para establecer relaciones con y entre los objetos, situaciones y fenómenos. Aquellos implicados en la evaluación del SERCE fueron agrupados en los siguientes tres niveles:

- Reconocimiento de objetos y elementos: implica la identificación de hechos, conceptos, relaciones y propiedades matemáticas, expresados de manera directa y explícita en el enunciado.
- Solución de problemas simples: exige el uso de información matemática que está explícita en el enunciado, referida a una sola variable; y el establecimiento de relaciones directas necesarias para llegar a la solución.
- Solución de problemas complejos: requiere la reorganización de la información matemática presentada en el enunciado y la estructuración de una propuesta de solución, a partir de relaciones no explícitas, en las que está involucrada más de una variable.

CUADRO 3 **DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS**

PROCESOS	DESCRIPCIÓN
Reconocimiento de objetos y elementos	Identificar objetos y elementos. Interpretar representaciones matemáticas. Identificar relaciones y propiedades.
Solución de problemas simples	Resolver un problema simple involucra: Interpretar la información explícita que se brinda. Representar la situación. Establecer relaciones directas entre los datos. Planificar una estrategia de solución. Registrar el proceso de resolución utilizado. Analizar la razonabilidad del resultado.
Solución de problemas complejos	Resolver un problema complejo involucra: Interpretar la información que se brinda. Reorganizar la información presentada en el enunciado. Seleccionar la información necesaria para resolver el problema. Representar la situación. Establecer relaciones explícitas y no explícitas entre los datos. Planificar una estrategia de solución. Registrar el proceso de resolución utilizado. Analizar la razonabilidad de los resultados.

Es posible considerar los 'procesos cognitivos' atendiendo solamente al carácter generalizado de los procedimientos asociados, o a su proceso de constitución, en estrecha relación con los 'dominios de contenidos' a los que se refieren. Al analizar los resultados de las pruebas, estas dimensiones deben ser consideradas de forma articulada.

Resultados de las pruebas de matemática

En este libro, el SERCE presenta los resultados de aprendizaje de dos maneras. En primer lugar aparecen los resultados por puntuaciones promedio para la región y por país.

La publicación también muestra los resultados agrupados en cuatro niveles de desempeño, los que describen aquello que los estudiantes saben y son capaces de hacer en cada grado evaluado. A continuación, aparecen los resultados por puntuación promedio, para luego pasar a los expresados en porcentajes de respuestas correctas para cada dominio de contenido. Y, el capítulo 4 muestra los resultados por niveles de desempeño.

Estas puntuaciones dan una media de 500 puntos, con una desviación estándar de 100 centrada en el promedio de los países analizados. Esta escala es arbitraria y no tiene significado alguno entre aprobación y no aprobación.

RESULTADOS GENERALES POR PUNTUACIONES MEDIAS

Los resultados que presentan los siguientes cuadros están calculados con una puntuación media de 500 puntos y una desviación estándar de 100.

CUADRO 4 **PROMEDIO DE LAS PUNTUACIONES EN MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES DE TERCERO Y SEXTO BÁSICO EN CADA PAÍS**

PAÍS	PUNTAJE PROMEDIO	
	Tercero básico	Sexto básico
Argentina	505,36	513,03
Brasil	505,03	499,42
Chile	529,46	517,31
Colombia	499,35	492,71
Costa Rica	538,32	549,33
Cuba	647,93	637,47
Ecuador	473,07	459,50
El Salvador	482,75	471,94
Guatemala	457,10	455,81
México	532,10	541,61
Nicaragua	472,78	457,93
Panamá	463,04	451,60
Paraguay	485,60	468,31
Perú	473,94	489,98
R. Dominicana	395,65	415,64
Uruguay	538,53	578,42
Estado de Nuevo León	562,80	553,95
Promedio países	500,00	500,00
Total América Latina y Caribe	505,11	506,70

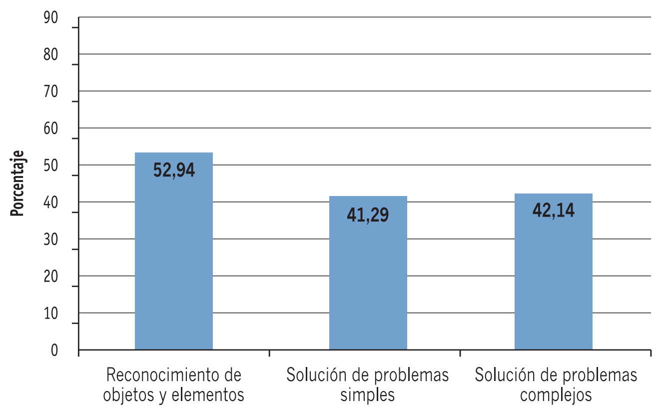
Fuente: SERCE, 2007

RESULTADOS POR DOMINIOS DE CONTENIDOS Y PROCESOS COGNITIVOS

Resultados de la región en matemática para tercer grado básico
El Gráfico 1, a continuación, muestra el porcentaje de estudiantes de la región que respondió correctamente los ítems de cada proceso cognitivo en la prueba SERCE de tercer grado de educación básica o primaria.

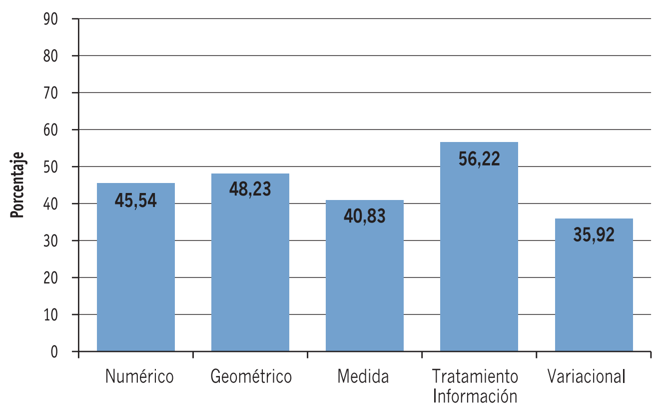
El siguiente, por su parte, presenta el porcentaje de estudiantes que respondió correctamente por dominio de contenidos evaluado. Los resultados corresponden a la prueba aplicada y para su interpretación es necesario tener en cuenta las limitaciones de la misma por el hecho de ser una evaluación externa de gran escala.

GRÁFICO 1 **ESTUDIANTES QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE PARA CADA PROCESO COGNITIVO DE MATEMÁTICA TERCER GRADO DE PRIMARIA (%)**



Fuente: SERCE, 2007

GRÁFICO 2 **ESTUDIANTES QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE PARA CADA DOMINIO DE CONTENIDOS DE MATEMÁTICA TERCER GRADO DE PRIMARIA (%)**



Fuente: SERCE, 2007

En una lectura directa es posible observar que el dominio estadístico –o tratamiento de la información– es el que obtuvo el mayor porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente. Sin embargo, esta lectura se relativiza al mirar al interior de la prueba, ya que se trata de preguntas que involucran la interpretación directa de la información a partir de diferentes representaciones (gráficos de barras, tablas o cuadros) y todas presentaban apoyo gráfico. Por ejemplo, varios ítems requerían la lectura de un gráfico de barras para interpretar cuál es el valor al que corresponde la mayor frecuencia[3].

Si comparamos los valores obtenidos para geometría, no sería correcto asegurar que los niños de tercer año básico tienen más conocimientos geométricos que numéricos. Las preguntas del dominio geométrico común a la región para tercer grado requieren de reconocimiento de objetos y elementos, con diferentes propuestas; pero con una reiteración de temas dentro del dominio geométrico. Con presentaciones muy habituales en las escuelas, en todos los casos las preguntas requieren el reconocimiento de figuras geométricas y cuerpos usuales, la identificación de elementos de las mismas, el reconocimiento y uso de la congruencia de los lados de alguna figura básica.

Cabe destacar que si bien se busca que la evaluación responda a todos los ejes de contenidos, la enseñanza de la geometría ha perdido significatividad en muchas escuelas y no es habitual que los docentes desarrollen propuestas que resulten verdaderos desafíos para los niños.

Sintetizando, son preguntas –todas con apoyo gráfico– que evalúan habilidades y conocimientos geométricos básicos y escolarizados. Por tratarse de una evaluación a gran escala, no hay ítems abiertos, que requieran la construcción de alguna figura o el análisis de alguna afirmación sobre las propiedades de una figura, lo que permitiría caracterizar mejor cuáles son los conocimientos geométricos de los niños, más allá del reconocimiento de algunos nombres y características.

En tercer grado, hubo un 45,54% de respuestas correctas para el dominio numérico. Este contenido abarca un amplio abanico de temas y permite, más que otros, el uso de preguntas formuladas para poner en práctica los procesos cognitivos seleccionados por el estudio SERCE, dando un mayor peso a los procesos de resolución de problemas.

El SERCE evaluó el sistema de numeración, los números naturales, las cuatro operaciones básicas, la resolución de problemas que involucran las operaciones atendiendo a sus diferentes sentidos, con diferentes presentaciones y en una variedad de contextos.

Como este dominio de contenidos es el más enseñado en las escuelas de la región, podrían esperarse mejores resultados; es necesario analizar los resultados de manera minuciosa, para advertir algunas posibles causas. Cabría preguntarse cuál es la relación entre el 45,54% de respuestas correctas con las estrategias de enseñanza utilizadas.

3 *Como ejemplo del tipo de ítems, ver “Libros vendidos por mes” en páginas 42 y 106.*

En cuanto al dominio de la medida, la prueba contempló 15 ítems de los cuales sólo unos pocos tuvieron valores inferiores a la media, siendo el resto de dificultad media a difícil. Los conocimientos y habilidades evaluadas son comunes a la región y fueron chequeados mediante preguntas de reconocimiento de las unidades de medidas de longitud más usuales para medir un atributo de un objeto, o de reconocimiento del instrumento para medir un atributo. Algunas involucraron equivalencias usuales de medidas de longitud o tiempo y otras, además, requirieron una operación sencilla. Éstas son las que resultaron más difíciles y, en este sentido, tal vez la dificultad pudiera ser atribuida a la necesidad de coordinar distintas informaciones, más que a los conocimientos específicos de medida.

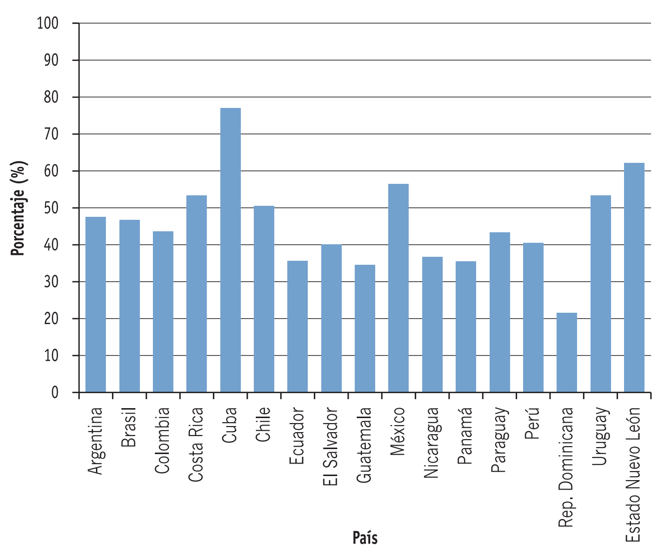
La inclusión de los ítems del dominio variacional busca poner en evidencia la necesidad de abordar el análisis de relaciones de distinto tipo. Aunque los documentos que orientan la enseñanza en los países de la región proponen el descubrimiento de regularidades y patrones, su explicitación y la comparación de variaciones de distinto tipo, estos temas parecen no ser abordados con la suficiente frecuencia por los docentes, aunque éste sería un tema a investigar.

Por último, el dominio variacional para tercer grado, presentó preguntas con secuencias numéricas o gráficas que involucraban identificación de patrones. No resultaron fáciles: los estudiantes que pudieron resolver estos ítems se ubican recién a partir del Nivel III de desempeño.

Resultados por país en matemática para tercer grado

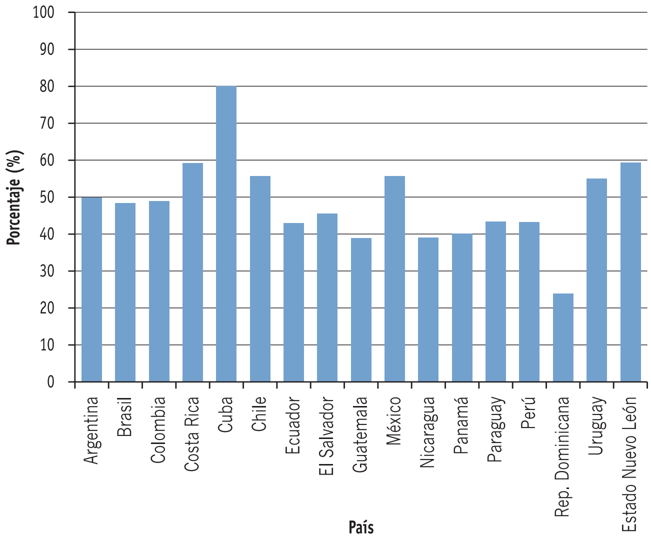
Los gráficos que siguen muestran, por dominio de contenidos, los porcentajes de estudiantes de tercer grado de primaria, de cada país de la región (más los de un estado de una nación), que respondieron correctamente.

GRÁFICO 3 **PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS CORRECTAS PARA MATEMÁTICA DE TERCER GRADO, EN EL DOMINIO NUMÉRICO Y POR PAÍS**



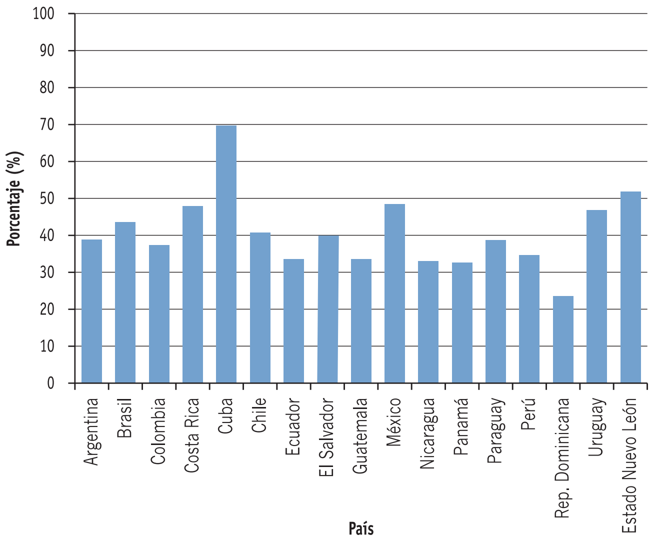
Fuente: SERCE, 2007

GRÁFICO 4 **PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS CORRECTAS PARA MATEMÁTICA DE TERCER GRADO, EN EL DOMINIO GEOMÉTRICO Y POR PAÍS**



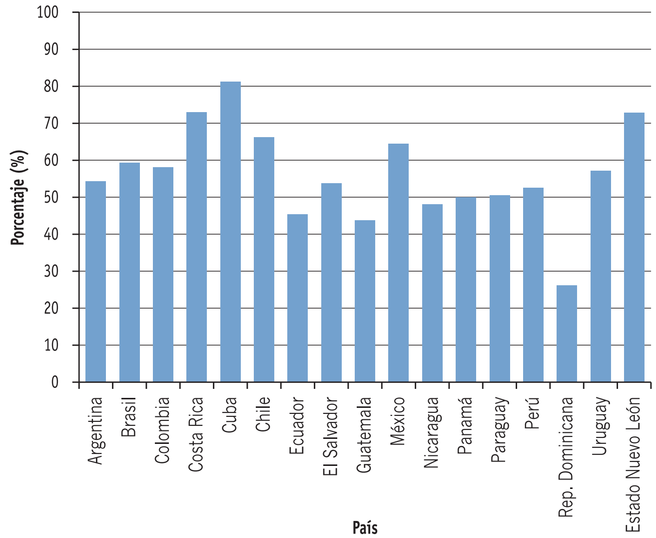
Fuente: SERCE, 2007

GRÁFICO 5 **PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS CORRECTAS PARA MATEMÁTICA DE TERCER GRADO, EN EL DOMINIO DE LA MEDIDA Y POR PAÍS**



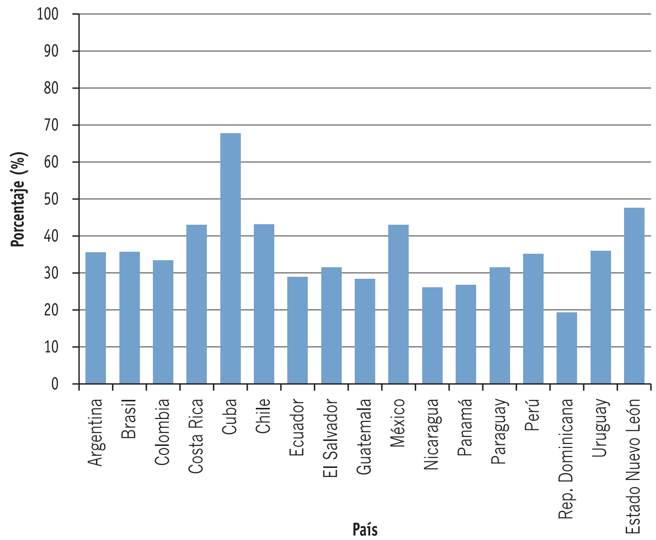
Fuente: SERCE, 2007

GRÁFICO 6 **PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS CORRECTAS PARA MATEMÁTICA DE TERCER GRADO, EN EL DOMINIO DE ESTADÍSTICA Y POR PAÍS**



Fuente: SERCE, 2007

GRÁFICO 7 **PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS CORRECTAS PARA MATEMÁTICA DE TERCER GRADO, EN EL DOMINIO VARIACIONAL Y POR PAÍS**



Fuente: SERCE, 2007

Los porcentajes de estudiantes que respondieron correctamente, por procesos cognitivos de matemática de tercer grado, aparecen en el siguiente cuadro.

CUADRO 5 **PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS CORRECTAS PARA MATEMÁTICA DE TERCER GRADO, POR PROCESO COGNITIVO Y POR PAÍS**

PAÍS	RECONOCIMIENTO DE OBJETOS Y ELEMENTOS	SOLUCIÓN DE PROBLEMAS SIMPLES	SOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMPLEJOS
Argentina	54,.24	41,.89	40,.14
Brasil	53,56	44,62	38,55
Colombia	52,94	39,14	39,39
Costa Rica	64,36	49,37	50,84
Cuba	80,29	70,02	83,12
Chile	60,81	45,80	44,23
Ecuador	44,48	32,72	34,01
El Salvador	51.65	36.92	36,75
Guatemala	43,36	31,32	32,91
México	60,01	49,91	54,98
Nicaragua	43,76	32,80	32,70
Panamá	44,73	31,85	33,68
Paraguay	47,98	38,74	39,04
Perú	50,11	36,38	33,80
República Dominicana	27,29	21,11	18,95
Uruguay	56,16	47,73	49,14
Estado Nuevo León	65,57	54,92	57,95
Región	52,94	41,29	42,14

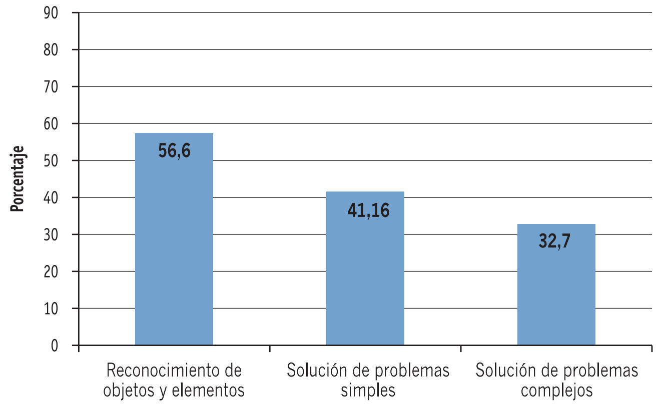
Fuente: SERCE, 2007

Una primera mirada sobre la última fila del cuadro podría dar lugar a considerar que los resultados son poco satisfactorios, si se atiende a su relación con una expectativa del 100%. Sin embargo, resulta difícil sostener esa apreciación sin considerar la complejidad y diversidad de condiciones y proyectos de enseñanza en la región.

Resultados de la región en matemática para sexto grado básico

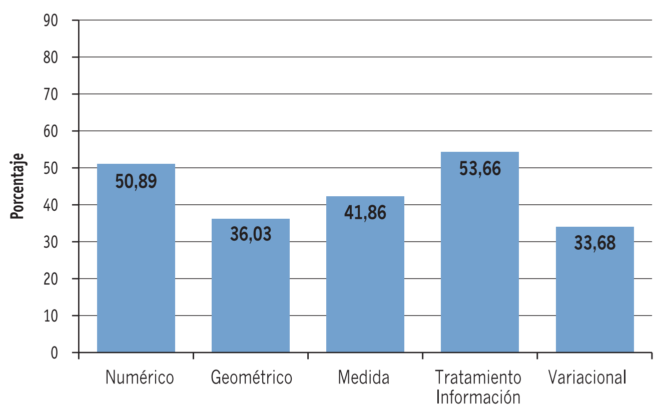
A continuación, el Gráfico 8 muestra el porcentaje de estudiantes de la región que respondió correctamente los ítems de cada proceso cognitivo en la prueba SERCE de sexto grado de primaria; mientras que el Gráfico 9 presenta el porcentaje de estudiantes que respondió correctamente por dominio de contenidos evaluado en el mismo instrumento.

GRÁFICO 8 **PORCENTAJE DE ESTUDIANTES QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE A CADA PROCESO COGNITIVO DE MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA DE LA REGIÓN**



Fuente: SERCE, 2007

GRÁFICO 9 **PORCENTAJE DE ESTUDIANTES QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE A CADA DOMINIO DE CONTENIDOS DE MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA DE LA REGIÓN**



Fuente: SERCE, 2007

Es posible ver que el mayor porcentaje de estudiantes que respondió correctamente lo hizo en el dominio de estadística o del tratamiento de la información (53,66%); pero este resultado tiene relación con los ítems utilizados: todas las preguntas que evalúan estadística tienen apoyo gráfico y la mitad requiere el reconocimiento de información directa de gráficos de barras, circulares, pictogramas, cuadros de doble entrada o la identificación de una misma información representada de dos formas diferentes.

La otra mitad de las preguntas de este dominio precisa que los estudiantes extraigan información de los gráficos o cuadros y operen con ella, la relacionen con porcentajes, calculen un promedio, etc. Es decir, tal como ocurre con otros dominios de contenidos, las dificultades aparecen cuando tienen que combinar la información con otros conocimientos y efectuar otras acciones.

Muy próximo al anterior, está el dominio numérico que es respondido correctamente por el 50,89% de los estudiantes. Más de las dos terceras partes de las preguntas que evalúan este dominio son problemas simples y complejos y que, como todo problema, llevan consigo el desafío de recurrir a los conocimientos y a desplegar una actividad matemática para resolverlos.

Resultaron fáciles aquellas preguntas que requerían identificar el número menor o mayor en referencia a otros, entre números naturales o expresiones decimales; como también los problemas que implican una operación en el campo aditivo o multiplicativo. Las mayores dificultades aparecieron en los ítems que involucran fracciones, ya sea ordenándolas, operando o usando el concepto de la fracción como parte de un todo.

La enseñanza de los números racionales y, en particular, de las fracciones presenta una complejidad cuya elaboración ocupa un lugar importante en la escuela primaria. Es un contenido complejo y los resultados lo confirman.

De las preguntas que evalúan lo que los alumnos saben y son capaces de hacer en el dominio de la medida, resultaron más fáciles las que involucran el reconocimiento de la unidad de medida correspondiente a un atributo o hacer una estimación de una medida y los problemas que requieren equivalencia de tiempo o de longitud entre medidas usuales. Con cierta dificultad fueron resueltos el cálculo de duraciones, la equivalencia entre medidas de capacidad y los problemas de cálculo de área y perímetro. Y aquellos que representaron mayor grado de dificultad son los de equivalencia de figuras o de cálculo de área de una figura compuesta.

Los estudiantes muestran dificultad en la resolución de problemas y, sin embargo, estos constituyen la actividad matemática fundamental, que coincide con el enfoque de habilidades para la vida del SERCE. Sólo el 41,86% de estudiantes resolvió correctamente este contenido.

Saber geometría es más que reconocer figuras y cuerpos por sus nombres: es resolver problemas geométricos apoyándose en propiedades conocidas de figuras y cuerpos; en situaciones que, generalmente, son intramatemáticas, geométricas y que cuentan o no con apoyo gráfico. Su solución es lo que da sentido a la enseñanza de la geometría y, como señalamos, ha tenido y aún tiene poca presencia en las aulas.

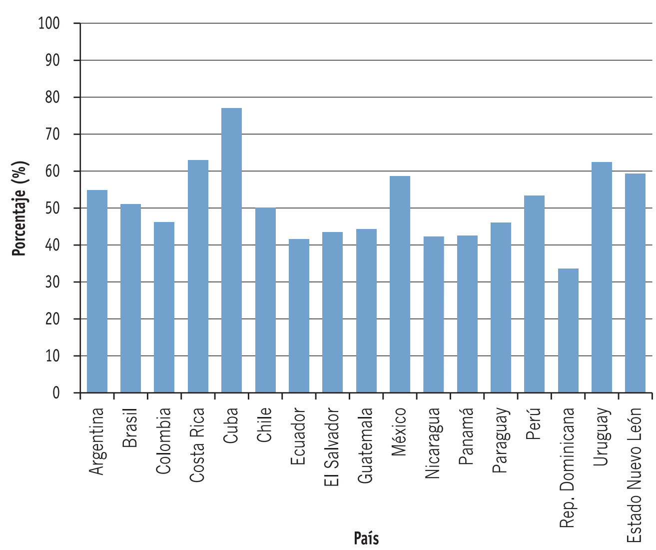
Las preguntas que evalúan geometría fueron respondidas correctamente por el 36,03% de los estudiantes de la región. Las dos terceras partes de ellas contienen problemas, siendo el resto ítems de reconocimiento de figuras, cuerpos y propiedades, cuestiones que les resultaron fáciles.

Finalmente y tal como ocurrió en tercer grado, el dominio variacional es el que tiene el menor porcentaje de estudiantes de la región con respuestas correctas (33,68%). A los niños no les resultó difícil completar secuencias reconociendo el patrón de formación; a la inversa, las mayores dificultades surgieron en los problemas que involucraban proporcionalidad directa y en los que incluyeron el concepto y cálculo de porcentaje.

Resultados por país en matemática para sexto grado básico

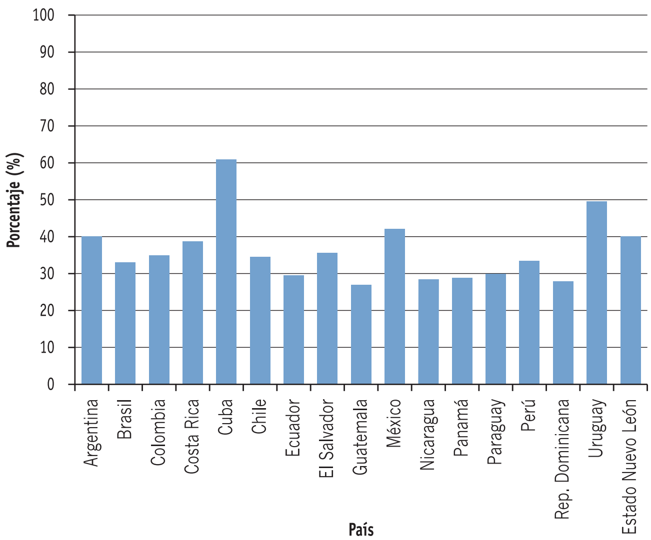
Los gráficos que siguen muestran los porcentajes de estudiantes de sexto grado de primaria de la región, evaluados por este instrumento, que respondieron correctamente por dominio de contenidos.

GRÁFICO 10 **PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS EN MATEMÁTICA DE SEXTO GRADO EN EL DOMINIO NUMÉRICO Y POR PAÍS**



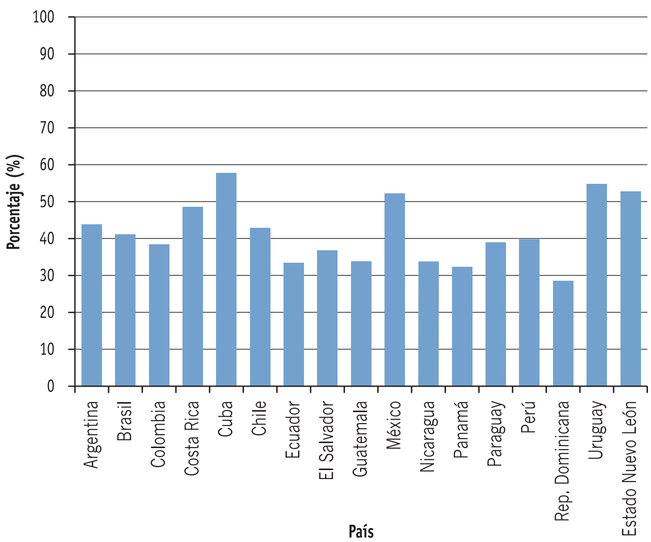
Fuente: SERCE, 2007

GRÁFICO 11 **PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS EN MATEMÁTICA DE SEXTO GRADO EN EL DOMINIO GEOMÉTRICO Y POR PAÍS**



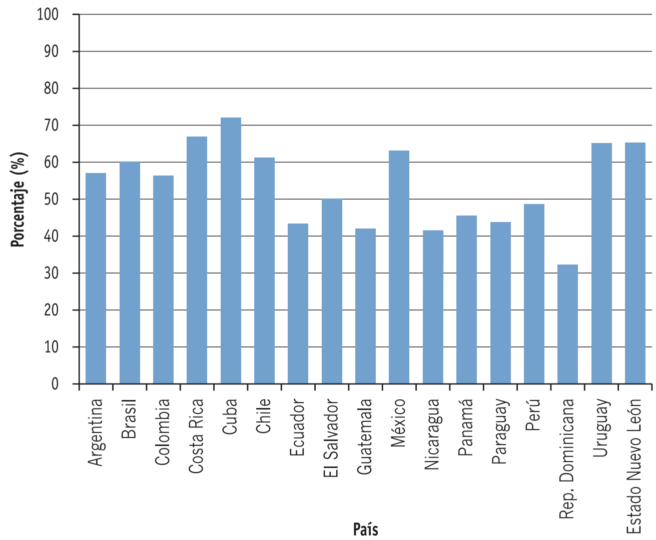
Fuente: SERCE, 2007

GRÁFICO 12 **PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS EN MATEMÁTICA DE SEXTO GRADO EN EL DOMINIO DE LA MEDIDA Y POR PAÍS**



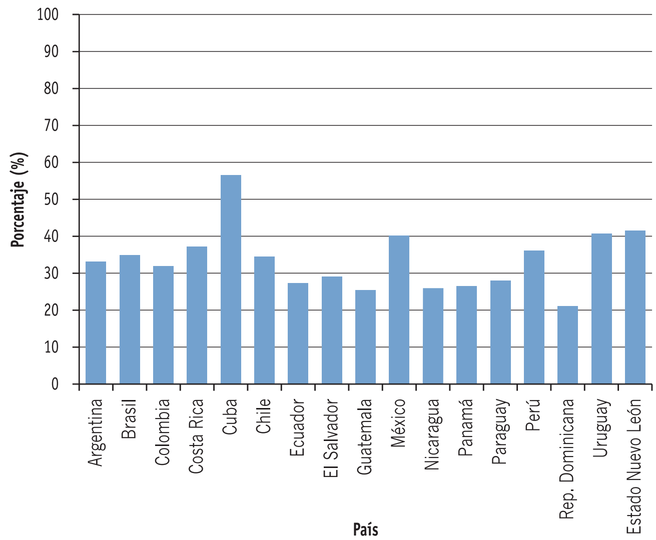
Fuente: SERCE, 2007

GRÁFICO 13 **PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS EN MATEMÁTICA DE SEXTO GRADO EN EL DOMINIO ESTADÍSTICO Y POR PAÍS**



Fuente: SERCE, 2007

GRÁFICO 14 **PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS EN MATEMÁTICA DE SEXTO GRADO EN EL DOMINIO VARIACIONAL Y POR PAÍS**



Fuente: SERCE, 2007

Los resultados de los estudiantes de sexto grado que responden correctamente a las preguntas de matemática por procesos cognitivos, expresados en porcentajes, aparecen en el siguiente cuadro.

CUADRO 6 **PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS CORRECTAS PARA MATEMÁTICA DE SEXTO GRADO, POR PROCESO COGNITIVO Y POR PAÍS**

PAÍS	RECONOCIMIENTO DE OBJETOS Y ELEMENTOS	SOLUCIÓN DE PROBLEMAS SIMPLES	SOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMPLEJOS
Argentina	60,33	43,12	35,37
Brasil	57,47	41,87	31,15
Colombia	56,75	37,89	29,89
Costa Rica	65,93	48,47	39,43
Cuba	74,57	65,17	53,50
Chile	61,21	40,72	32,42
Ecuador	47,28	33,22	23,80
El Salvador	53,33	35,66	28,01
Guatemala	47,88	32,88	23,58
México	64,45	49,18	40,85
Nicaragua	46,24	32,70	24,94
Panamá	49,11	32,49	23,27
Paraguay	49,46	36,59	25,12
Perú	55,70	40,51	31,13
República Dominicana	39,70	25,88	20,73
Uruguay	65,54	52,11	49,23
Estado Nuevo León	64,99	49,72	40,15
Región	56,60	41,16	32,70

Al comparar estos resultados con los de tercer grado, es posible advertir que aquí hay mayor diferencia entre los valores obtenidos en Solución de Problemas Simples y Solución de Problemas Complejos. Esto puede explicarse atendiendo a la complejización del contenido matemático propio de sexto grado, lo que permite plantear problemas donde estos niveles están más diferenciados.

Recomendaciones para mejorar la práctica pedagógica

EVALUACIÓN Y PERSPECTIVA DE ENSEÑANZA

Remarcamos esta idea, sin desconocer que cada maestro toma decisiones de acreditación en función de acuerdos institucionales y jurisdiccionales sobre criterios y parámetros.

En este capítulo haremos énfasis en la idea de la evaluación como un proceso que permite recoger información sobre el estado de los saberes de los alumnos, y que orienta la toma de decisiones de enseñanza.

Las producciones de los niños brindan información acerca de lo que aprendieron y de sus dificultades, a la vez que muestran resultados derivados de las estrategias de enseñanza asumidas por sus maestros. A veces, los llamados 'errores' develan un estado provisorio del saber propio de un proceso de aprendizaje que, naturalmente, en cada etapa toma en cuenta algunas características del conocimiento enseñado y no otras.

Por ello es necesario analizar los 'errores', intentar comprender cómo y por qué se producen y diseñar actividades de distinto tipo que permitan revisar o ampliar lo ya conocido.

En caso de tratarse de cuestiones presentes en las producciones de muchos alumnos del grupo, en principio habrá que preguntarse en qué medida las actividades propuestas como evaluación recuperan los contextos, las tareas, y las representaciones incluidas en las actividades seleccionadas para presentar y desarrollar el tema. Muchas veces, la aparición de una nueva representación, o de un contexto que involucra un significado distinto para una operación deriva en la imposibilidad de utilizar lo conocido, pues ese conocimiento, en el alumno, aún está muy ligado a las representaciones y los contextos analizados previamente.

Más allá de un primer panorama grupal obtenido al realizar una evaluación diagnóstica al inicio del año, los primeros problemas que aparecen frente a cada tema permiten tener algunos indicios de los conocimientos del grupo y considerarlos en un sentido diagnóstico para terminar de elaborar la planificación.

Por ejemplo: cuando los niños piensan que "*al multiplicar siempre se obtiene un número mayor que cada factor*", o que "*0,6 es el siguiente de 0,5*", seguramente no han tenido oportunidad de cuestionarse aún que algunos de estos conocimientos, válidos para el conjunto de los números naturales, no pueden extenderse a otros tipos de números.

LA MATEMÁTICA NECESARIA PARA EL CIUDADANO Y LAS HABILIDADES PARA LA VIDA

Hoy las expectativas sobre la educación indican que la escuela debe contribuir al desarrollo de la capacidad de utilizar conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos para interpretar y comprender el mundo real, tanto en lo referido a la vida en el entorno social inmediato, como a los ámbitos de trabajo y de estudio.

Muchos documentos curriculares plantean, de forma explícita, la necesidad de formar un ciudadano autónomo, que pueda desplegar prácticas matemáticas adecuadas a distintas situaciones y justificar la validez tanto de los procedimientos utilizados como de los resultados obtenidos.

La actual tendencia a extender la obligatoriedad de la enseñanza requiere pensar esta formación con una mayor diversidad en el capital cultural de los estudiantes. Esto involucra diferentes relaciones con el conocimiento y con el sentido que éste tiene en la formación de su proyecto de vida. Cabe aquí señalar que las condiciones de vulnerabilidad económica, social y cultural que afectan a un gran porcentaje de estudiantes y de docentes configuran un escenario que parece desafiar la posibilidad de una educación de calidad para todos. Así, hoy resulta imprescindible la discusión en el ámbito de la escuela acerca de qué matemática se enseña, para qué, y para quiénes.

Cuando se piensa en formar ciudadanos críticos, que puedan participar activamente en una sociedad democrática, hace falta anticipar qué tipo de retos afrontarán nuestros estudiantes a futuro y, en consecuencia, qué herramientas debería brindarles la escuela.

Desde esta perspectiva, ya no es posible sostener una formación matemática que ponga el acento en la disponibilidad de un repertorio de resultados y técnicas que, seguramente, podrá ser modificado. Es necesario buscar el desarrollo de capacidades, valores y actitudes que permitan a los estudiantes hacer frente a distintas situaciones; tomar decisiones utilizando la información disponible y resolver problemas, pudiendo defender y argumentar sus puntos de vista.

Y para ello, hay que plantear una educación de calidad que abarque los conocimientos de base, valores, comportamientos y habilidades que correspondan a las necesidades de la vida actual. Lo anterior implica extender la convicción de que todos pueden aprender esta ciencia y asumir el compromiso de una enseñanza que los habilite a avanzar desarrollando sus potencialidades y los prepare para enfrentar los escenarios cada vez más complejos y cambiantes que los interpelarán.

A la inversa, cuando la enseñanza apunta únicamente al dominio de técnicas, algunos alumnos obtienen buenos resultados en sus evaluaciones si los instrumentos utilizados remiten directamente al uso de esa(s) técnica(s) conocida(s). Sin embargo, esos mismos estudiantes

Muchas veces la formación matemática ha sido utilizada como herramienta de selección para distinguir los 'buenos' de los 'malos' alumnos y, por ello, ubica a muchos jóvenes en una posición de exclusión. No sólo fracasan en sus evaluaciones escolares, sino asumen –además– que ese resultado deriva de su propia "falta de habilidad para la matemática".

fracasan cuando las situaciones que se les presentan son diferentes de aquellas que abordaron en la escuela.

Por eso, no solo resultará necesario enriquecer los modos de presentación y la variedad de problemas a ser resueltos sino también, y fundamentalmente, sostener un trabajo de reflexión sobre lo realizado exigiendo siempre la explicitación, el reconocimiento y la sistematización del conocimiento implicado en la resolución de los problemas, así como de las formas de obtenerlo y validarlo.

CULTURA MATEMÁTICA: APRENDIZAJE A LARGO PLAZO

La enseñanza de la matemática en la escuela básica está condicionada, fundamentalmente, por dos características esenciales que determinan sus funciones y objetivos: por un lado es enseñanza y, como tal, parte del proceso de formación integral de los alumnos; es decir, parte del proceso de educación que tiene lugar en las escuelas; por otro, es enseñanza de la matemática y por ello participa de los modos de hacer y de pensar propios de esta ciencia.

Como ocurre con otras producciones culturales, el conocimiento matemático se transforma en su interacción con los distintos entornos sociales. Así, la actividad de los matemáticos está ligada fuertemente a la resolución de problemas, y a un modo particular de razonar y comunicar los resultados de esa tarea.

Resolver los problemas –del mundo natural, del social o de la misma matemática– implica construir modelos nuevos o utilizar modelos matemáticos conocidos, que permiten anticipar el resultado de algunas acciones sin realizarlas efectivamente. En ambos casos, luego son analizadas las conclusiones para determinar si responden o no a las preguntas planteadas.

También forma parte de la acción de los matemáticos mejorar los modelos en uso y las formas de comunicar los resultados; así como relacionar lo nuevo con lo ya conocido, articulando los conocimientos en una estructura cada vez más amplia y coherente.

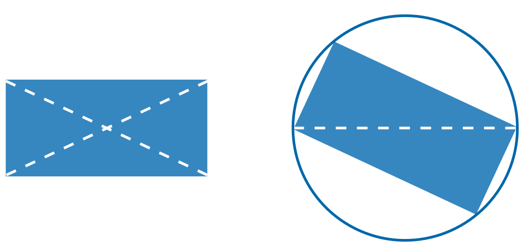
Justamente esta forma de trabajar es la que buscamos sea desarrollada en las escuelas; con las restricciones necesarias e invitando a los alumnos a entrar en el juego matemático. Esto es, a hacerse cargo de producir conocimientos nuevos (para ellos) frente a los problemas que se les plantean, argumentando acerca de la validez de los resultados y de los procedimientos usados, reconociendo luego –con la ayuda del maestro– el lugar de esos saberes en una estructura más amplia.

Es posible sostener que estudiar matemática es hacer matemática en su sentido más amplio, porque requiere involucrarse en la resolución de un problema, indagar las condiciones particulares y generales que implica, generar conjeturas, identificar modelos con los que abordar el problema y reconocer el campo de validez de un cierto procedimiento o de una afirmación producida en el marco de este proceso. El alumno que sólo repite lo que le transmite el maestro se somete al aprendizaje de técnicas sin conocer su sentido, o cree que es él quien no se lo encuentra porque no es "bueno para la matemática". Claramente, este es un proceso a largo plazo, en el que cada etapa aporta elementos diferentes.

Un aspecto central en este proceso es el desarrollo de la racionalidad propia de la matemática, a partir de los modos de los alumnos de concebir sus objetos y de elaborar justificaciones acerca de su naturaleza y sus propiedades.

En los primeros grados de la escuela primaria, los niños se apoyan en el uso de ejemplos o en comprobaciones empíricas con materiales[4] para justificar los resultados que obtienen o los procedimientos que eligen. Pero, al finalizar la escolaridad obligatoria tendrían que poder argumentar usando propiedades. Por ejemplo, en geometría es posible avanzar desde comprobar que las diagonales de un rectángulo son iguales plegando y cortando para obtener dos recortes que coinciden cuando se superponen, hasta explorar las relaciones entre rectángulos inscriptos en circunferencias para determinar que un ángulo inscripto en un semicírculo es recto.

FIGURA 1



Asimismo, la enseñanza de la matemática es un ámbito propicio para contribuir a la formación de un ciudadano crítico y responsable, capaz de debatir con otros defendiendo sus puntos de vista y respetando aquellos de los demás; así como para desarrollar cualidades de la personalidad que caracterizan al ser humano.

La enseñanza de la matemática debe ser organizada de forma tal que los temas seleccionados, y su tratamiento escolar, contribuyan a desarrollar una concepción de la matemática como instrumento para conocer y transformar el mundo y, a la vez, como un campo de conocimiento con objetos, reglas y fundamentos propios.

Introducir a los niños y las niñas en estas formas de trabajar les permitirá dominar los conocimientos de esta disciplina para utilizarlos como instrumentos en la resolución de problemas, y también para definirlos y reconocerlos como objetos de una cultura.

4 *Como contar objetos, plegar papeles o tomar medidas.*

SELECCIÓN DE PROBLEMAS Y CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS

En la enseñanza, la centralidad de la resolución de problemas, así como la reflexión y sistematización de procedimientos y resultados respetando ciertas reglas, plantea el desafío de su selección. La pregunta clave es *¿cuáles son los problemas que favorecen la construcción de sentido de las nociones elegidas para la escolaridad obligatoria?*

Cuando el conjunto de problemas elegidos para tratar una noción matemática en clase no es suficientemente representativo de la diversidad abordable en el año escolar correspondiente, es probable que los alumnos sólo puedan utilizarla en contextos limitados, haciendo uso de representaciones estereotipadas, y en situaciones muy similares a las que estudiaron en la escuela.

Para cada conocimiento a enseñar es posible considerar diferentes problemas en los que la noción está contextualizada y 'funciona' como herramienta de resolución en ese caso particular.

Esto puede derivar en que, cuando en una evaluación aparece alguna modificación en el enunciado, el alumno no puede vincularlo con lo que sabe. Por esta razón, es muy importante tener en cuenta cuáles son los contextos, significados y representaciones que elegimos al planificar la enseñanza de una noción. El término noción refiere aquí al estado del saber de un alumno en relación a un concepto matemático transpuesto como objeto de enseñanza, y busca llamar la atención acerca de la polisemia de su enunciación formal cuando se lo analiza en términos de los procesos de los sujetos que están aprendiendo.

Apoyarse en los conocimientos de los niños es central para que puedan apropiarse de la tarea que se les propone. Además, al elegir los problemas también es esencial revisar los enunciados, pues muchas veces son incluidas preguntas inverosímiles, que sólo encuentran respuesta en el ámbito de la escuela.

Estos contextos pueden estar ligados a la información que aparece en los medios de comunicación, a la vida cotidiana, o al ámbito específico de distintas disciplinas, incluyendo –claro– la misma matemática. El uso en distintos contextos, y el análisis posterior de ese uso nombrando las nociones del modo en que son empleadas en la disciplina, reformulando las conclusiones con representaciones más ajustadas a las convencionales, permitirá la progresiva generalización de la noción, ampliando el campo de problemas que los alumnos pueden resolver con ella.

Al interactuar en su vida social, los niños aprenden las prácticas habituales de cada comunidad y construyen, entre otros, conocimientos ligados a la matemática, los que no siempre son recuperados por la escuela. Por ejemplo, en algunos primeros grados únicamente se trabaja con los números hasta el 9 en la primera parte del año, sin tener en cuenta que hay niños que ayudan a sus padres en la venta de distintos productos y que realizan cálculos sencillos aún siendo muy pequeños; o se 'presenta' el 2000, sin advertir que es número ya conocido por los niños. Otras veces, los enunciados de problemas escolares no requieren ser leídos, pues basta descubrir que dice 'total' para decidir que es necesario sumar.

Al elegir los problemas, es esencial revisar los enunciados pues muchas veces son incluidas preguntas inverosímiles y que sólo encuentran respuesta en el ámbito de la escuela. Por ejemplo, si se pide calcular la cantidad 'total' de mosquitos que picaron a un perro, sabiendo cuántos lo picaron en dos ocasiones diferentes, podríamos preguntarnos quién contó los mosquitos y para qué, o quién necesita el resultado de tal suma. Muchos niños, 'suman por sumar', sin preocuparse por el sentido de lo que hacen, guiados por indicios aparecidos en los enunciados para orientar la operación que 'hay que hacer'. Así basta descubrir que dice 'total' para decidir que 'hay que sumar'.

Entonces, para involucrar a los alumnos en la comprensión de un problema será esencial proponer enunciados que requieran ser leídos una o más veces, para comprender la situación planteada e involucrarse en su resolución, sin que el texto anticipe un único procedimiento.

En este sentido, los contextos de los problemas deberán ser significativos para los alumnos; es decir, implicar un desafío que puedan resolver en el marco de sus posibilidades cognitivas y de sus experiencias sociales y culturales previas. Cabe aclarar aquí que esto no significa que todas sus experiencias deban referirse al entorno inmediato. Es más, el trabajo en contextos intramatemáticos –al comparar y analizar distintos procedimientos de cálculo– es central para la explicitación y sistematización de propiedades.

Hay que tener presente que un conjunto bien elegido de cuentas presentadas para descubrir una estrategia de cálculo mental, también puede dar lugar a verdaderos problemas, ya sean dos afirmaciones opuestas sobre las que hay que decidir su validez, una construcción geométrica con determinados instrumentos o determinadas condiciones, un juego numérico, o un interrogante que deba ser respondido a partir de una información publicada en el diario o en la publicidad de una revista.

Aparte de los distintos contextos, para cada noción matemática es posible encontrar distintos significados. Por ejemplo, los números racionales pueden ser utilizados en situaciones referidas a la relación parte-todo, a la razón entre dos cantidades del mismo tipo o de distinto tipo, al resultado de una división, al de una transformación multiplicativa o de una probabilidad. Cada uno de estos significados exige y pone en funcionamiento diversos aspectos del concepto, así como distintos niveles de complejidad, lo que lleva a discutir y articular cómo será su abordaje en cada grado escolar.

En el conjunto de problemas seleccionado también es necesario tener en cuenta las diferentes representaciones posibles de la noción

Las formas de representación en matemática son sumamente importantes, pues sólo accedemos a los objetos que estudiamos por medio de ellas y, a la vez, ellas mismas también se constituyen en objeto de estudio.

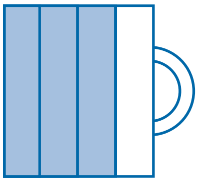
enseñada, ya que la posibilidad de avanzar en la comprensión de una noción implica reconocerla en todas sus representaciones, pudiendo elegir la más conveniente y pasar de una a otra en función del problema a resolver.

Siguiendo con el ejemplo de los números racionales, existen expresiones numéricas fracciones, decimales, porcentajes, gráficos relativos a áreas de distintas figuras (frecuentemente rectángulos) y puntos en la recta numérica, por lo que el uso predominante de una representación rigidiza el sentido del conocimiento involucrado.

Durante la resolución de problemas debe esperarse que sean los alumnos los que tomen decisiones acerca de las formas de registrar y comunicar sus procedimientos, y que el debate posterior sobre la pertinencia y economía de estas representaciones permita su articulación con las representaciones convencionales. Así por ejemplo, en una evaluación encontramos un dibujo de $\frac{3}{4}$ taza de harina realizado por una alumna que así recupera su experiencia de representar fracciones en rectángulos.

Conocer las distintas expresiones que usa la matemática para representar una misma idea permite identificarla en distintos contextos, utilizarla para resolver problemas y, eventualmente, cambiar a otra representación si esto habilita procedimientos más económicos o permite comunicar la información más eficazmente.

FIGURA 2



Este aprendizaje requiere de un proceso a largo plazo, ya que primero son resueltos problemas que involucran un sentido particular de una noción en un contexto, con alguna representación también ligada a ese uso; luego, son incluidos otros contextos con la misma representación o se presenta una nueva que resulte más adecuada; más tarde es ampliado su uso a nuevos contextos, tanto extra como intramatemáticos, y se comparan y analizan los distintos procedimientos y representaciones empleadas para explicitar sus características y reglas de uso en cada registro (gráfico, numérico, geométrico), avanzando así en un proceso de generalización de la noción.

Articular las distintas representaciones es parte de la construcción de cada concepto, avanzando desde la posibilidad de operar en cada registro con sus símbolos y reglas hacia la de pasar de un registro a otro.

Por otra parte, las situaciones trabajadas debieran ofrecer una variedad de tipos de respuestas. Es frecuente que los niños piensen que hay que usar todos los números que aparecen en un enunciado, o que basta hacer una cuenta y que su resultado es la respuesta del problema.

Es necesario tener presente que es posible dar lugar a verdaderos problemas a partir ya sea de un conjunto bien elegido de cuentas presentadas para descubrir una estrategia de cálculo mental, de dos afirmaciones opuestas sobre las que hay que decidir su validez, de una construcción geométrica con determinados instrumentos o determinadas condiciones, de un juego numérico, de un interrogante que deba ser respondido a partir de una información publicada en el diario o en la publicidad de una revista.

En la formación de un alumno que se enfrentará a la resolución de problemas nuevos, diferentes, es fundamental incluir preguntas que admitan más de una respuesta, presentar información compleja que es preciso analizar para decidir qué datos usar y/o variar los soportes gráficos para presentar esa información.

Los distintos significados y representaciones puestos en juego al resolver un conjunto bien elegido de problemas, a propósito de la enseñanza de una noción, podrán sistematizarse en instancias de reflexión sobre lo actuado, explicitando las relaciones entre ellos y avanzando en el uso del lenguaje específico.

TRABAJO EN CLASE Y TIPO DE PRÁCTICA MATEMÁTICA

Desde la perspectiva propuesta, el trabajo de resolución de problemas requiere de algunas condiciones para la gestión de la clase.

Al presentar un problema es necesario asegurarse de que todos hayan comprendido cuál es el desafío planteado, para que cada alumno acepte ocuparse de él, intentando resolver por sí solo, sin orientarlos acerca de cómo deben hacerlo. Luego, habrá que dar lugar a un intercambio del que participen todos los alumnos y en el que el maestro vaya explicando las diferentes aproximaciones al conocimiento que desea enseñar, y debatir sobre ellas.

La clave de alentar a hablar, o a participar, a aquellos alumnos que no lo hacen espontáneamente significa trabajar suponiendo que pueden progresar y no que van a fracasar.

Al dar lugar a la presentación y explicación de los procedimientos utilizados por los alumnos, es necesario valorizar de igual modo todas las producciones, ya sea que permitan o no arribar a una respuesta al problema planteado; así como animar a los alumnos a dar las razones de lo realizado, a explicar por qué lo hicieron de cierta forma, y a argumentar sobre la validez de sus producciones. Esto les permitirá volver sobre lo que han pensado para analizar aciertos y errores y controlar, de este modo, el trabajo.

Este trabajo incorpora a los alumnos en proceso de evaluación en un lugar diferente del habitual, en que quedan a la espera de la palabra del docente quien les ratifica de inmediato si lo que hicieron está bien o mal. Pero, si han asumido como propia la tarea de resolución, querrán saber si lo producido es o no una respuesta a la pregunta que organizó el quehacer matemático en el aula.

En el debate, el conjunto de la clase validará o no una respuesta, lo que llevará a la modificación de los procedimientos que conducen a errores; y, con la intervención del maestro, serán reconocidos y sistematizados los saberes descubiertos por el grupo-curso.

Esta tarea de establecer relaciones entre las conclusiones de la clase y el conocimiento matemático al que se pretende llegar, introduciendo las reglas y el lenguaje específicos, y entre los conocimientos ya conocidos y los nuevos, es una tarea que está siempre a cargo del maestro y que resulta imprescindible para que los alumnos identifiquen qué han aprendido.

ESTUDIAR MATEMÁTICA EN CLASE Y FUERA DE ELLA

Promover la diversidad de producciones es un modo de incluir a todos en el aprendizaje, de generar confianza en las propias posibilidades de aprender y de poner en evidencia la multiplicidad de formas de pensar frente a una misma cuestión, así como la necesidad de acordar cuáles son consideradas adecuadas en función de las reglas propias de la matemática.

Es muy importante instalar en la escuela las condiciones necesarias para que los niños sientan que los errores y los aciertos surgen en función de los conocimientos que circulan en la clase: es decir, que pueden ser discutidos y validados con argumentos y explicaciones.

Es así como es posible lograr que los niños vayan internalizando progresivamente que la matemática es una ciencia cuyos resultados y avances son obtenidos como consecuencia necesaria de la aplicación de ciertas relaciones y del debate entre quienes las plantean, y no como una práctica de la adivinación o del azar o un saber que no sufre transformaciones.

La revisión de las producciones realizadas para modificarlas, enriquecerlas, ajustar el vocabulario o sistematizar lo aprendido es fundamental para que los niños se involucren en su propio proceso de estudio.

La evaluación para la toma de decisiones y para la investigación

Niveles de desempeño y ejemplos de preguntas por nivel

La prueba y el método de procesamiento utilizado posibilitan obtener información acerca de lo que los alumnos saben y son capaces de hacer. A su vez, combinando el criterio estadístico con el conceptual-pedagógico, es posible encontrar características comunes en los rendimientos de los alumnos, las que permiten agrupar esos desempeños en niveles; es decir, en categorías de tareas que identifican grupos de estudiantes con cotas similares de rendimiento frente al instrumento.

En matemática es posible definir cuatro niveles de desempeño para cada grado evaluado, los que son descritos en los cuadros siguientes.

Un estudiante ubicado en un determinado nivel de desempeño muestra el rendimiento necesario para realizar, con alta probabilidad de éxito, las actividades propuestas para ese nivel y los inferiores al mismo; es decir, son inclusivos.

NIVELES DE DESEMPEÑO EN ALUMNOS DE TERCER GRADO

El cuadro descriptivo de los niveles de desempeño comprende, por un lado, una caracterización general de los procesos cognitivos de los estudiantes de tercero en cada nivel y, por otro, el detalle de éstos, según el instrumento aplicado en esta oportunidad.

CUADRO 7 **NIVELES DE DESEMPEÑO EN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES DE TERCER GRADO**

NIVEL	DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS REALIZADOS POR LOS ESTUDIANTES	DESCRIPCIÓN DE LOS DESEMPEÑOS DE LOS ALUMNOS
Nivel IV	Resuelven problemas complejos en los distintos dominios conceptuales, con estrategias basadas en el uso de datos, propiedades y relaciones no explícitas.	Identifican un elemento en un plano bidimensional y las propiedades de los lados de un cuadrado o rectángulo para resolver un problema. Resuelven situaciones problemáticas en el campo multiplicativo que involucran una incógnita en uno de los factores, o que requieren aplicar equivalencia entre medidas usuales de longitud. Reconocen la regla de formación de una secuencia numérica e identifican su enunciado.
Nivel III	Reconocen conceptos, relaciones y propiedades no explícitas en los distintos dominios conceptuales del SERCE. Resuelven problemas simples que involucran el reconocimiento y uso de una de las cuatro operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación o división) .	Identifican elementos de figuras geométricas no usuales e interpretan distintos tipos de gráficos para extraer información y resolver problemas que implican operar con los datos. Resuelven problemas en el campo multiplicativo, o que incluyen una ecuación aditiva o requieren dos operaciones. Resuelven problemas en el campo aditivo con unidades de medida y sus equivalencias, o que incluyen fracciones usuales. Reconocen la regla de formación de una secuencia gráfica o numérica aditiva para poder continuarla.
Nivel II	Reconocen hechos, conceptos, propiedades y relaciones directas y explícitas, en los distintos dominios conceptuales del marco del SERCE. Resuelven problemas simples en contextos familiares, que involucran el reconocimiento y uso de una sola operación básica (adición, sustracción o multiplicación).	Reconocen la organización decimal y posicional del sistema de numeración y los elementos de figuras geométricas. Identifican un recorrido en un plano y la unidad de medida o el instrumento más apropiado para medir un atributo de un objeto conocido. Interpretan tablas y cuadros para extraer información y comparar datos. Resuelven problemas en el campo aditivo o que requieren una multiplicación con sentido de proporcionalidad en el campo de los números naturales.
Nivel I	Reconocen hechos y conceptos básicos de los dominios numérico, geométrico y del tratamiento de la información en el marco conceptual del SERCE.	Reconocen la relación de orden entre números naturales y figuras geométricas usuales de dos dimensiones en dibujos simples. Localizan posiciones relativas de un objeto en una representación espacial. Interpretan tablas y gráficos para extraer información directa.

En el Cuadro 8 es posible ver, en porcentajes, el desempeño de los alumnos de tercer grado evaluados por el SERCE, según los niveles ya descritos.

CUADRO 8 **NIVELES DE DESEMPEÑO DE TERCER GRADO Y PORCENTAJE DE ESTUDIANTES POR NIVEL**

NIVEL IV	NIVEL III	NIVEL II	NIVEL I	NO ALCANZAN EL NIVEL I
11,20%	14,30%	28,30%	34,00%	10,20%

Ejemplos de preguntas para cada nivel (tercer grado)

Nivel IV / Secuencia numérica

21 ¿Cuál es la regla que se usó en la siguiente secuencia de números?

1500	1800	2100	2400	2700

- A Se multiplicó por 3 cada vez.
- B Se agregaron 30 unidades cada vez.
- C Se agregaron 300 unidades cada vez.
- D Se multiplicó por 300 cada vez.

DM3.B2.IT09

El ítem requiere que el o la estudiante identifique la regla de formación de una secuencia aditiva por su enunciado. Para ello debe establecer, en primer lugar, las relaciones entre los términos de esta secuencia; es decir, cómo se pasa de un término a otro y, en segundo lugar, si esa relación permanece constante.

La elección de los distractores está apoyada en la posibilidad de elegir otra operación que aumenta y en una incorrecta evaluación de la constante.

Secuencia numérica

Grado	Tercer grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Identificar la regla de formación de una secuencia aditiva por su enunciado
Respuesta correcta	C : Fueron agregadas 300 unidades cada vez

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	30,45%
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 24,95% B : 21,19% D : 15,98%
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	7,43%

Nivel III / Tiempo de lectura

17 Juan se demoró 1 hora en leer un cuento. Su hermana lo leyó en 45 minutos. ¿Cuántos minutos **más** que su hermana demoró Juan en leer el cuento?

- A 105
- B 55
- C 44
- D 15

DM3.B2.IT05

El problema que este ítem presenta al estudiante es de estructura aditiva, que involucra la equivalencia entre medidas usuales de tiempo: horas y minutos.

Los distractores fueron elegidos por la posibilidad de seleccionar una operación incorrecta y de no hacer una equivalencia en el sistema sexagesimal sino en el decimal.

Tiempo de lectura

Grado	Tercer grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que requiere una sustracción y equivalencia entre medidas de tiempo
Respuesta correcta	D : 15

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	43,09%
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 13,66% B : 19,90% C : 19,10%
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	4,25%

Grupos y animales

Grado	Tercer grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que involucra la interpretación de datos presentados en una tabla o cuadro para su comparación
Respuesta correcta	A : Las niñas tienen más perros que los niños

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	59,75%
Porcentaje de respuestas de los distractores	B : 10,02% C : 16,28% D : 6,84%
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	7,11%

Nivel II / Grupos y animales

20 La tabla siguiente presenta la cantidad y el tipo de animales que tiene un grupo de niñas y niños.

	ANIMALES		
GRUPOS	perros	gatos	pájaros
Niñas	7	5	4
Niños	3	7	4

Los datos de la tabla indican que

- A las niñas tienen más perros que los niños.
- B las niñas tienen 3 gatos.
- C en total hay más perros que gatos.
- D las niñas tienen menos pájaros que los niños.

DM3.B4.IT08

Resolver el problema supone interpretar el texto de cada una de las opciones para ubicar la información en la tabla y, luego, realizar las comparaciones pedidas; determinando para cada una de ellas si es verdadera o no.

En este caso, la elección de los distractores tiene relación con una incorrecta interpretación de las relaciones de orden y la dificultad para ubicar la información en la tabla.

Libros vendidos por mes

Grado	Tercer grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Interpretar información directa presentada en un gráfico de barras
Respuesta correcta	A : Enero

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	75,64%
Porcentaje de respuestas de los distractores	B : 9,01% C : 6,16% D : 6,02%
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	3,17%

Nivel I / Libros vendidos por mes

19 La venta de libros de una librería en los primeros meses del año se muestra en el siguiente gráfico:

¿En qué mes hubo mayor venta de libros?

- A Enero.
- B Febrero.
- C Marzo.
- D Abril.

DM3.B2.IT07

El problema requiere considerar que cada columna representa los libros vendidos en ese mes asociando esa cantidad al número más alto de la escala alcanzado por la barra.

Cualquiera de las tres opciones incorrectas implica el desconocimiento de cómo establecer esa relación.

NIVELES DE DESEMPEÑO EN ALUMNOS DE SEXTO GRADO

El cuadro que sigue comprende, por un lado, una caracterización general de los procesos cognitivos de los estudiantes de sexto para cada nivel y, por otro, la descripción de los desempeños, según el instrumento aplicado en esta oportunidad.

CUADRO 9 **NIVELES DE DESEMPEÑO EN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO**

NIVEL	DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS REALIZADOS POR LOS ESTUDIANTES	DESCRIPCIÓN DE LOS DESEMPEÑOS DE LOS ALUMNOS
Nivel IV	Resuelven problemas complejos en los dominios conceptuales del SERCE, con información no explícita y que requieren el uso de relaciones y conexiones entre diferentes conceptos.	Calculan promedios y resuelven cálculos combinando las cuatro operaciones básicas en el campo de los números naturales. Identifican paralelismo y perpendicularidad en una situación real y concreta y la representación gráfica de un porcentaje. Resuelven problemas que involucran propiedades de los ángulos de triángulos y cuadriláteros, que integran áreas de diferentes figuras o dos operaciones entre números decimales. Resuelven problemas que involucran el concepto de fracción. Hacen generalizaciones para continuar una secuencia gráfica que responde a un patrón de formación complejo.
Nivel III	Resuelven problemas en los dominios conceptuales del SERCE que involucran el uso de conceptos, relaciones y propiedades. Pueden interpretar información de distintas representaciones.	Comparan fracciones, usan el concepto de porcentaje en el análisis de la información y en la resolución de problemas que requieren calcularlo. Identifican perpendicularidad y paralelismo en el plano, como así también cuerpos y sus elementos sin un apoyo gráfico. Resuelven problemas que requieren interpretar los elementos de una división o equivalencia de medidas. Reconocen ángulos centrales y figuras geométricas de uso frecuente, incluyendo el círculo, y recurren a sus propiedades para resolver problemas. Resuelven problemas de áreas y/o perímetros de triángulos y cuadriláteros. Hacen generalizaciones que les permiten continuar una secuencia gráfica o hallar la regla de formación de una secuencia numérica que responde a un patrón algo complejo.
Nivel II	Los estudiantes reconocen hechos, conceptos, propiedades y relaciones en los distintos dominios conceptuales del SERCE. Resuelven problemas que requieren estrategias simples, con información relevante explícita, y que involucran una o dos de las cuatro operaciones básicas, en los dominios conceptuales del SERCE.	Analizan e identifican la organización del sistema de numeración decimal posicional; y estiman pesos (masas) expresándolos en la unidad de medida pertinente al atributo a medir. Reconocen figuras geométricas de uso frecuente, y sus propiedades, para resolver problemas. Interpretan, comparan y operan con información presentada en diferentes representaciones gráficas. Identifican la regularidad de una secuencia que responde a un patrón simple. Resuelven problemas referidos al campo aditivo, en diferentes campos numéricos (naturales y expresiones decimales), incluyendo fracciones en sus usos frecuentes o equivalencia de medidas. Resuelven problemas que requieren multiplicación o división, dos operaciones con números naturales, o que incluyen relaciones de proporcionalidad directa.
Nivel I	Reconocen hechos, conceptos, relaciones y propiedades en los distintos dominios conceptuales del SERCE, con excepción del variacional. Resuelven problemas simples de estructura aditiva en el dominio numérico.	Ordenan números naturales de hasta cinco cifras y expresiones decimales de hasta milésimos. Reconocen cuerpos geométricos usuales y la unidad de medida pertinente al atributo a medir. Interpretan información en representaciones gráficas para compararla y traducirla a otra forma de representación. Resuelven problemas que requieren una sola operación, en el campo aditivo y en el campo de los números naturales.

El Cuadro 10 muestra, en porcentajes, el desempeño de los alumnos de sexto grado evaluados por el SERCE, según los niveles recién descritos.

CUADRO 10 **NIVELES DE DESEMPEÑO DE TERCER GRADO Y PORCENTAJE DE ESTUDIANTES POR NIVEL**

NIVEL IV	NIVEL III	NIVEL II	NIVEL I	NO ALCANZAN EL NIVEL I
11,44%	32,33%	40,82%	13,91%	1,50%

Ejemplos de preguntas para cada nivel (sexto grado)

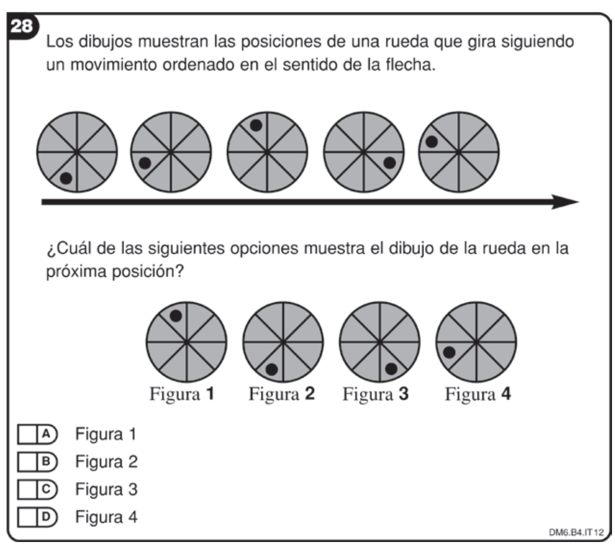
Rueda que gira

Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Continuar una secuencia gráfica identificando su regularidad.
Respuesta correcta	C : Figura 3

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	29,48%
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 33,67% B : 16,82% D : 16,89%
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	3,14%

Nivel IV / Rueda que gira


28 Los dibujos muestran las posiciones de una rueda que gira siguiendo un movimiento ordenado en el sentido de la flecha.

¿Cuál de las siguientes opciones muestra el dibujo de la rueda en la próxima posición?

Figura **1** Figura **2** Figura **3** Figura **4**

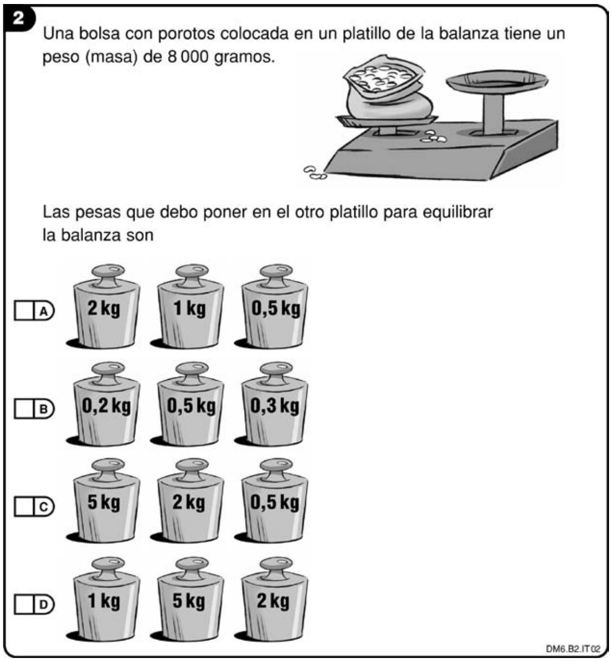
- A Figura 1
- B Figura 2
- C Figura 3
- D Figura 4

DM6.B4.IT 12

De la secuencia gráfica que muestra el ítem los y las estudiantes deben inferir su patrón de formación para identificar la figura que sigue en esa sucesión, considerando la variación entre cada elemento y el siguiente. La regla de generación es de características aditivas; pero de razón no constante.

La dificultad está en no encontrar la regla que en cada paso hace variar la posición del punto un sector más que en la anterior.

Nivel III / Balanza



2 Una bolsa con porotos colocada en un platillo de la balanza tiene un peso (masa) de 8 000 gramos.

Las pesas que debo poner en el otro platillo para equilibrar la balanza son

Balanza

Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema del campo aditivo que involucra equivalencia de medidas de peso (masa).
Respuesta correcta	D : 1 kg 5 kg 2 kg

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	50,20%
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 16,19% B : 13,70% C : 15,56%
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	4,34%

La propuesta de este ítem es encontrar una terna de pesas que equilibren los 8000 gramos de la bolsa de porotos. Para hacerlo, deben usar equivalencias de medidas usuales de peso, y sumar.

Los distractores están relacionados con errores al realizar las equivalencias, como ocurre en el caso B. Otra alternativa es considerar que es posible sumar números enteros con decimales, considerando el valor absoluto de las cifras, como ocurre en el caso A.

Diferencia de estaturas

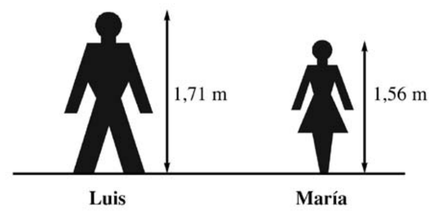
Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema del campo aditivo entre números decimales que involucra equivalencia de medidas de longitud.
Respuesta correcta	B : 15 cm

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	69,73%
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 11,88% C : 9,52% D : 7,32%
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	1,55%

Nivel II / Diferencia de estaturas

2 Considerando los datos de la figura, ¿cuántos centímetros **más** alto es Luis que María?



A 5 cm
B 15 cm
C 25 cm
D 85 cm

DM6.B4.IT02

Aquí, el ítem pide establecer la diferencia entre dos alturas dadas en metros y, luego, hacer la equivalencia expresándola en centímetros, o a la inversa. En todos los casos, los distractores están relacionados con dificultades para encontrar el resultado de la resta.

Tarro de pintura

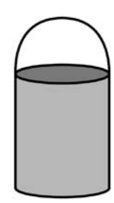
Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Identificar una medida de capacidad.
Respuesta correcta	A : litros

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	82,99%
Porcentaje de respuestas de los distractores	B : 6,07% C : 6,22% D : 3,58%
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	1,14%

Nivel I / Tarro de pintura

17 La capacidad de un tarro de pintura como el representado en el dibujo se mide en



A litros.
B kilogramos.
C centímetros.
D centímetros cuadrados.

DM6.B4.IT01

En este caso, la pregunta pide la identificación de la unidad convencional para medir la capacidad. Los distractores fueron elegidos proponiendo unidades que miden otras magnitudes.

Análisis de las producciones de los estudiantes de tercer y sexto grado. Alternativas de intervención docente

Los análisis y alternativas de intervención presentados están organizados en función de los dominios de contenidos considerados en las pruebas. Cabe aclarar que los ejemplos de actividades propuestas, aunque corresponden a las pruebas de un grado determinado, son sugerencias que el maestro podría adaptar en función de los conocimientos disponibles de sus alumnos. Dichos ejemplos se indicarán en todo el documento con letra en otro formato.

SOBRE EL DOMINIO NUMÉRICO

Consideraremos algunos problemas tomados de las pruebas de tercer y sexto grados.

PROBLEMA 1
BOTELLAS CON JUGO

23 Con 3 litros de jugo ¿cuántas botellas de $\frac{1}{2}$ litro se pueden llenar?

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

Respuesta: ....

DM3 B2 IT07

Botellas con jugo

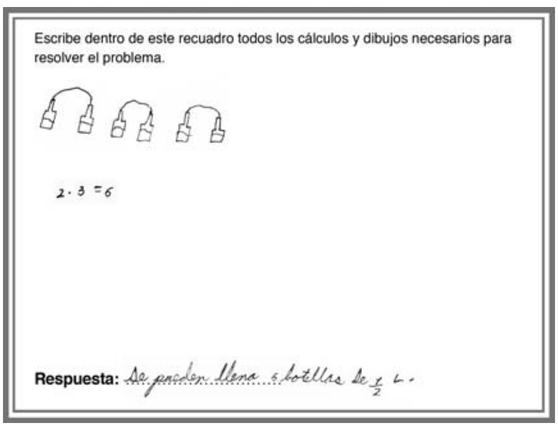
Grado	Tercer grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que involucra el concepto de fracción
Respuesta correcta	6 botellas

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	13,93%
Porcentaje de respuestas parcialmente correctas	8,90%
Porcentaje de respuestas incorrectas	61,41%
Porcentaje de omisiones	15,76%

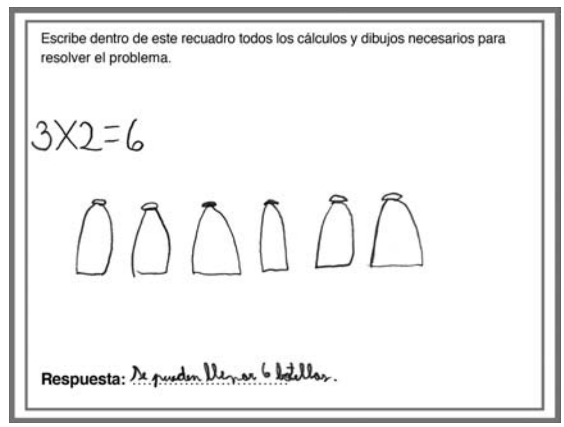
Dado que el ítem es abierto, los niños podían realizar dibujos y resolver de muy distintas maneras. En este caso, una situación que, aparentemente, debiera resultar sencilla arroja un porcentaje alto de respuestas incorrectas.

La respuesta considerada correcta es aquella en que el estudiante contestó ‘6’ ó ‘6 botellas’, mostrando algún procedimiento correcto –ya sea aritmético o gráfico– que represente la respuesta correcta. Como interesa conocer el procedimiento de resolución utilizado y los caminos de exploración, fueron tomadas en cuenta como respuestas parcialmente correctas aquellas en las que el estudiante mostró la elección de un procedimiento válido, aunque sin llegar al resultado correcto, o habiéndolo encontrado no lo expresó en la unidad correcta (por ejemplo, si planteó la división; pero la resolvió erróneamente. O si respondió ‘6 litros’, en lugar de ‘6 botellas’.


Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

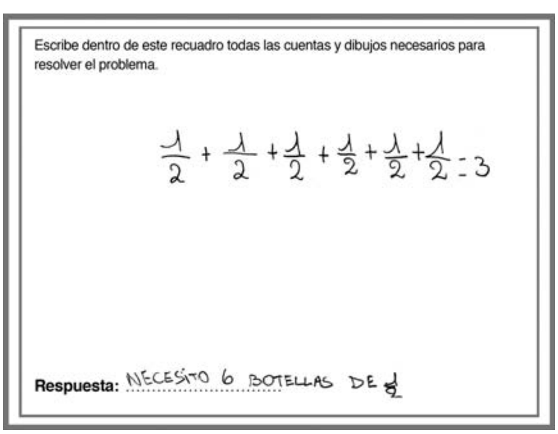
2 · 3 = 6

Respuesta: Se pueden llena 6 botllas de $\frac{1}{2}$ L.


Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

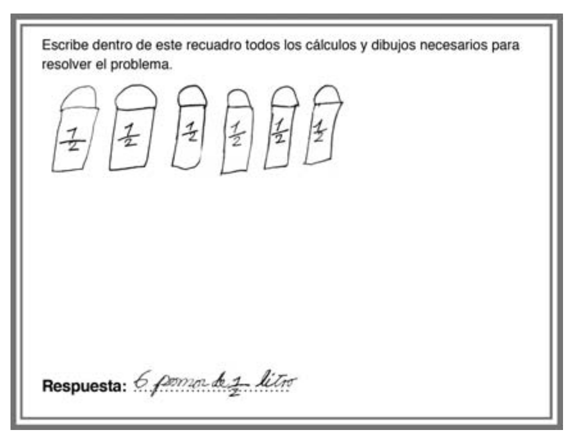
3X2=6

Respuesta: Se pueden llenar 6 botellas.


Escribe dentro de este recuadro todas las cuentas y dibujos necesarios para resolver el problema.

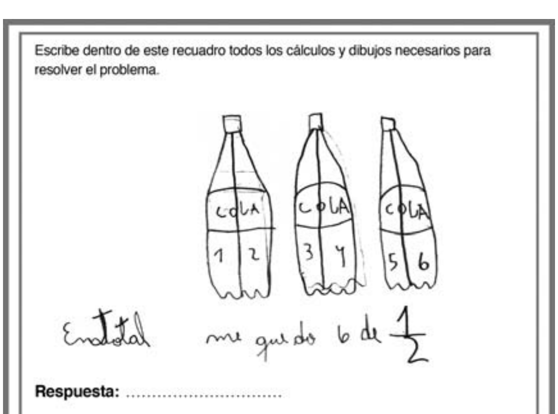
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$

Respuesta: NECESITO 6 BOTELLAS DE $\frac{1}{2}$


Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

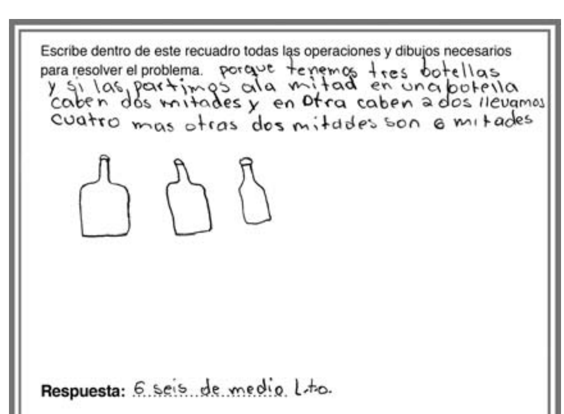
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Respuesta: 6 pomos de $\frac{1}{2}$ litro

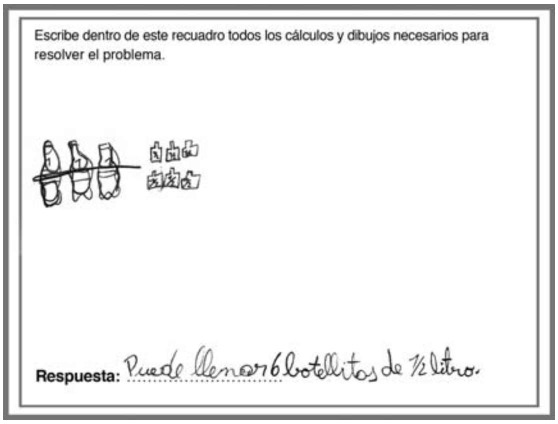

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

En total me quedo 6 de $\frac{1}{2}$

Respuesta: ....


Escribe dentro de este recuadro todas las operaciones y dibujos necesarios para resolver el problema. porque tenemos tres botellas y si las partimos ala mitad en una botella caben dos mitades y en otra caben 2 dos llevamos cuatro mas otras dos mitades son 6 mitades

Respuesta: 6 seis de medio Lto.


Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

Respuesta: Puede llenar 6 botellitos de ½ litro.

En todas estas producciones, que llegan a la respuesta correcta, es interesante observar las distintas aproximaciones a la idea de mitad. En algunos casos es explícita la división de la botella de 1 litro en dos partes; mientras que en otras, el alumno asume que con dos medios litros se forma 1 litro; o suma los medios hasta obtener 3, operación que, probablemente, haya realizado reuniendo $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

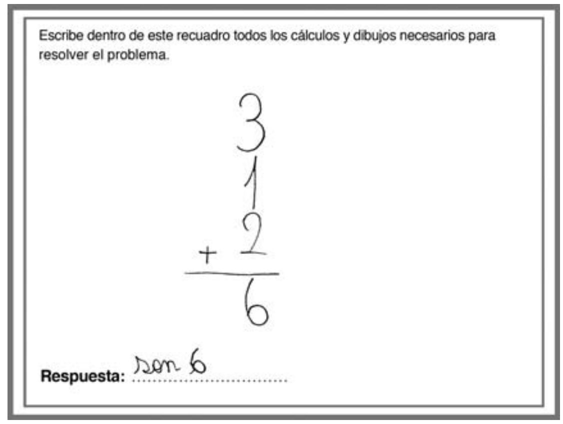
En los primeros años de la escuela, el abordaje de las fracciones es realizado, generalmente, en contextos de medida, recuperando las experiencias de los niños en la vida cotidiana.

La enseñanza de la longitud, la capacidad, el peso o la masa suele organizarse a partir de la realización de comparaciones y mediciones directas con distintos instrumentos de uso social habitual y unidades no convencionales, que incluyen la consideración del metro, el litro, el kilogramo y medios y cuartos de esas unidades. En este contexto es posible establecer equivalencias del tipo:

Si compro 4 paquetes de $\frac{1}{4}$ kg de galletitas compré 1 kg:
para comprar $\frac{3}{4}$ kilos de galletitas puedo pedir un paquete de $\frac{1}{2}$ kg
y uno de $\frac{1}{4}$ kg; ó 3 paquetes de $\frac{1}{4}$ kg.

Aunque no sean abordados todavía los algoritmos, también es posible determinar, por ejemplo, cuánto compraron si tienen $\frac{3}{4}$ kg de galletitas de un tipo y $\frac{1}{2}$ kg de otro. Los niños pueden pensar los $\frac{3}{4}$ como $\frac{1}{2}$ más $\frac{1}{4}$; reunir $\frac{1}{2}$ más $\frac{1}{2}$, y luego agregar $\frac{1}{4}$ más; o descomponer $\frac{3}{4}$ como $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{2}$ como $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, y después reunir 4 cuartos para formar un entero.

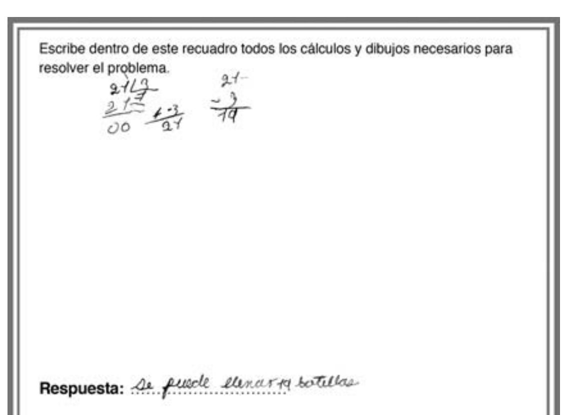
Al analizar las respuestas incorrectas para este problema, aparecen errores que pueden atribuirse a distintas cuestiones. Por ejemplo:

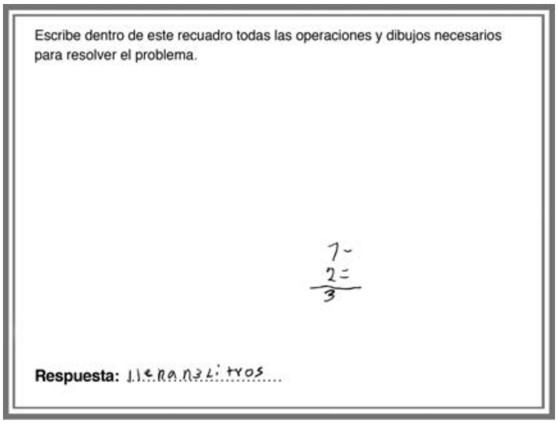


Este niño o niña, seguramente no puede atribuir ningún significado a la escritura $\frac{1}{2}$ y considera los números naturales que aparecen en el enunciado, respondiendo a un ‘contrato’ frecuente para la resolución de problemas en el ámbito de la escuela: “*hay que usar todos los números del enunciado y hacer alguna cuenta con ellos para obtener la respuesta*”. Esta idea, que no es explicitada por los alumnos ni por el maestro, deriva de la presentación reiterada de enunciados en los que –efectivamente– se usan todos los números para resolver el problema, frecuentemente en el orden en el que aparecen.

Al avanzar en la construcción de la idea de número racional, la posibilidad de asociar una escritura fraccionaria a la representación de un número, y no de dos, requiere de un proceso de enseñanza que llevará casi toda la escuela primaria.

Otros estudiantes, que tampoco pueden atribuir significado a la escritura $\frac{1}{2}$, combinan los números naturales que aparecen en el enunciado, relacionándolos con otras operaciones. Aquí vuelve el mandato de hacer alguna cuenta, no se sabe bien cuál, usando los números.





Escribe dentro de este recuadro todas las operaciones y dibujos necesarios para resolver el problema.

7 –
2 =
3

Respuesta: llena n3 litros

La idea de "contrato didáctico" remite a "una relación que determina –explícitamente en una pequeña parte pero sobre todo implícitamente– lo que cada participante, el profesor y el alumno, tiene la responsabilidad de hacer y de lo cual será, de una u otra manera, responsable frente al otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato" (Brousseau,1986).

Este contrato está elaborado sobre lo que el maestro reproduce, conscientemente o no, en su práctica de enseñanza y ayuda al alumno a decodificar lo que la escuela espera de él.

Igualmente este concepto permite advertir que, además de los procesos cognitivos individuales, es posible interpretar el fracaso de algunos niños considerando condicionantes específicos de las situaciones de enseñanza en la escuela. Algunos estudiantes interpretan las tareas propuestas como actividades ritualizadas en las que se repiten modelos de acción.

Los niños ponen en evidencia este contrato cuando le preguntan a la maestra o al maestro "qué hay que hacer" frente a una consigna; cuando afirman que hacen algo de determinada porque "así se lo enseñaron"; o cuando, como en los casos anteriores, responden tratando de ajustarse a una cierta 'regla' que, aún sin haber sido explicitada nunca, regula el trabajo en la clase.

En términos específicos, la comprensión de los números racionales, de sus distintos usos, representaciones gráficas y por medio de expresiones fraccionarias y decimales, y de las formas de cálculo asociadas, requiere un proceso de largo plazo. En particular, en el caso de las expresiones fraccionarias es necesario tener en cuenta que en la vida cotidiana sólo es usado un repertorio limitado de fracciones, y así es todo un desafío coordinar los distintos significados con problemas intramatemáticos para completar el estudio de esta noción.

La posibilidad de avanzar en la comprensión de una noción implica reconocerla en sus distintas representaciones, pudiendo ser elegida la más conveniente, así como pasar de una a otra en función del problema a resolver. Cuando una representación particular es empleada con mucha persistencia de modo asociado a un significado, el aprendizaje queda ligado a ese contexto y los alumnos no pueden reconocer la noción cuando aparece en otro.

A veces, estas diferencias no son advertidas y derivan en ‘errores’ de los alumnos. Por ejemplo, en algunas evaluaciones de sexto grado frente al siguiente problema, aparentemente muy sencillo, es posible observar un porcentaje de alrededor de un 50% de respuestas incorrectas:

PROBLEMA 2
MESAS DE COLORES


15 La tercera parte de las mesas de la escuela de Antonio son verdes y el resto son azules. Si la escuela tiene en total 360 mesas, ¿cuántas hay de cada color?

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

Respuesta: ....

Mesas de colores

Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que involucra el concepto de fracción
Respuesta correcta	120 mesas verdes 240 mesas azules

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	14,89%
Porcentaje de respuestas parcialmente correctas	15,28%
Porcentaje de respuestas incorrectas	50,88%
Porcentaje de omisiones	18,94%

La respuesta considerada correcta es aquella que indica como resultado 120 mesas verdes y 240 azules, mostrando un procedimiento válido, o no presentándolo.

Como parcialmente correctas fueron tomadas aquellas en que el procedimiento de resolución fue adecuado, pero el alumno cometió errores en los cálculos, o al interpretar la respuesta; y aquellas en que el estudiante calculó las mesas de un solo color, realizando un procedimiento incompleto.

En este caso, hay que encontrar la tercera parte de una cantidad de objetos y no de una torta o de un chocolate; y, aunque sepan calcular $360 \div 3 = 120$, tal vez no puedan descomponer ese total e identificar $\frac{1}{3}$ de esa cantidad (120 mesas) y $\frac{2}{3}$ (240 mesas) si no trabajaron antes con situaciones de ese tipo.

Al abordar las fracciones, la idea de “parte” no siempre está vinculada explícitamente con la división. Apoyarse en los conocimientos que los niños tienen sobre ella permite iniciar el trabajo con fracciones y ligarlas al resultado exacto de una división entre números naturales, presentando situaciones en las que las fracciones expresan el resultado de un reparto; por ejemplo, cuando 4 niños deciden compartir 3 chocolates. Esto también permite trabajar a la vez con fracciones mayores que uno.

Ejemplo 1

Los problemas de reparto, en los que tiene sentido indagar una situación de partes equitativas, pueden dar lugar a una diversidad de procedimientos.

Los niños pueden recurrir a distintas formas de repartir y distribuir porciones y discutir acerca de la noción de equivalencia de las partes.

> *En una mesa de un bar se sientan 4 personas y piden, para compartir, tres pizzas chicas. En otra mesa, piden 4 pizzas chicas pero son 5 comensales. ¿En qué mesa come más cada persona?*

Esto también puede dar lugar considerar la relación entre las pizzas repartidas y el número de comensales, así como el tamaño y número de las partes. Más adelante, esta reflexión será un punto de apoyo para interpretar $\frac{a}{b}$ como el resultado del cociente entre el número a y el número b.

Tal como ocurre con cualquier noción matemática, el sentido de la noción de número racional se construye a partir de los problemas que van enfrentando los alumnos y que no pueden ser resueltos usando los números naturales.

Para el caso de las expresiones fraccionarias, es frecuente que el trabajo comience usando la idea de partes de un todo dividido en porciones iguales: esto permite abordar las relaciones entre el tamaño y el número de las partes con fracciones menores que uno; pasar luego a la suma y a la resta con fracciones del mismo denominador y, después, a las de distinto denominador.

En los problemas en contextos de medida esta progresión es prescindible, ya que el uso de equivalencias y de estrategias de cálculo mental permite resolver, sin conocer los algoritmos para operar con fracciones de distinto denominador.

Ejemplo 2

Tal como fue señalado, es posible calcular $\frac{3}{4}$l + $\frac{1}{2}$l, pensando de $\frac{3}{4}$l equivale a $\frac{1}{2}$l + $\frac{1}{4}$l; o a 3 veces $\frac{1}{4}$l, y que $\frac{1}{2}$ litro son dos cuartos litros, teniendo control sobre el resultado. Es más, incluso se pueden presentar situaciones problemáticas que involucran distintas operaciones y/o diferentes significados de las mismas, con el objeto de analizar los límites de la utilización de cada una de ellas.

En una panadería quedaron 4 bolsas de $\frac{1}{2}$ kg de pan y 9 bolsitas de $\frac{1}{4}$ kg. El pan que sobra es envasado en bolsas de 5 kg para secar y usar en otras preparaciones. ¿Alcanza con lo que tienen o necesitan más para llenar una bolsa de 5 kg?

Otro día, habían quedado del día anterior 7 bolsas de $\frac{3}{4}$ kg, ¿les alcanza para completar los 5 kg?

El ayudante que arma las bolsas tiene una bolsa de $\frac{3}{4}$ kg, otra de $\frac{1}{2}$ kg, otra de 1 kg y una chiquita de $\frac{1}{4}$ kg. ¿Cuánto le falta para completar los 5 kilos?

En estos casos, es posible resolver apoyándose en la suma, y retomar un significado de la multiplicación con el que los alumnos ya están familiarizados, para ir construyendo los primeros procedimientos de cálculo de dobles o mitades, triples, etc.

También habrá que considerar situaciones de partición en las que, dado el valor de cada parte es necesario averiguar la cantidad de partes en las que puede subdividirse el total; como, por ejemplo, cuando hay que determinar cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ litros pueden llenarse con 5 litros.

Ejemplo 3

En un almacén se vende aceite que viene de bidones de 5 litros, fraccionándolo en botellas de $\frac{3}{4}$ litros. ¿Cuántas botellas se deberán utilizar por cada bidón?

También es posible presentar varias preguntas que requieran considerar nuevas fracciones y expresiones decimales.

En un establecimiento en el que producen aceite de oliva hay un tanque con 35 litros de aceite. Para su venta, se decide usar distintos envases. ¿Cuántos son necesarios para envasar esa cantidad de aceite si usan envases de $\frac{3}{4}$ litros, de $\frac{1}{2}$ litro, de $\frac{1}{4}$ litro o de 0,2 litro?

Resulta interesante considerar con los alumnos qué cálculos conviene realizar antes que otros, para apoyarse en los resultados obtenidos, lo que permite explicitar relaciones entre fracciones o entre fracciones y expresiones decimales.

La ampliación del trabajo sobre la medida con actividades que requieran medir o construir segmentos y con propuestas en las que haya que trabajar sobre la recta numérica, y el estudio de situaciones en las que las fracciones expresen constantes de proporcionalidad, permitirá ir conociendo la multiplicidad de significados del número racional. Dado que estos significados no pueden ser abordados al mismo tiempo, será importante articular el tratamiento de los mismos en los distintos grados de la escuela.

Ejemplo 4

Pueden ser propuestas actividades que involucran mediciones de longitudes y de áreas, en las que la cantidad elegida como unidad no esté contenida un número entero de veces en la cantidad a medir, lo que lleva a explicitar la insuficiencia de los números naturales para expresar los resultados.

Si el segmento AB es la unidad que se usa para medir, ¿cuál es la medida de CD y de MN?

Dibujar segmentos cuyas medidas resulten:

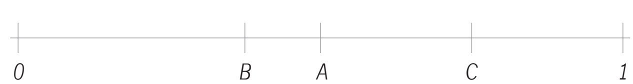
a. 2 y $\frac{1}{4}$ *de AB.* *b. 1 y* $\frac{5}{4}$ *de AB.*

Dibujar el segmento unidad, sabiendo que el segmento BC mide $\frac{1}{3}$ *de la unidad;*

Dibujar el segmento unidad, sabiendo que el segmento BC mide 2 y $\frac{1}{2}$ *de la unidad*

Marcar en la recta numérica $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$.

¿A qué número corresponde A? ¿y B y C?



Al resolver estos problemas los alumnos suelen medir con la regla, sin tener en cuenta que, en algunos casos, es posible obtener la unidad repitiendo la parte conocida como dato, y sin conocer su longitud.

Al trabajar con actividades donde lo pedido es representar en la recta numérica, hay que tener en cuenta si la longitud del segmento unidad (ya sea en cm o en ‘cuadraditos’, en caso de usar papel cuadriculado) es o no múltiplo de los denominadores de las fracciones que se quiere representar, y si están dadas las posiciones del 0 y el 1, ó del 0 y otro número, ya que la dificultad podría ser muy distinta en un caso u otro.

Cajas con dulces/caramelos

Grado	Tercer grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema en el campo aditivo y entre números naturales.
Respuesta correcta	20 dulces de uva

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	25,96%
Porcentaje de respuestas parcialmente correctas	3,82%
Porcentaje de respuestas incorrectas	58,63%
Porcentaje de omisiones	11,58%

PROBLEMA 3
CAJA CON DULCES/CARAMELOS

23 En una caja hay 50 dulces: 25 de naranja, 5 de limón y el resto de uva. ¿Cuántos dulces de uva hay?

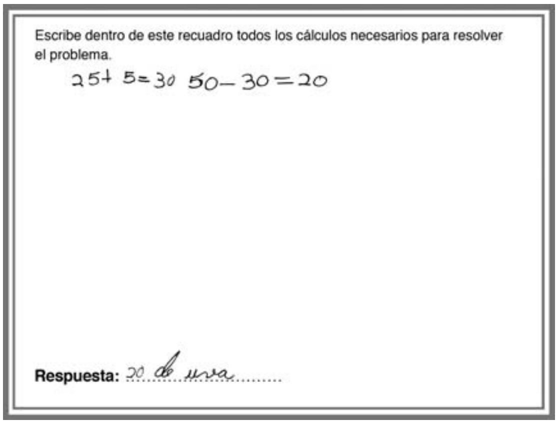
Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos necesarios para resolver el problema.

Respuesta: ....

Fue considerada correcta la respuesta del estudiante que contestó ‘20 caramelos’ o solamente ‘20’, y mostró un procedimiento válido para su resolución, aunque pudo haber llegado al resultado correcto efectuando cálculos mentales dado que los números del problema lo permiten.

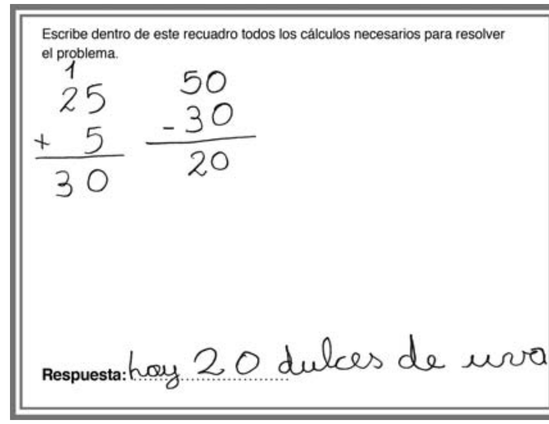
Si el alumno mostró un procedimiento matemático adecuado pero llegó a un resultado incorrecto por errores en el cálculo o hizo el tratamiento correcto solamente de una parte de la tarea y dio una respuesta parcial o no dio respuesta, su contestación fue considerada parcialmente correcta.

La pregunta permitía distintas formas de resolución, con cálculos sencillos que pueden hacerse mentalmente. Las siguientes son todas respuestas correctas:


Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos necesarios para resolver el problema.

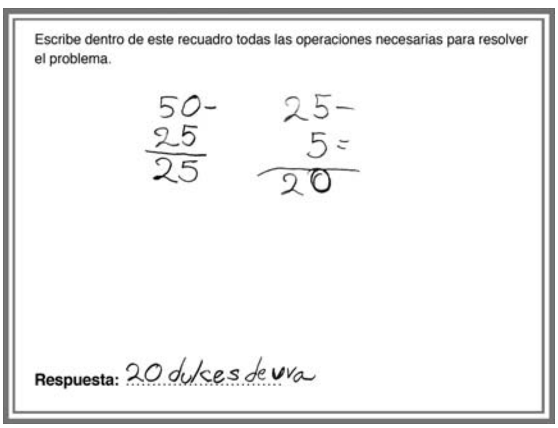
25+ 5=30 50−30=20

Respuesta: 20 de uva


Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos necesarios para resolver el problema.

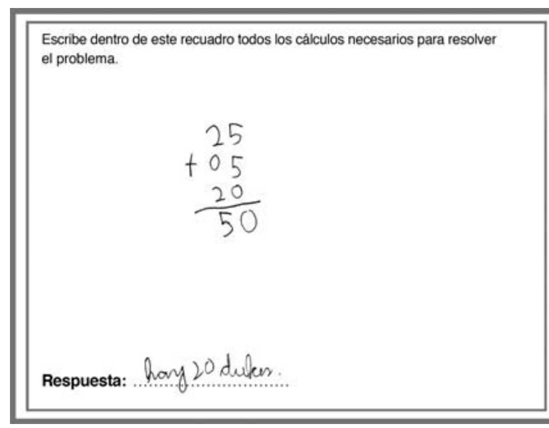
$$\begin{array}{r} {}^{1}\\ 25 \\ +\ 5 \\ \hline 30 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \\ -30 \\ \hline 20 \end{array}$$

Respuesta: hay 20 dulces de uva


Escribe dentro de este recuadro todas las operaciones necesarias para resolver el problema.

$$\begin{array}{r} 50- \\ 25 \\ \hline 25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25- \\ 5= \\ \hline 20 \end{array}$$

Respuesta: 20 dulces de uva


Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos necesarios para resolver el problema.

$$\begin{array}{r} 25 \\ +05 \\ 20 \\ \hline 50 \end{array}$$

Respuesta: hay 20 dulces.

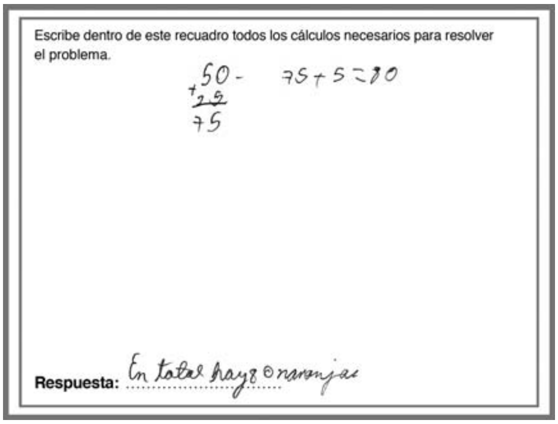
Sin embargo, como puede verse en la ficha de este ítem, llama la atención el alto porcentaje de respuestas incorrectas, dado que la situación está en un contexto muy familiar para los niños y tiene números que no debieran presentar obstáculos en tercer grado. Cabe preguntarse, entonces, ¿cuál es la dificultad?

En algunos casos, los alumnos comprenden el enunciado pero cometen errores de cálculo como este:

$$\begin{array}{r} 50 \\ -25 \\ \hline 35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \\ -\ 25 \\ \hline 30 \end{array}$$

Otras producciones incluyen respuestas parciales, lo que podría atribuirse a la falta de familiaridad con problemas cuya resolución involucre más de un paso, o más de una operación.

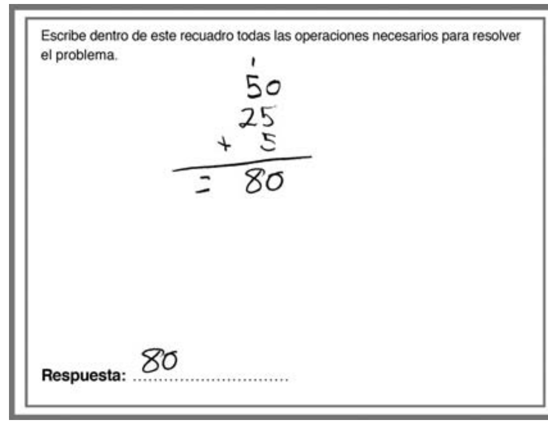
En otras, los niños suman todos los números que aparecen en el enunciado, buscando "el total", sin distinguir si se trata de caramelos/dulces de un gusto o de otro, o de la clase genérica caramelos /dulces.



Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos necesarios para resolver el problema.

50 - 75 + 5 = 80
+25
75

Respuesta: En total hay 80 naranjas

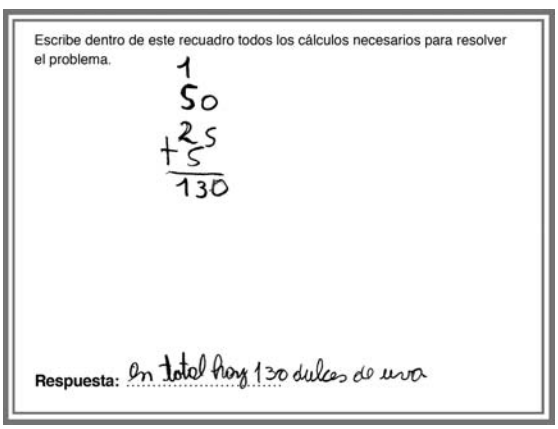


Escribe dentro de este recuadro todas las operaciones necesarios para resolver el problema.

1
50
25
+ 5
= 80

Respuesta: 80

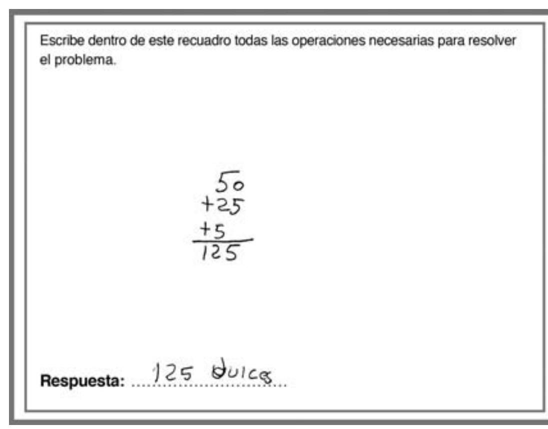
Frente a la siguiente suma algunos niños, que debieran poder resolver mentalmente asociando, por ejemplo, 25 más 5, se equivocan cuando encolumnan:



Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos necesarios para resolver el problema.

1
50
25
+5
130

Respuesta: En total hay 130 dulces de uva



Escribe dentro de este recuadro todas las operaciones necesarias para resolver el problema.

50
+25
+5
125

Respuesta: 125 dulces

La presentación temprana de la sumas en columna ofrece dificultades a muchos niños que aún no dominan la estructura del sistema de numeración. Si primero suman “sin llevar / sin dificultad / sin agrupamientos”, y organizan la cuenta encolumnando, no hay diferencia entre sumar números de una o de más cifras.

Si bien esta organización en columnas es necesaria para números de más cifras, es importante que los niños dispongan de distintas estrategias de cálculo.

$$\begin{array}{r} 123 \\ +\,211 \\ \hline 334 \end{array} \quad \textit{es como sumar} \quad \begin{array}{r} 1 \\ +2 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ +\,1 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ +\,1 \\ \hline 4 \end{array}$$

Así, es frecuente que los niños no tomen conciencia de las cantidades involucradas, y no tengan control sobre los resultados. Al poder manejar, en función de los números involucrados, distintas estrategias apoyadas en distintas descomposiciones y en el uso de las propiedades de las operaciones, son fortalecidas las habilidades de cálculo mental. Por ejemplo:

25 + 35 = 10 + 50 = 60	*17 + 25 = 15 + 25 + 2*
5 + 5 + 20 + 30	*17 + 3 + 22*
25 + 25 + 10	*10 + 20 + 5 + 5 + 2*

Del mismo modo, para calcular 200 + 600 ó 200 + 60 no hace falta encolumnar. Es posible sumar mentalmente, tomando en cuenta los nombres de los números –doscientos más seiscientos, ochocientos; doscientos más sesenta, doscientos sesenta– y registrar la cuenta con un cálculo:

Apoyarse en el conocimiento de la serie oral y en las descomposiciones aditivas resulta de gran ayuda para iniciar a los niños en los procedimientos de cálculo, brindándoles la oportunidad de tener un mayor control sobre los resultados que obtienen.

200 + 600 = 800   *200 + 60 = 260*

Además de los problemas ligados a la suma en columnas, hay aquí un tema interesante para indagar en relación con el enunciado y los significados que pueden atribuir los niños al uso de la suma y de la resta, ya que cada noción matemática resuelve un cierto conjunto de problemas; pero no tiene el mismo significado en todos los casos.

Este problema presenta cantidades de tres clases distintas –caramelos de naranja, caramelos de limón y caramelos de uva– reunidos en otra clase: caramelos. Si pensamos en utilizar una suma (20 + 5 más cuánto da 50) usamos la suma con sentido de reunir; y si pensamos en una resta (50 – 30) se trata de una diferencia.

Sin embargo, es frecuente que en las aulas y en los textos escolares aparezcan problemas que aluden a otros significados para introducir y ejercitar sumas y restas. En general, el trabajo está apoyado en aumentos y disminuciones de cantidades, ligados a las ideas de agregar y quitar:

Tenía 25 caramelos y me regalaron 5, ¿cuántos tengo ahora?
Tenía 30 caramelos y regalé 5, ¿cuántos me quedaron?

En estos casos hay un estado inicial, una transformación (positiva o negativa) y un estado final; pero siempre dentro del mismo tipo de cantidades (X caramelos + X caramelos = X caramelos). La transformación da cuenta de una modificación de la cantidad, la que ocurre en un cierto tiempo (hay un antes y un después) y hay palabras que refuerzan este modelo (tenía, tengo, regalé, me quedaron).

En cambio, en el problema del ítem ‘no ocurre nada’ ni hay ‘palabras clave’: existe una situación descripta en términos de relaciones de inclusión entre clases de distintos objetos la que, tal vez, no haya sido suficientemente explorada antes por los niños.

En otros ítems con la misma estructura en que la resta es usada para averiguar un complemento dados la cantidad de elementos de la clase total y la cantidad de elementos de una subclase, solo la tercera parte de los niños respondió correctamente, aunque en unos casos los números son de dos cifras, terminados en 0 ó 5; y en otros son de tres cifras. Sin embargo en un ítem que pregunta cuántos puntos ‘le faltan’ a un jugador para alcanzar a otro, casi el 70% respondió correctamente, aunque el cálculo presentaba más dificultad que en los casos anteriores.

El sentido de cada operación es construido por medio de la variedad de problemas que los niños van resolviendo, y si sólo han realizado problemas en los que se agrega, se gana, se aumenta, ese será de momento el sentido que puedan atribuirle a la suma.

En otros casos, en los que es preciso usar la suma para averiguar un total que resulta de reunir las figuritas que tienen distintos niños, en un contexto sumamente familiar e indicando que ‘se juntan todas’, hay un porcentaje significativo de respuestas correctas (59,2%) y los otros porcentajes son atribuibles a errores en la operación. Sólo hay un 3% de omisiones que podría no haber detectado que se trataba de sumar para responder.

Ejemplo 1

A partir de una misma situación inicial es factible proponer distintas preguntas:

> *En una caja se juntan los lápices que se pierden en el aula. Ahora hay 12 lápices negros de distintos tamaños y formas y 15 lápices de colores, ¿cuántos lápices hay en la caja?*
>
> *Si 6 chicos sacan 1 lápiz negro y uno de color cada uno, ¿cuántos quedan de cada tipo?*
>
> *Ahora hay 27 lápices: si 15 son de colores y el resto son negros, ¿alcanzan los lápices negros para dar uno a cada uno de los 17 alumnos de la clase?*
>
> *Había 15 lápices de distintos tamaños y formas y hoy se agregaron 12 más, ¿cuántos lápices hay ahora en la caja?*
>
> *En el primer recreo, la maestra recogió 4 lápices que estaban en el suelo y luego se juntaron 2 más. Si al final del día había 15 lápices, ¿cuántos habían quedado el día anterior?*

Un aporte importante para la comprensión de esta variedad de significados, tanto para el campo aditivo como para el multiplicativo, es el que hace Vergnaud (1990) a partir del desarrollo de la teoría de los campos conceptuales.

Esta teoría plantea una explicación sobre el modo en que los alumnos establecen relaciones matemáticas al interactuar con la realidad, en diferentes contextos. Denomina 'campo conceptual' al conjunto de situaciones que requieren para su resolución una misma noción, o una combinación de nociones asociadas a ella, y como 'tareas matemáticas' al conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizarlas.

Por ejemplo, el 'campo conceptual' de las estructuras aditivas incluye el conjunto de situaciones que requieren una adición, una sustracción o una combinación de dichas operaciones. Son elementos constitutivos de las estructuras aditivas los conceptos de cardinal y de medida, de transformación temporal por aumento o disminución (perder o gastar 5 monedas), de relación de comparación cuantificada (tener 3 bombones o 3 años más), de composición binaria de medidas (¿cuánto en total?), de composición de transformaciones y de relaciones, de operación unitaria, de inversión, de número natural y número relativo, de abscisa, desplazamiento orientado y cantidad.

En un conjunto de problemas, y desde el punto de vista de la enseñanza, la noción de 'campo conceptual' permite considerar una clasificación que reposa sobre el análisis de las tareas cognitivas, su jerarquía de dificultades y diferentes significados posibles. Así, un currículo escolar debiera contemplar para cada noción considerada como central, un recorrido de los alumnos por la resolución de problemas de todas las clases. Del mismo modo, debe enfrentados a diferentes tipos de tareas, a fin de ir construyendo el sentido de la noción en juego.

Ejemplo 2

Aún manteniendo el mismo significado, por ejemplo el de quitar, es posible complejizar las situaciones haciendo otras preguntas:

> *El salón de actos de una escuela tiene 160 localidades. Se prepara el acto de egresados para los alumnos de séptimo grado y las entradas vendidas irán en beneficio de la Cooperadora. Si por la mañana hay vendidas 45 entradas, ¿cuántas entradas es posible vender antes del acto?*

Aquí se trata de averiguar la cantidad final luego de una transformación que, en este caso, es negativa. Entonces, es un problema donde la resta es usada con significado de quitar.

Pero también es posible preguntar por el estado inicial, conociendo la transformación negativa y el estado final:

> *Sabiendo que están reservadas 45 entradas y que aún hay 115 para vender. ¿Es posible averiguar cuántas localidades tiene el salón de actos?*

Otra modificación podría ser la que sigue, cuya solución consiste en buscar el valor de la transformación:

> *En el salón hay 160 localidades y al mediodía aún hay 115 entradas sin vender ¿Cuántas se vendieron durante la mañana?*

También es posible presentar otros problemas con dos transformaciones, para analizar sus diferencias. Estos problemas no aparecen con frecuencia y pueden resultar difíciles aún para alumnos de quinto o sexto grado enfrentados a ellos por primera vez.

Ejemplo 3

> *En un juego de cartas, Andrés pierde 123 puntos en la primera ronda y gana 64 puntos en la segunda ronda. ¿Con qué puntaje terminó en el juego?*

> *Analía pierde en la primera ronda 123 puntos, y dice que entre esa ronda y la segunda perdió en total 70 puntos ¿Qué le pasó en la segunda ronda?*

En el primer problema hay que averiguar el resultado de la composición de dos transformaciones: una es negativa (pierde 123); y la otra, positiva (gana 64).

Para componer las dos es posible pensar en 123 – 64 ó 64 – 123.

En el segundo problema, aparece el resultado de dos transformaciones compuestas (perdió en total 70 puntos) y el de una de ellas (perdió 123 en la primera ronda) y hay que averiguar cuál es la otra transformación (qué pasó en la segunda ronda). Si lo que perdió en total es menos que lo que perdió en la primera ronda es porque en la segunda tuvo que ganar, y para saber cuántos puntos obtuvo pensamos en 123 – 70.

Ejemplo 4

> *Para ganar a un juego de cartas se necesita llegar a 1000. Si tengo 850 puntos, ¿cuántos me faltan para ganar?*

Los alumnos pueden resolver un problema de este tipo usando procedimientos distintos: algunos pueden pensar cuánto le falta a 850 para llegar a 1000 calculando mentalmente, por ejemplo, 850 + 50 = 900; 900 + 100 = 1000; y otros pueden restar. Pero si los números no terminaran en ceros, es probable que más decidan restar.

En la medida en que los estudiantes resuelvan los problemas con distintos procedimientos, y el maestro promueva la reflexión sobre lo realizado, es posible avanzar en la explicitación de los procedimientos de cálculo utilizados. Si al resolver el problema anterior todos los alumnos suman, el docente podrá preguntar si era posible hacer una resta para llegar al resultado.

Otras situaciones pueden ser útiles para poner en evidencia las relaciones entre suma y multiplicación. Muchas veces hay problemas que se pueden resolver con una suma o una multiplicación; pero, en otros casos, la multiplicación no puede pensarse como suma de sumandos iguales.

Ejemplo 5

Además de pedir resolver problemas, es posible proponer situaciones para analizar.

> *La maestra de Julián le pidió inventar un problema que se resolviera calculando 4 x 4. Julián escribió este problema: "Mi papá tiene 4 destornilladores, 4 martillos, 4 sierras y 4 pinzas. ¿Cuántas herramientas tiene mi papá?" ¿Responde a lo que le pidió su maestra?*

Este niño, seguramente, resuelve 4 x 4 haciendo 4 + 4 + 4 + 4; pero cuando se suma con significado de reunir, no tiene sentido expresar esa suma como multiplicación, aunque los sumandos sean iguales. Este es un ejemplo interesante que muestra algunos obstáculos derivados de la enseñanza de la multiplicación a partir de sumas descontextualizadas de sumandos iguales y no de la presentación de problemas asociados a la proporcionalidad.

Al planificar la enseñanza de las operaciones no hay que perder de vista los distintos usos de las mismas. Por una parte, hay que decidir cómo ir introduciendo los distintos significados[5] para ofrecer un abanico cada vez más amplio de posibilidades; y, por otra, será necesario asegurarse que los problemas con los que se evaluará retomen usos ya vistos, para no sorprender a los alumnos con una situación que no podrían reconocer.

Asimismo habría que tener presente que el trabajo de resolución de problemas implica un proceso de modelización, frente a una situación que –en principio– aparece como compleja y de resolución no inmediata para los alumnos.

Frente a un problema es necesario analizar la información disponible para identificar, en función de la pregunta que es necesario responder, cuáles son los datos que se usarán y qué modelo permite relacionarlos para elaborar un procedimiento.

5 *Para ampliar estas ideas es posible consultar: Broitman, Claudia. Las operaciones en el primer ciclo. Novedades Educativas. Buenos Aires, 2000.*
Ponce, Héctor. Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el segundo ciclo. Novedades Educativas. Buenos Aires, 2000.

Luego, habrá que analizar tanto la adecuación de la respuesta obtenida, en relación con el problema, como la pertinencia y economía del modelo utilizado.

Por ejemplo, frente a un problema en que se busca saber –haciendo la cuenta mentalmente– cuánto hay que cobrar a tres personas que van juntas a comer a un restaurante y consumen lo mismo, luego de identificar los precios sería posible usar distintos modelos:

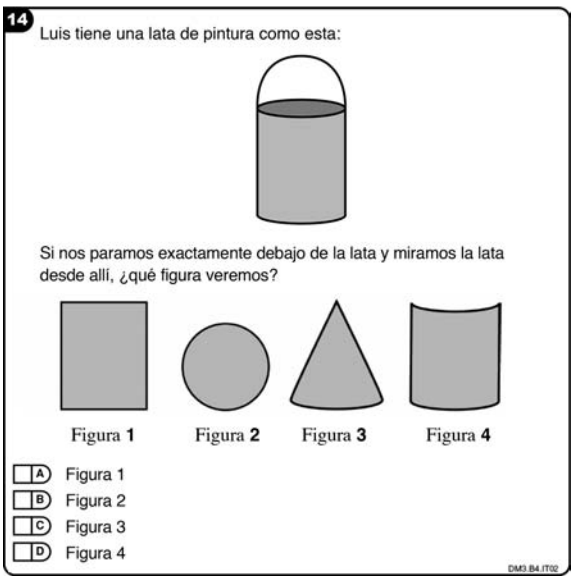
- sumar los precios de todos los platos y bebidas consumidos,
- sumar lo que consume cada uno y multiplicar por tres, o
- multiplicar por tres el valor de cada comida, el valor de cada bebida y sumar los subtotales.

El primer procedimiento usa sólo un modelo aditivo, mientras que en los otros aplica suma y multiplicación. Elegir uno u otro de los procedimientos pertinentes depende tanto de los números puestos en juego como de los conocimientos de quien realiza el cálculo.

SOBRE EL DOMINIO GEOMÉTRICO

Al igual que en el caso anterior, en relación con los contenidos de este dominio consideraremos problemas de ambos grados.

PROBLEMA 1
MIRAMOS UNA LATA DE PINTURA



Miramos una lata de pintura

Grado	Tercer grado de primaria o básica
Acción o tarea a realizar	Interpretar la representación plana de un objeto tridimensional
Respuesta correcta	B : Figura 2

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	35,50%
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 7,73% C : 5,58% D : 48,79%v
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	2,39%

El problema de la representación, en dos dimensiones, de objetos de tres dimensiones es todo un desafío para los niños pequeños, ya que para ellos todavía es difícil distinguir entre dibujar lo que saben de un cuerpo y lo que efectivamente ven desde una posición determinada.

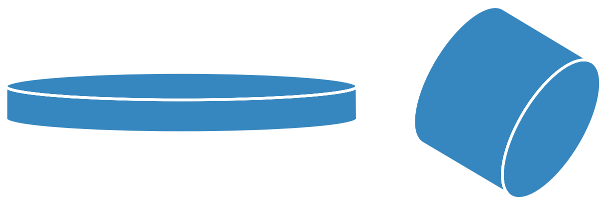
Asimismo resulta difícil interpretar representaciones planas de objetos tridimensionales cuando no ha sido explorado antes cómo 'se ve' un cuerpo desde diferentes puntos de vista y cuáles de las características observadas permiten reconocer el objeto.

El 35,50% de los estudiantes de tercero respondió correctamente; pero el 49% eligió la opción D. A estos niños les ha resultado muy difícil pensar en el cuerpo del que se trata, en las formas del mismo y en lograr despegarse de lo que "ven" ubicándose de frente a él.

Es probable que los niños que no resuelven bien el ítem no hayan participado de suficientes experiencias en las que es descrito o representado un objeto desde distintos puntos de vista. Asimismo, las ilustraciones en los libros de texto habitualmente presentan los cuerpos y las figuras en posiciones y vistas ‘clásicas’, y manteniendo ciertas proporciones entre sus elementos.

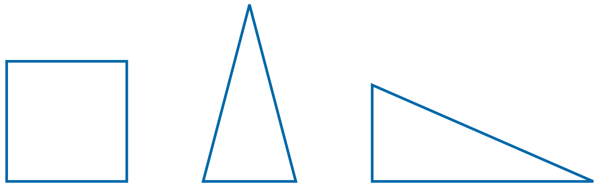
Así por ejemplo para un cilindro, no es frecuente encontrarse con imágenes como las siguientes:

FIGURA 3



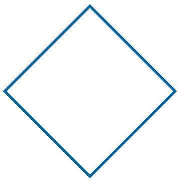
Del mismo modo los cuadrados, frecuentemente, aparecen con sus lados paralelos a los bordes de la hoja; los triángulos isósceles, con el lado menor horizontal sobre un renglón; y los triángulos rectángulos, con un cateto horizontal.

FIGURA 4



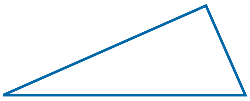
Por esta razón, muchos niños que no han independizado las propiedades de una figura de la posición de los dibujos que las representan dicen, por ejemplo, que:

FIGURA 5



“*Es un rombo*” (sin estar refiriéndose a la inclusión de que todo cuadrado es un rombo)

FIGURA 6



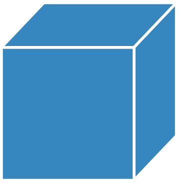
“*Es un triángulo acutángulo*”, pues nunca han visto al ángulo recto en esa posición.

Volviendo al caso de las representaciones planas de objetos tridimensionales, proponer a los niños dibujar desde distintos puntos de vista una construcción realizada con bloques de madera, una caja o un modelo de madera de un cuerpo geométrico, permite discutir frente a producciones realizadas por qué los dibujos son distintos aunque sean del mismo objeto, y analizar si el dibujo brinda suficiente información sobre las características del mismo.

En el caso de los poliedros, además de las exploraciones realizadas sobre objetos reales, en la clase son utilizados libros de texto con representaciones que responden a las reglas de la perspectiva y que deben ser interpretadas por alumnos que las desconocen.

Así, retomando lo dicho, lo que 'se ve' en el dibujo no responde a las características del cuerpo.

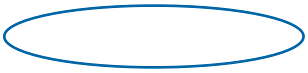
FIGURA 7



Por ejemplo, en este dibujo que representa un cubo las caras no son todas cuadradas.

En el caso del ítem analizado (tarro de pintura), el maestro podría proponer a los niños que discutieran si la siguiente figura podría ser una respuesta adecuada y por qué.

FIGURA 8

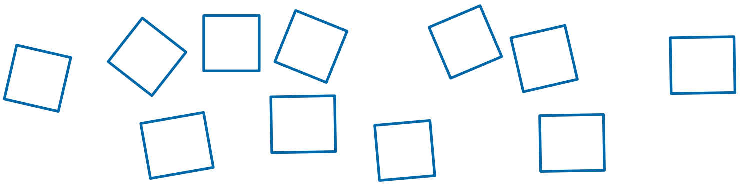


Otras actividades que contribuyen a este conocimiento son las que involucran anticipar qué recortes de papel (cuántos y de qué formas) son necesarios para forrar una caja de cartón o diseñar los moldes de cartón para construir modelos de tres dimensiones anticipando qué características debería tener ese molde.

Realizar experiencias de dibujo y de interpretación de dibujos, discutiendo qué información sobre el objeto aporta cada imagen favorecerá tanto la capacidad de producir e interpretar representaciones, como el conocimiento de las propiedades de los cuerpos geométricos.

Ejemplo 1

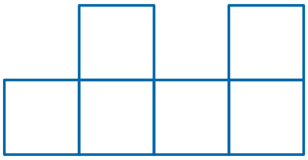
Margarita tiene que forrar un cubo y tiene estos recortes de papel, ¿cuáles puede usar?



Luego, es posible comparar diseños, analizarlos y argumentar acerca de su pertinencia.

Ejemplo 2

Margarita pegó los papeles antes de forrar el cubo pero no pudo armarlo, ¿Por qué?



¿De qué otras formas podría haberlos pegado?

Es posible realizar las primeras experiencias con cajas de cartón con formas de prismas con base rectangular o cuadrada y cubos, y luego analizar qué se debe medir cuando las caras no son todas cuadradas o rectangulares trabajando, por ejemplo, con cilindros, prismas de base triangular o pirámides.

Frecuentemente, los docentes limitan la variedad de cuerpos que presentan a aquellos sobre los que quieren focalizar la atención. Sin embargo, la posibilidad de caracterizarlos requiere de los contrastes ya que, por ejemplo, es difícil advertir cómo varían la forma y la cantidad de caras laterales de los prismas si no se explora modelos con distintas bases.

Ejemplo 3

Es posible hacer un juego en el que el maestro coloca un modelo de madera en una bolsa opaca, sin que los niños vean su forma.

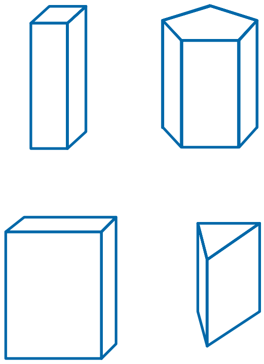


FIGURA 9

Luego, le pasa la bolsa a un alumno para que por medio del tacto y de la afirmación o negación responda las preguntas que hacen sus compañeros, quienes deben descubrir qué cuerpo está escondido.

De manera similar para las figuras, los docentes muchas veces solo presentan rectángulos, cuadrados y triángulos equiláteros. Sin embargo, para reconocer los ángulos rectos en el cuadrado y en el rectángulo es necesario compararlos con cuadriláteros que no los posean, aunque el estudio en profundidad de la clase de los paralelogramos se haga más adelante.

Ejemplo 4

El mismo juego de adivinanza puede ser hecho con una colección de figuras como la siguiente.

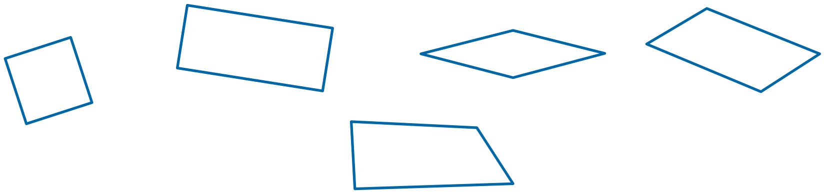


FIGURA 10

Algunos maestros señalan que los alumnos no conocen los nombres de estas figuras; pero embargo los niños utilizan espontáneamente expresiones que les permiten identificarlos: 'parece un barrilete[6]', 'tiene las

6 *Cometa, volantín, entre otras acepciones.*

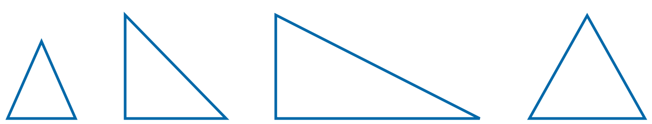
puntas estiradas', etc., las que pueden ser usadas porque el vocabulario específico está reservado para un repertorio más acotado.

Las actividades que resuelvan los niños gracias al uso de modelos debieran apuntar no sólo a una exploración empírica de las características de cuerpos y figuras sino que también debiera ser promovido el establecimiento de nuevas conclusiones a partir de la reflexión sobre los resultados de esas exploraciones.

Ejemplo 5

Proponer a los niños que armen cuadriláteros combinando pares de triángulos. Los maestros pueden ofrecer los triángulos recortados en papel, de modo que haya suficiente cantidad de cada uno.

¿Cuántos cuadriláteros distintos es posible armar combinando dos de estos triángulos?

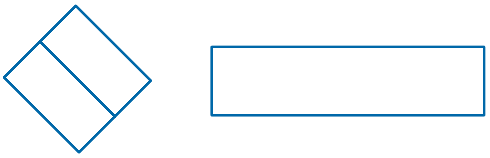


Así como para los cuerpos se propone dibujarlos desde distintos puntos de vista para articular las características que aparecen en cada dibujo, en el caso de las figuras es necesario variar las posiciones en las que éstas son representadas y los papeles (lisos, cuadriculados, sobre una base de triángulos) e instrumentos utilizados para hacerlo.

Después de armar todos los cuadriláteros posibles combinando dos triángulos, y de discutir qué cuadriláteros se forman y por qué, se podría preguntar, por ejemplo, si es posible armar un cuadrado usando triángulos que tienen sus tres lados iguales y determinar que las diagonales de un cuadrado miden 'un poco más' que los lados.

Ejemplo 6

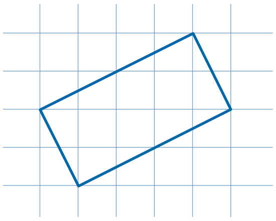
Copiar las siguientes figuras y registrar qué datos tuvieron en cuenta al hacerlo.



En este caso, los datos considerados pueden variar al usar papel cuadriculado y regla, o papel liso y escuadra o transportador.

El apoyo del papel cuadriculado permite que al construir un rectángulo se atienda a la congruencia o no de lados y a las relaciones de paralelismo o perpendicularidad, sin que la construcción de los ángulos rectos aparezca como un impedimento; sin embargo, si esta construcción siempre es realizada así, más que las propiedades de una figura los niños aprenden las características de un dibujo, ligadas perceptivamente a *una* posición y a *una única* forma de representar. Por ejemplo, algunos niños tienen dificultades para reconocer que la figura 11 es un rectángulo.

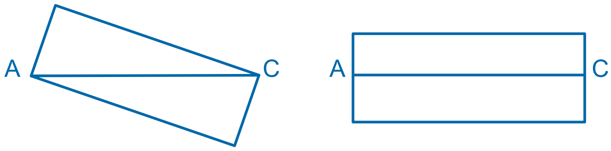
FIGURA 11



Estas dificultades se reiteran, aún en sexto grado, al pedir dibujar sobre papel liso, y usando una escuadra, un rectángulo ABCD, dada la diagonal AC, cuando no resulta oblicua en relación con los bordes de la hoja en uso.

Así en lugar de una construcción como la (1) aparecen producciones como la (2), tal como muestra la figura 12.

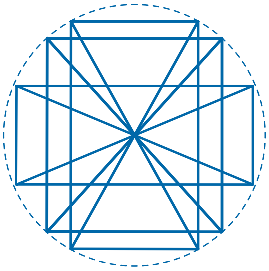
FIGURA 12



Cabe aclarar aquí que muchos de los alumnos que realizan la construcción (1) no advierten que el rectángulo que dibujan no es el único posible, ya que habitualmente utilizan una proporción 2:3 o 2:4 entre los lados. Es preciso todo un trabajo intencional para descubrir que, dada la diagonal, es posible construir tantos rectángulos distintos como se desee.

En la medida en que los docentes presenten actividades de construcción con distintas figuras, los alumnos aprenderán a seleccionar el instrumento más adecuado para resolver el problema.

FIGURA 13



Otras actividades ponen en juego las propiedades de las figuras, para analizar si es posible o no construir una o más figuras a partir de ciertos datos.

Ejemplo 7

a) Decidir, para cada uno de los siguientes casos, si a partir de la información disponible, se pueden construir varios, uno o ninguno de los rectángulos pedidos:

I. un rectángulo que tenga un lado de 4 cm.
II. un rectángulo que tenga dos lados de 4 cm.
III. un rectángulo que tenga una diagonal de 8 cm.
IV. un rectángulo cuyo perímetro mida 16 cm.
V. un rectángulo con diagonales perpendiculares

b) En los casos en que sea posible construir más de una figura, modificar los datos para que sea posible construir una única figura.

Esta actividad exige que, a partir de las condiciones dadas, los alumnos anticipen las construcciones posibles y, sobre todo, determinen si se trata de una única figura o no. Será importante promover no sólo la anticipación, sino la justificación de sus afirmaciones. Después de una puesta en común es posible registrar las propiedades del rectángulo puestas en juego.

Círculo y rectángulo

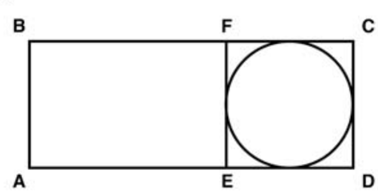
Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema geométrico que requiere usar propiedades del rectángulo y del círculo.
Respuesta correcta	C : 6 cm

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	39,26 %
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 12,73 % B : 16,64% D : 26,70 %
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	4,68 %

PROBLEMA 2
CÍRCULO Y RECTÁNGULO

14 En el rectángulo **ABCD**, **AD** mide 10 cm y el radio del círculo es de 2 cm.



¿Cuánto mide el segmento **AE**?

- A 4 cm
- B 5 cm
- C 6 cm
- D 8 cm

DM3.B4.IT02

Este ítem pone en juego las relaciones entre el radio del círculo, su diámetro y la longitud de los lados de dos rectángulos.

El porcentaje de respuestas correctas (casi 40%) no resulta del todo satisfactorio ya que sólo se trata de identificar la longitud del segmento AE como la diferencia entre la longitud de los segmentos AD y ED. Un porcentaje de casi el 30% de los niños considera que el valor a restar es el que aparece en el enunciado, sin tener en cuenta que es el valor del radio y no del diámetro, –o confunden radio con diámetro– ya que eligen la respuesta D.

Si bien el tratamiento del círculo comienza en los primeros años de la escuela, y es incluido prácticamente en todos los años, este trabajo no siempre deriva en el conocimiento de sus propiedades. Por otra parte, muchas actividades que figuran en los textos escolares sólo remiten a colocar nombres de elementos y a relacionar nombres de figuras con dibujos, lo que no contribuye a problematizar las propiedades.

Cuando los niños ingresan en la escuela, consideran las figuras como dibujos o como objetos de determinada forma. Es decir, su reconocimiento está basado en la percepción, es de forma global y no distinguen las propiedades que las caracterizan.

Por ejemplo, los niños reconocen al círculo y dicen "es un redondel (o una redondela)", "parece una rueda", "es como una moneda", "tiene la forma de una tapa", "es como un anillo" y no diferencian, en principio, el círculo de la circunferencia. También pueden distinguir un cuadrado de un rectángulo, pero tal vez frente a un rombo y a un romboide digan que "tienen forma de barrilete" (cometa).

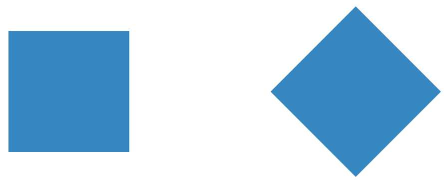
Las primeras propiedades de las figuras aparecen asociadas a sus dibujos, a partir de un trabajo apoyado, fundamentalmente, en la percepción y en las exploraciones con materiales y no con la generalidad de un conjunto de condiciones que las determinan. Los niños pueden diferenciar una figura de otra; pero no son capaces, entre otras características, de comprender la inclusión del cuadrado entre los rectángulos.

Las actividades propuestas aquí buscan que los niños puedan avanzar desde el reconocimiento perceptivo de las formas hacia la explicitación de las propiedades de los elementos que caracterizan esas formas (por ejemplo, tener lados rectos o curvos) y de las relaciones entre ellos (tener por lo menos un par de lados congruentes, por ejemplo).

También es interesante destacar que, como señalamos al analizar el ítem de tercer grado, los alumnos atribuyen a las figuras propiedades no constitutivas del objeto geométrico pero que están asociadas al dibujo que están analizando. Por ejemplo, un cuadrado "torcido", deja de ser cuadrado.

Diferenciar el objeto geométrico de sus representaciones por medio de dibujos requiere actividades específicas que problematicen lo que 'se ve', ya que cada uno identifica en el dibujo las propiedades de cada figura de acuerdo a los conocimientos que posee.

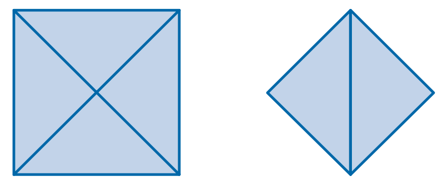
FIGURA 14



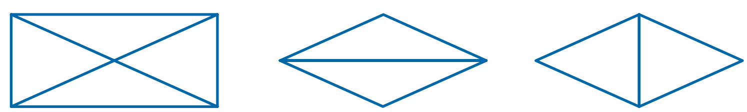
"Este es un cuadrado" *"Este es un rombo"*

Ejemplo 1

Si trazas las diagonales de un cuadrado, copias uno de los triángulos en que queda dividido y armas un cuadrilátero con dos de esos triángulos, tal como muestra el dibujo...



¿Puedes asegurar que la figura que obtuviste es un cuadrado? ¿Por qué? Si ahora partes de un rectángulo, ¿qué cuadriláteros obtienes? ¿Por qué?



¿Y si partes de un rombo?

Es importante tener en cuenta que, en geometría, para demostrar la validez de una afirmación no basta con realizar una comprobación empírica –midiendo sobre un dibujo o plegando un papel–, sino que es necesario usar argumentos basados en las propiedades de las figuras.

Esta actividad tiene como propósito usar las propiedades de las diagonales para argumentar sobre las características de las figuras obtenidas: su perpendicularidad, igualdad, o si son cortadas o no en el punto medio. Por ejemplo, en el primer caso es posible afirmar que dos ángulos de la figura son rectos, porque las diagonales del cuadrado son perpendiculares; los otros dos también son rectos, pues se obtienen de la suma de dos ángulos de 45°.

Si bien en los primeros años de la escuela el tratamiento de las figuras como dibujos es preponderante, resulta importante que los alumnos tengan oportunidad de enfrentarse progresivamente a situaciones que les exijan hacer anticipaciones, sin recurrir a la experiencia de medir y tomar decisiones basándose en las propiedades ya conocidas, aunque todavía no tengan suficientes elementos para argumentar deductivamente.

Si bien es deseable que los niños avancen en un manejo hábil de los instrumentos, es necesario tener en cuenta que la precisión en esa práctica debe estar al servicio de la resolución de problemas, y de las conceptualizaciones que se deriven, y no debieran convertirse en el eje de la tarea.

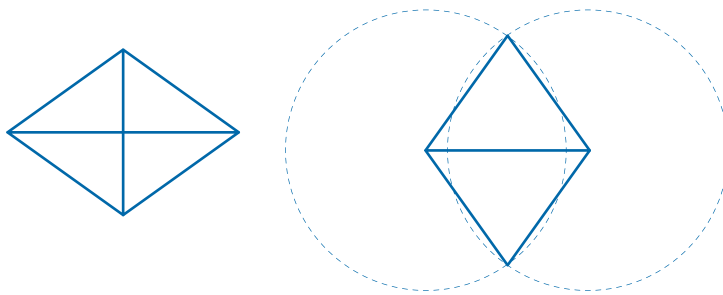
En ese proceso, las construcciones permiten plantear problemas en los cuales los datos que responden a sus condiciones teóricas pueden tener diferencias con aquellos apoyados en la percepción. Estos problemas plantean un desafío al maestro en relación con el uso de los instrumentos, ya que elegir uno u otro modifica las condiciones del problema, pues ponen en juego diferentes relaciones entre los elementos de las figuras.

Ejemplo 2

a) Construir un rombo con escuadra, sabiendo que sus diagonales miden 4 cm y 1,5 cm.

b) Construir un rombo con compás, sabiendo que sus lados miden 5 cm y una de las diagonales mide 3 cm.

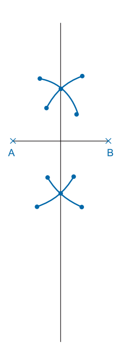
c) Si algún alumno afirma que el rombo construido en (a) es igual al resultante en (b) ¿estaría en lo cierto? ¿Por qué?



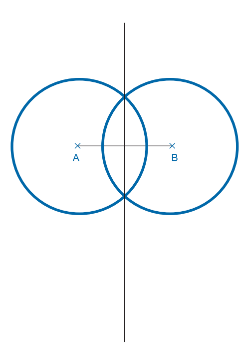
d) Para dibujar un rombo de 4 cm de lado, ¿qué procedimiento conviene usar?

En el caso particular del círculo y la circunferencia, será central el trabajo que se realice con el compás. Descubrir la equidistancia al centro de los puntos de la circunferencia y la relación radio-diámetro requiere de un proceso bien articulado y de cuyo resultado depende, en buena medida, la posibilidad de avanzar en muchos conocimientos sobre las figuras.

Sin lo anterior no será posible comprender, por ejemplo, los procedimientos para construir triángulos o para trazar la mediatriz de un segmento o la bisectriz de un ángulo. De otro modo, los alumnos podrán repetir secuencias de pasos con el compás, a modo de una coreografía sobre el papel, sin advertir las relaciones entre distancias que están puestas en juego.



Hacer una marca arriba, otra abajo,...

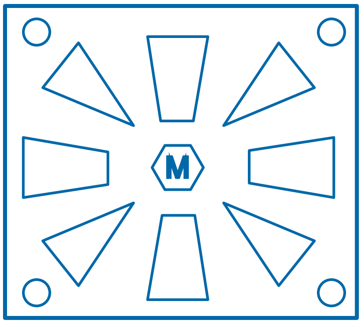


buscar puntos que están a 3 cm, a 4 cm, y a 5 cm de A y de B.

El trabajo sobre circunferencia puede ser iniciado en cuarto o quinto grado, con actividades que involucren la discusión sobre la localización de objetos en el espacio, en relación con una referencia fija. Por ejemplo, discutir dónde se puede ubicar bebederos para animales en una chacra a determinada distancia de una fuente de agua.

Ejemplo 3

Dos personas quedaron de encontrarse en la plaza, en un banco que está a unos diez pasos del monumento. En el dibujo siguiente, marquen dónde podrían haberse encontrado, sabiendo que, en la realidad, diez pasos corresponden a 3 cm en el plano.

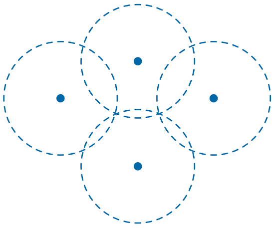


También es posible proponer situaciones en la pantalla de un computador en el contexto de un juego. En estos primeros pasos bastará con descubrir que hay más de una respuesta, para avanzar luego en la exploración exhaustiva de todas las localizaciones posibles.

Ejemplo 4

Pueden plantearse situaciones en las que para regar una huerta es necesario mover un regador para cubrir toda la superficie. Los alumnos deberán advertir las regiones que se van mojando con los sucesivos cambios.

FIGURA 15



Luego será necesario pasar al uso del compás, para determinar la localización de puntos en el plano que están a una distancia dada de otro punto.

Explorar las posibilidades, o no, de construir un triángulo dadas las distancias entre sus vértices resulta también una propuesta desafiante para los alumnos y de la que pueden desprenderse luego construcciones de cuadriláteros.

Ejemplo 5

Construir, si es posible, las siguientes figuras:

a) Un triángulo con lados que midan 4 cm, 5 cm y 3 cm.

b) Un triángulo con lados que midan 9 cm, 6 cm y 3 cm.

c) Un triángulo con lados de 3 cm.

d) Un paralelogramo con una diagonal de 9 cm, un lado de 6 cm y otro de 3 cm.

e) Un rombo con una diagonal de 3 cm y lados de 3 cm.

f) Un rombo con una diagonal de 3 cm y lados de 5 cm.

Dibujar un segmento AB de 5 cm de longitud y responder:

a) ¿Es posible encontrar un punto P, que esté a 4 cm de A y también de B? ¿Y un punto Q, que esté a 4 cm de A y a 3 cm de B?

b) ¿Cuántos puntos cumplen las condiciones expresadas en(a)?

c) Si trazan los segmentos AP y BP, ¿qué tipo de triángulo determinan con AB?

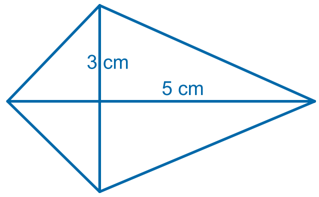
d) ¿Cuáles habrían sido las respuestas anteriores si AB hubiera medido 7 cm? ¿Y si hubiera medido 4 cm?

Ejemplo 6

Dibujar un cuadrilátero cuyas diagonales midan 3 cm y 5 cm y que cada una corte a la otra en el punto medio.

a) ¿Es posible asegurar que la figura dibujada va a coincidir con la que dibujó otro compañero a partir de los mismos datos? ¿Por qué?

¿Cuál de los siguientes mensajes permite construir esta figura?



a) Las diagonales son perpendiculares, una mide 5 cm y la otra 3 cm.

b) Los lados son iguales dos a dos, y las diagonales son perpendiculares.

c) Una diagonal mide 5 cm y la otra 3 cm La mayor corta a la menor por la mitad.

Dibujar un rombo y escribir el procedimiento usado para que un compañero pueda realizar la misma figura.

Un alumno dice que es posible usar el procedimiento para construir la mediatriz de un segmento para dibujar un rombo. ¿Es cierto lo que afirma?

Las diferentes modalidades de construcción de figuras –dictado, copiado, construcción de figuras a partir del pedido de datos o a partir de datos dados– podrán ser articuladas en secuencias que hagan avanzar en el conocimiento de las figuras y sus propiedades y en el modo de trabajo propio de la geometría.

Es importante tener en cuenta que se requiere un trabajo específico sobre la caracterización de los objetos geométricos, más allá de las frecuentes actividades realizadas en los distintos grados de la escuela primaria donde las propiedades de las figuras están puestas en juego en la resolución de problemas de comparación y cálculo de medidas, en especial aquellas ligadas al perímetro y al área. De otro modo, los alumnos pueden aplicar, por ejemplo, las fórmulas 'base x altura / 2 ó $\pi \times r^2$' cuando son dados los datos en forma explícita, pero tienen problemas para identificar a qué llaman base o radio.

SOBRE EL DOMINIO DE LA MEDIDA

En relación con los contenidos de este dominio, consideraremos los problemas de perímetro, área y volumen, de las pruebas de sexto grado.

La selección obedece al criterio de considerarlos del mismo campo –el de las medidas espaciales– es decir, aquellos en los que las medidas están referidas a magnitudes ligadas a las formas y medidas de las figuras y cuerpos geométricos y, por ello, pueden considerarse formando parte de un mismo conjunto. En las evaluaciones hemos analizado problemas que involucran tanto la noción de perímetro como las de área y de volumen.

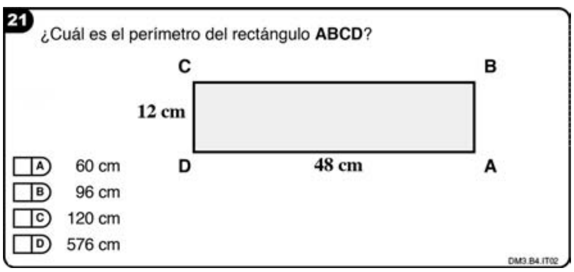
En primer lugar, aparecen los problemas cerrados llamados *Rectángulo 1* y *Rectángulo 2* y, luego, los problemas abiertos denominados *Cajas y Patio*.

Cada problema presenta un análisis individual de los conocimientos involucrados en sus posibles resoluciones, seguido de un análisis de conjunto, que aporta nuevas conclusiones.

Rectángulo 1 y Rectángulo 2
Por ser presentados en ítems cerrados, en estos problemas es posible analizar los conocimientos ligados a cada una de las alternativas de respuesta.

Las alternativas consideradas, en general, tienen relación con el modo en que los alumnos manejan la información del problema y, en algunos casos, con los errores más conocidos.

El problema siguiente, llamado *Rectángulo 1*, pide averiguar el perímetro de esta figura, e incluye en su enunciado el dibujo y las medidas de sus lados escritos sobre cada uno de ellos, en números enteros y en centímetros. Para resolverlo, los alumnos no necesitan conocer una fórmula pero sí saber que el perímetro es la suma de los lados. Para el cálculo, las alternativas de resolución dependen solamente del uso de sumas, o de sumas y productos por 2.



Averiguar el perímetro de esta figura

Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que requiere el concepto de perímetro
Respuesta correcta	C : 120 cm

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	39,79%
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 37,10 % B : 8,42% D : 12,41 %
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	2,28 %

Los alumnos evaluados podrían sumar los lados mayor y menor, que son datos, y luego multiplicar por 2 (Procedimiento A), o multiplicar cada uno por 2 y luego sumar (Procedimiento B); o sumar los cuatro lados (Procedimiento C) y obtener 120 cm.

Las demás alternativas son posibles de obtener al sumar los datos y no multiplicar por 2 (60 cm) lo que podría implicar el desconocimiento de la noción de perímetro; sumar sólo las medidas de los lados más largos (96 cm); o multiplicar ambas medidas por confusión con el área (576 cm).

En otro problema similar, *Rectángulo 2*, hay que averiguar la medida de uno de los lados de esta figura, dados su perímetro y la medida del otro lado; en ambos casos, en números enteros y en centímetros. Tampoco aquí los alumnos necesitan saber la fórmula; pero sí conocer la noción de perímetro para interpretar el enunciado.

Para calcular el lado podrían multiplicar por 2 la medida del lado que es dato, y restarla al perímetro, para luego dividir por 2 (Procedimiento A); restar dos veces el lado, para luego dividir por 2 (Procedimiento B); o dividir por 2 y restar el lado al semiperímetro (Procedimiento C) y obtener el lado.

La comparación de los resultados ayuda, en primer lugar, a la comprensión de las dificultades relativas de calcular un perímetro dados los lados o dado el perímetro y un lado para calcular el otro. También al aporte que significa incluir el dibujo de la figura en el enunciado.

El análisis de los resultados podría contribuir a la comprensión de cuánto pueden los alumnos diferenciar las magnitudes perímetro y área.

Cajas y Patio

Al ser ítems abiertos, los problemas que hemos denominado *Cajas y Patio* permiten analizar los diferentes procedimientos de resolución que hicieron los alumnos.

Cajas

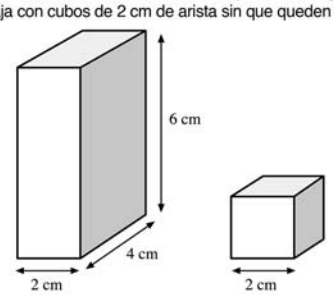
Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que involucra el concepto de volumen
Respuesta correcta	6 cubos

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	15,46%
Porcentaje de respuestas parcialmente correctas	1,03%
Porcentaje de respuestas incorrectas	66,18%
Porcentaje de omisiones	17,33%

PROBLEMA 1
CAJAS

16 Una caja mide 2 cm de ancho, 6 cm de alto y 4 cm de largo. Se debe llenar la caja con cubos de 2 cm de arista sin que queden espacios vacíos.



¿Cuántos cubos se debe colocar en la caja?

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos o dibujos necesarios para resolver el problema.

Respuesta: ....

DM3.B4.IT02

Este problema pide averiguar la cantidad de cubos que caben en una caja con forma de prisma rectangular, y proporciona como información un dibujo de ambos cuerpos y, en el texto, las dimensiones de cada uno de ellos, expresadas con números naturales y en centímetros.

Si el estudiante responde ‘6 cubos’ ó ‘6’, mostrando un procedimiento válido, su respuesta es correcta. Asimismo puede obtener 6 cubos calculando mentalmente, porque los números son pequeños y lo permiten. Es así como pueden elegir un procedimiento basado en el cálculo de los volúmenes de ambas cajas, y la división entre ellos; o un procedimiento basado en el dibujo de los cubos pequeños dentro de la caja y dar la respuesta ‘6 cubos’.

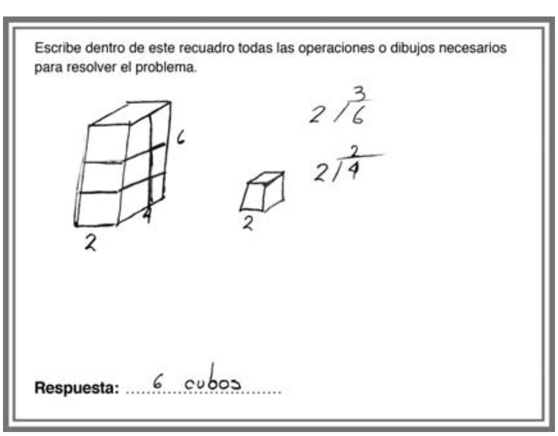
Por otra parte, son consideradas respuestas parcialmente correctas aquellas en las que los alumnos eligen procedimientos matemáticos adecuados, pero llegan a resultados incorrectos por errores en los cálculos; o hacen un procedimiento parcial y omiten el resto.

Procedimientos encontrados
Para resolverlo es posible calcular cada volumen y después dividir (Procedimiento A); o calcular cuántas veces es posible transportar el cubo sobre cada arista del prisma y luego multiplicar (Procedimiento B).

Al considerar las resoluciones de los alumnos a ambos problemas abiertos, hemos encontrado procedimientos acertados de dos tipos, con una variedad de representaciones asociadas que dan lugar a pensar en el uso de diferentes conocimientos.

Como ejemplo del Procedimiento A, mencionamos el de un alumno que dibujó ambos cuerpos (copió los que forman parte del enunciado) e hizo líneas en la caja que marcan, en perspectiva, los cubos que entran en cada arista.

Los datos del problema dieron lugar a un número natural en los tres casos. De allí, pudo contar y llegar a la respuesta correcta, que es 6. Sin embargo, luego escribió dos divisiones entre cada una de las medidas de la caja y la de la arista del cubo, tal vez para asegurarse de lo que había hecho con un procedimiento que consideró más válido para una evaluación de matemática: hacer cuentas. Esta interpretación se deriva del contrato didáctico que circula en las escuelas primarias frecuentemente acerca de lo que se puede o no hacer en clase de matemática. Por ejemplo, en este caso “siempre hay que calcular para dar una respuesta”.

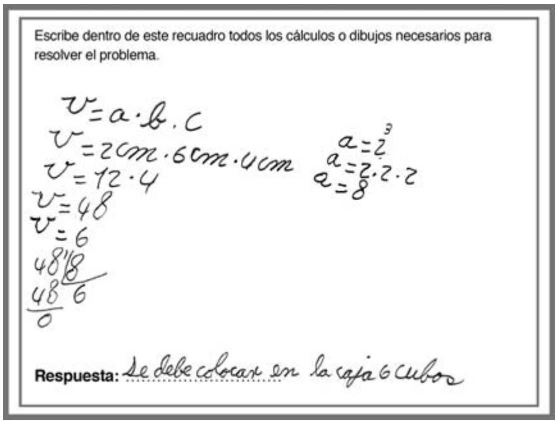

Escribe dentro de este recuadro todas las operaciones o dibujos necesarios para resolver el problema.

Respuesta: 6 cubos

No fueron encontrados casos en que los alumnos multiplicaran los tres números obtenidos en las divisiones, lo que pareciera derivar de la posibilidad de contar los cubitos o hacer la cuenta de multiplicar mentalmente.

Como ejemplo del Procedimiento B, encontramos el de un niño que escribió una fórmula para el cálculo del volumen de la caja (v = a x b x c) y reemplazó cada letra por un dato con número y unidad (cm en cada caso), aunque luego en el producto escribió 48, sin unidades.

Después, escribió la fórmula para el cubo y reemplazó por números sin unidades ($a = 2^3 = 8$) y, por último, dividió 48 por 8, con resultado correcto y denominación de cantidad.


Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos o dibujos necesarios para resolver el problema.

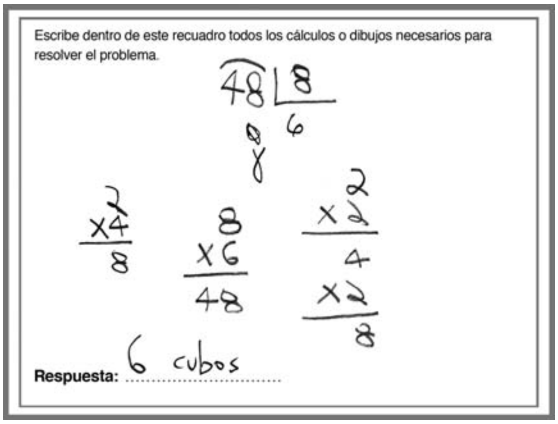
v = a · b · c
v = 2cm · 6cm · 4cm
v = 12 · 4
v = 48
v = 6
48 | 8
48 6
0

$a = 2^3$
a = 2 · 2 · 2
a = 8

Respuesta: se debe colocar en la caja 6 cubos

Otros niños usaron este procedimiento pero sin fórmulas, incluyendo productos parciales tanto para el prisma (2 x 4 = 8 y 8 x 6 = 48) como para el cubo (2 x 2 = 4 y 4 x 2 = 8), para luego dividir ambos resultados, encontrando la respuesta. Este último procedimiento da cuenta de la necesidad, al calcular un volumen, de constituir primero una cara del cuerpo y luego aplicar el operador correspondiente a la tercera dimensión.

El estudio de los problemas de aritmética elemental y de los procedimientos de resolución que los niños producen para resolverlos ha conducido a analizar esos procedimientos e interpretarlos (Vergnaud, 1978). Este análisis ha permitido ver que, para calcular el volumen, los niños pueden usar tanto un modelo multiplicativo como uno aditivo o modelos mixtos. Así aparecen soluciones en las que se multiplican las tres dimensiones, como las ya mencionadas (tipo volumen); otras en las que se suma (tipo perímetro); algunas en las que se multiplican de a pares y se suman (tipo superficie), y otras mixtas. Hemos encontrado en la muestra analizada ejemplos de tipo perímetro y de tipo mixto.

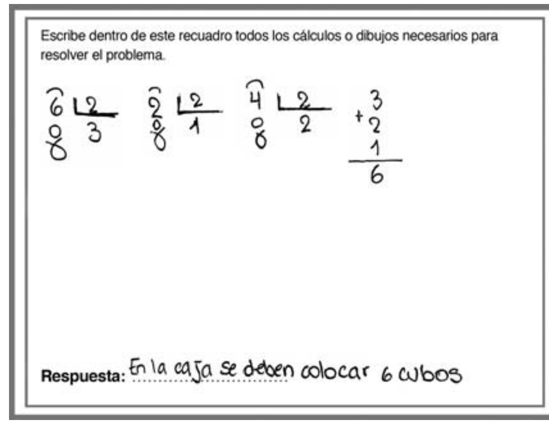


Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos o dibujos necesarios para resolver el problema.

48 | 8 → 6

$2 \times 4 = 8$ $\quad 8 \times 6 = 48$ $\quad 2 \times 2 = 4$, $4 \times 2 = 8$

Respuesta: 6 cubos



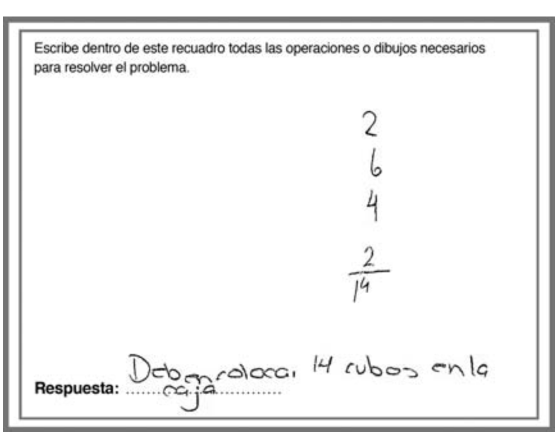
Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos o dibujos necesarios para resolver el problema.

6 | 2 → 3 $\quad$ 2 | 2 → 1 $\quad$ 4 | 2 → 2 $\quad$ 3 + 2 + 1 = 6

Respuesta: En la caja se deben colocar 6 cubos

Un ejemplo de procedimiento ‘tipo perímetro’ es el siguiente: el niño o niña hizo cuentas que le permitieron saber cuántos cubos es posible colocar para cada dimensión (6 : 2, 2 : 2; y 4 : 2); sin embargo, interpretó estos resultados de manera independiente de su ubicación espacial, como si fueran todas aristas colocadas una a continuación de otra, y sumó los tres resultados obtenidos. En este caso, por los datos del problema resulta una respuesta igual a la correcta y, de no ser un ítem abierto, esta respuesta hubiera pasado por buena ya que no conoceríamos el modo en que fue obtenida.

Otra muestra de este tipo es la respuesta de un alumno que realizó una cuenta de sumar en la que los sumandos son todos los datos: los tres de la caja (6, 4, y 2) y el del cubo (2), obteniendo como resultado 14 y escribiendo esto mismo como respuesta.



Escribe dentro de este recuadro todas las operaciones o dibujos necesarios para resolver el problema.

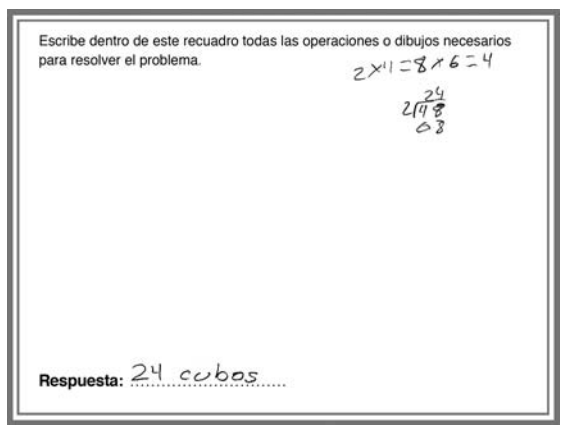
2 + 6 + 4 + 2 = 14

Respuesta: Debo colocar 14 cubos en la caja

En cuanto a los ejemplos de procedimientos de ‘tipo mixto’, hubo casos en que alumnos comenzaron calculando el volumen de la caja; pero luego dividieron 48 por 2, la arista del cubo.

Entre los procedimientos incorrectos existen también casos en que el alumno, en el transcurso de la resolución, 'pierde' la pregunta y responde con un dato, ya que luego de calcular 6 x 4 x 2 y obtener 48, da como respuesta una parte del enunciado: "se debe llenar la caja con cubos de 2 cm de arista".

También hubo casos en los que, aunque el alumno o alumna respondió bien, escribió varios cálculos de multiplicar en forma vertical: 2 x 2 x 6 = 24; 24 x 6 = 144; 6 x 4 x 2 = 48, 2 x 4 x 2 = 16 y 2 x 6 x 2 = 24, los que no conducen a la respuesta. Podría pensarse que contó cuántos cubos entran en una representación no dibujada y luego incluyó cuentas para 'responder al contrato'.



Escribe dentro de este recuadro todas las operaciones o dibujos necesarios para resolver el problema.

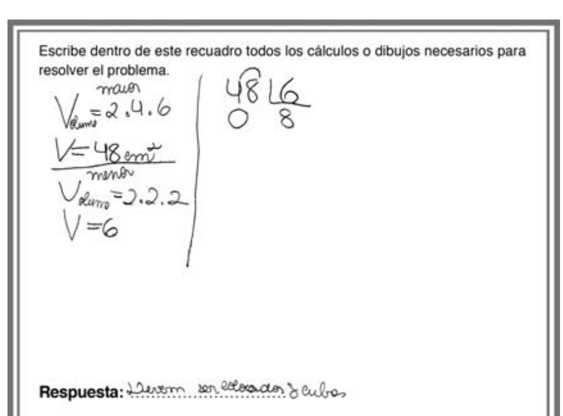
2x4 = 8 x 6 = 4

48 : 2 = 24

Respuesta: 24 cubos

Con respecto al uso de las unidades, hemos encontrado tanto su ausencia como su empleo equivocado, incluyendo casos en los que el volumen está expresado en m^2 o en cm. Sin embargo, esto no incide en errores de cálculo. Pareciera que las unidades son usadas sin comprender su significado, como etiquetas intercambiables.

Los errores de cálculo no son muchos, ya que los números de los datos son pequeños, aunque en algún caso se consigne 2 x 2 x 2 = 6.



Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos o dibujos necesarios para resolver el problema.

V mayor = 2 . 4 . 6

V = 48 cm²

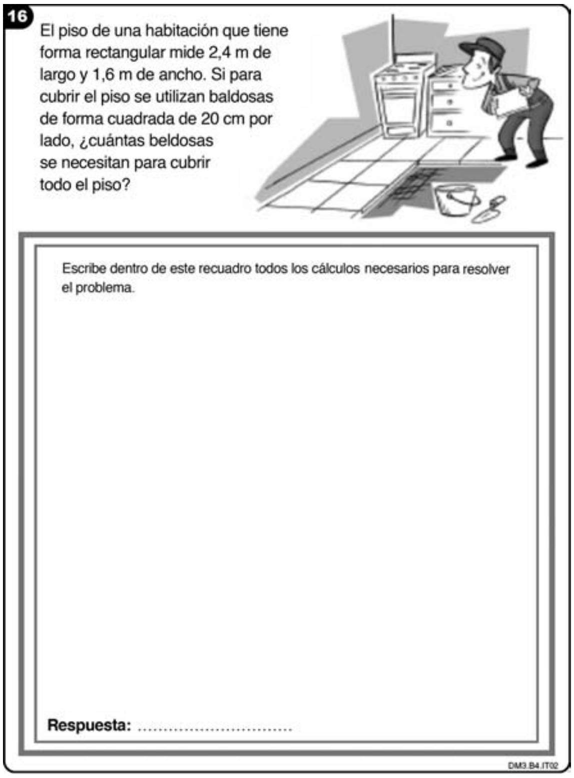
V menor = 2 . 2 . 2

V = 6

48 : 6 = 8, resto 0

Respuesta: Llevan son colocados 8 cubos

PROBLEMA 2
PATIO


16

El piso de una habitación que tiene forma rectangular mide 2,4 m de largo y 1,6 m de ancho. Si para cubrir el piso se utilizan baldosas de forma cuadrada de 20 cm por lado, ¿cuántas beldosas se necesitan para cubrir todo el piso?

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos necesarios para resolver el problema.

Respuesta: ....

DM3.B4.IT02

Patio

Grado	Sexto de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que involucra el concepto de área
Respuesta correcta	96 baldosas

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	1,97%
Porcentaje de respuestas parcialmente correctas	10,32%
Porcentaje de respuestas incorrectas	67,66%
Porcentaje de omisiones	20,04%

Aquí se pide calcular la cantidad de baldosas necesarias para cubrir un piso rectangular. Los datos son la medida del largo y el ancho de la habitación en metros y con números decimales; y el lado de las baldosas a usar en centímetros y con un número natural.

Cualquiera que sea el procedimiento elegido es necesario considerar todas las medidas en la misma unidad, lo que requiere conocer y utilizar la equivalencia entre metros y centímetros.

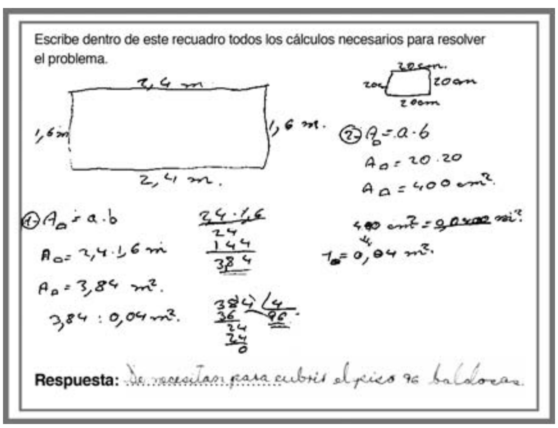
Si el estudiante mostró un procedimiento de resolución válido y contestó ‘96 baldosas’ ó ‘96’ dio una respuesta correcta. En cambio, si el procedimiento fue correcto, pero con error en los cálculos y/o en las equivalencias entre las medidas de longitud; o si hizo un tratamiento correcto de una parte de la tarea y omitió el resto del trabajo, o la realizó con errores, su respuesta fue considerada parcialmente correcta.

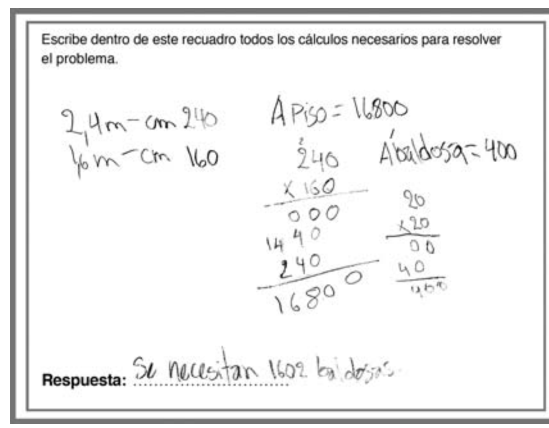
Procedimientos encontrados

Los procedimientos usados, al igual que en el problema anterior, pueden ser agrupados en A y B.

El Procedimiento A, basado en calcular cada área, considera tanto casos donde está incluido el dibujo del patio y las baldosas, y fueron anotadas las medidas sobre cada uno de los cuatro lados; como aquellos donde los alumnos no hicieron dibujos.

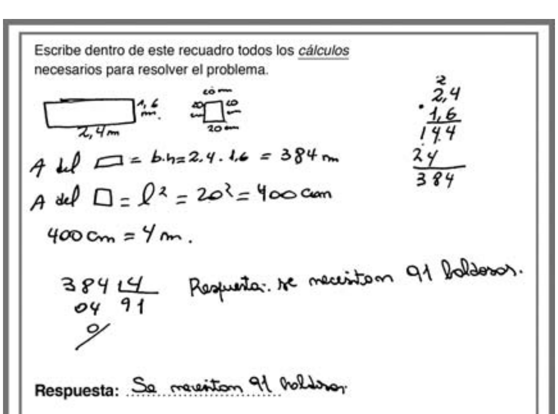
Los cálculos de las áreas respondieron a una variedad en relación con el uso adecuado de las unidades. Alguno las calculó en la unidad dada (obteniendo 3,84 m^2 y 400 cm^2), resolvió la equivalencia (0,04m^2) y luego dividió ambas medidas.

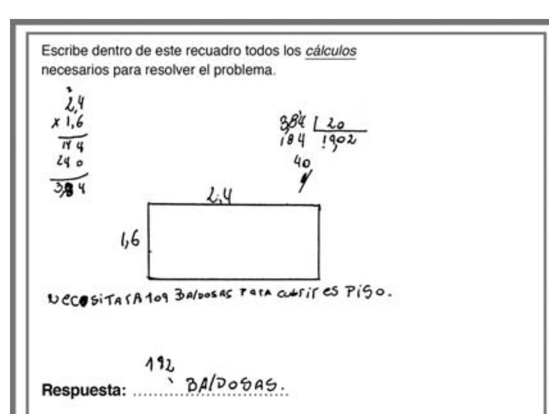




Otro, antes de calcular, transformó todo en cm, indicó bien los cálculos; pero no llegó al resultado correcto por hacer mal la cuenta (en 240 x 160 obtiene 16.800, al no respetar la ubicación de las cifras en el tercer renglón).

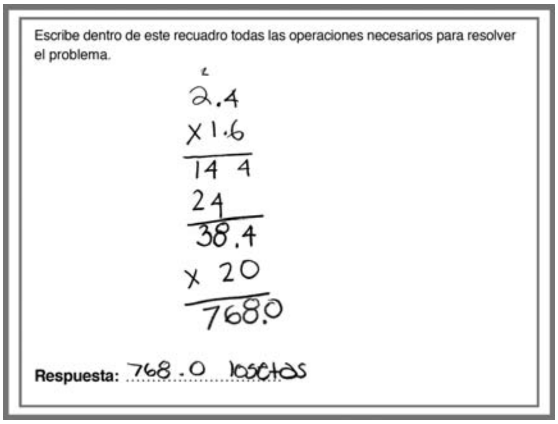
Entre los errores derivados de una equivalencia incorrecta, apareció el de un alumno que calculó cada área en la unidad dada; pero indicó ambos resultados con unidades lineales, por lo que transformó según la equivalencia 100 cm = 1 m, en lugar de 1 m^2 = 10000 cm^2.





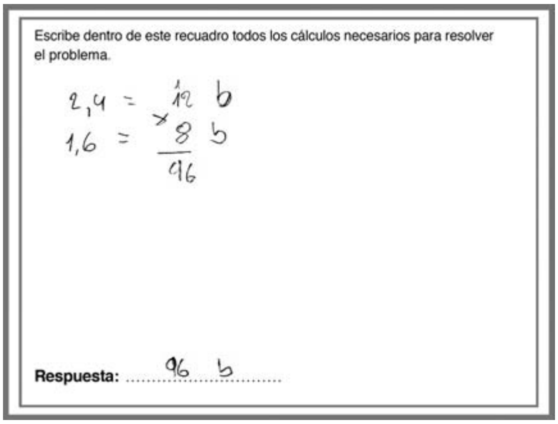
En un caso diferente, el alumno o alumna calculó bien el área del patio en m^2 y dividió por la medida del lado de la baldosa en cm, sin hacer la equivalencia. Obtuvo como resultado 19,02; pero respondió 109, pues las medidas permiten estimar que una sola línea de baldosas requiere de 12 o de 8 y entonces con 19 no alcanza para cubrir el patio.

También hubo alumnos que utilizaron un procedimiento erróneo que da cuenta de una dificultad para sostener la idea con que se inicia la resolución, pues al comienzo el niño o niña calculó el área del patio, pero luego multiplicó por la medida del lado de la loseta.


Escribe dentro de este recuadro todas las operaciones necesarios para resolver el problema.

2.4
x 1.6
144
24
38.4
x 20
768.0

Respuesta: 768.0 losetas

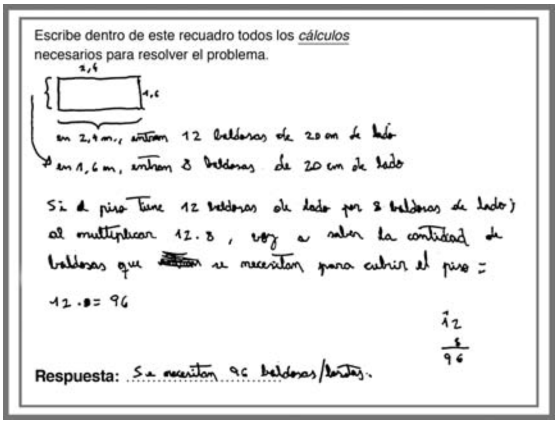

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos necesarios para resolver el problema.

2,4 = 12 b
1,6 = x 8 b
96

Respuesta: 96 b

El Procedimiento B, basado en calcular el número de baldosas por lado, incluye el dibujo. En algunos casos apareció el registro de datos numéricos sobre los lados; algunos anotan 12 al lado de 2,4, y 8 al lado de 1,6; es decir, el número de baldosas de 20 cm que se pueden ubicar sobre el lado, para luego multiplicar 12 b x 8 b, lo que da como resultado 96 baldosas.

Un caso interesante es el de un alumno que, además, explicó correctamente lo que hizo, paso a paso.


Escribe dentro de este recuadro todos los *cálculos* necesarios para resolver el problema.

2,4
1,6

en 2,4 m., entran 12 baldosas de 20 cm de lado
en 1,6 m, entran 8 baldosas de 20 cm de lado

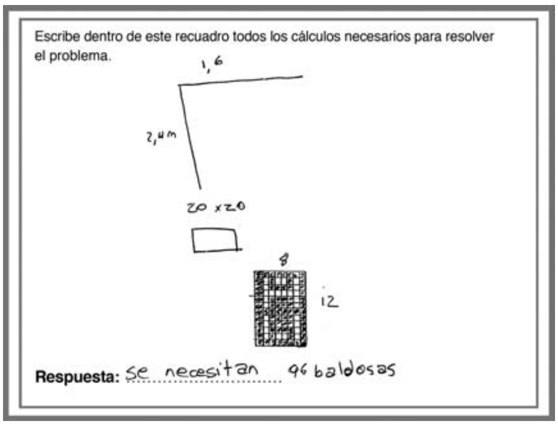
Si el piso tiene 12 baldosas de lado por 8 baldosas de lado; al multiplicar 12.8, voy a saber la cantidad de baldosas que se necesitan para cubrir el piso =

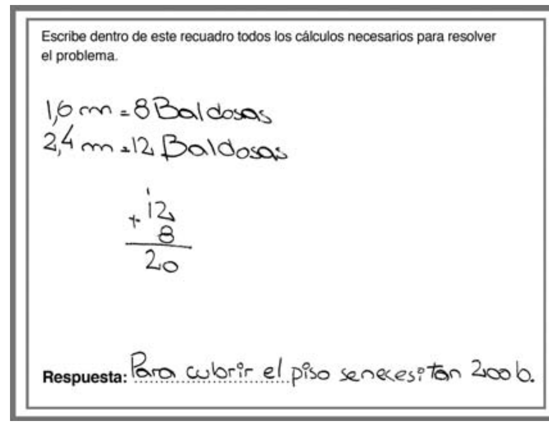
12.8= 96

12
8
96

Respuesta: Se necesitan 96 baldosas/losetas.

Hubo quien dibujó el patio, cuadriculado con una cantidad de baldosas por lado la que responde a los datos, y escribió 8 y 12 sobre cada uno; para luego responder 96. Pero no es posible saber si calculó 12 x 8 o contó.





También algunos calcularon 12 y 8; pero luego sumaron 12 + 8 = 20. Sin embargo respondieron 200 baldosas, pues sabían que una sola línea de baldosas requiere de 12 o de 8 y que, entonces, 20 no cubren el patio.

Y está quien comenzó sumando los 4 lados con un procedimiento ‘tipo perímetro’; aunque indicó los valores con números decimales, no puso la coma en el resultado y escribió 80. Luego, sumó 12 + 8 = 20; y, por último, sumó 80 + 20 respondiendo que son necesarias 100 baldosas.

Análisis comparativo

En principio, podemos decir que los problemas abiertos *Cajas* y *Patio* son similares en dos y tres dimensiones, respectivamente, ya que en ambos hay una cierta unidad que entra un número exacto de veces en lo que hay que medir. Sus diferencias están en las dimensiones involucradas, el tamaño de los números y la necesidad, o no, de hacer un cambio de unidades.

Ambos problemas tienen un porcentaje cercano al 20% de omisiones y un alto porcentaje de respuestas incorrectas (66,18% cajas y 67,66% patio). En este sentido, al considerar las propuestas en el próximo apartado veremos que es posible explicar esto por el tipo de trabajo en clase realizado para enseñar estas nociones.

Sin embargo, resulta notable que mientras *Cajas* tuvo un 15,46% de respuestas correctas, *Patio* logró el 10% de respuestas parcialmente correctas. Es posible inferir de esto que para los alumnos el hecho de trabajar en tres dimensiones, en lugar de en dos, no resulta tan complejo como operar con números de mayor tamaño y considerar las equivalencias de medidas escritas en diferentes unidades.

Por otra parte, en *Cajas* el dibujo es un apoyo usable, pues al tener números pequeños hay que dibujar unos pocos cubitos; en cambio, en *Patio*, dibujar 96 baldosas no resulta un recurso valorado por los alumnos.

Sería interesante discutir con los niños el mismo problema con otros datos. Por ejemplo, si la caja tuviera 7 cm de altura, 3 cm de ancho y 2 cm de profundidad, habría que plantear si sólo es posible contar cubitos enteros o se podrían "cortar" y pensar en medios cubitos para completar la caja.

También sería interesante considerar entre los procedimientos de tipo A y B, los porcentajes de cada uno de ellos, así como de los diferentes tipos de procedimientos parcialmente correctos.

En el estudio mencionado antes, Gerard Vergnaud señala que vale la pena tener en cuenta que el volumen es un concepto multiplicativo muy complejo; es decir, que las dificultades de apropiación son frecuentes, importantes y duraderas. En la escuela primaria, antes de analizar las propiedades del trilinealismo –o como el producto de una superficie por una longitud– es posible abordar su estudio como una magnitud física mensurable, que se presta a comparaciones, mediciones y estimaciones en actividades de trasvasamiento aplicadas a situaciones varias de la vida cotidiana de los niños.

Del mismo modo, también el área es una magnitud físico-geométrica que puede dar lugar a actividades de superposición y cálculo estimado que no requieren del uso de fórmulas.

La coordinación que los niños logren entre la representación unidimensional y la bidimensional del área, o la tridimensional del volumen, requiere de propuestas didácticas centradas en la comparación de resultados obtenidos trabajando desde ambos puntos de vista, así como de las propiedades utilizadas en cada caso.

Por otra parte, el tratamiento escolar de las magnitudes espaciales suele hacerse tomando cada una de ellas por separado, sin considerar en una misma situación –y para una misma figura– su área y su perímetro o, para un mismo cuerpo, su superficie y volumen, así como las variaciones de una magnitud cuando la otra es constante. Esto conduce a dificultades para su diferenciación (Douady, área) y podría ser el origen de utilizar los procedimientos de suma de aristas.

A continuación presentamos algunas consideraciones que orientan el diseño y gestión de problemas escolares y que apuntan a una enseñanza superadora de las dificultades observadas en las pruebas, utilizadas en el análisis, y que toman en cuenta los señalamientos realizados en las conclusiones de los estudios didácticos mencionados.

El estudio de las magnitudes, y de su medición, ha constituido y constituye una parte imprescindible del programa de los primeros años de la escolaridad. Fundamentalmente por la necesidad y el reconocimiento que tiene la práctica de la medida como conocimiento de base para el desenvolvimiento social de los sujetos.

Generalmente, el aprendizaje de estos conceptos está identificado con el dominio y conocimiento de los distintos sistemas de unidades que componen el Sistema Métrico Decimal, y los propósitos de su enseñanza son alcanzados cuando los alumnos pueden efectuar pasajes de una unidad a otra, con rapidez y seguridad.

Medir es un acto complejo y difícil, que responde a la necesidad de cuantificar ciertos atributos de los objetos y de las formas. Muchos de los problemas vinculados con la medición contribuyen a dar sentido a los números racionales y funcionan como articuladores entre la aritmética y la geometría.

Sin embargo, a pesar del tiempo y de la dedicación que habitualmente se invierten en estas tareas, es bastante frecuente encontrar niños con escolaridad avanzada, y también muchos adultos, con importantes dificultades en relación a estas nociones; y, aún más, con poco o ningún sentido de la estimación en relación a las mismas.

Pero también existe una problemática específica que la escuela debe tratar: la realización de mediciones de diferentes magnitudes, ya que "*comprender la medida implica comprender el proceso de medir, la inexactitud de los resultados, el concepto de error de medición y a qué puede ser atribuible, y la importancia en la selección de la unidad y del instrumento adecuado para lograr la precisión requerida por la situación planteada*"[7].

Desde los primeros años de la escolaridad, la idea es enfrentar a los niños a problemas reales de medición, que les permitan construir una representación interna del significado de cada una de las magnitudes estudiadas y elaborar una apreciación de los diferentes órdenes de cada magnitud que orienten la posibilidad de estimar y el uso de las unidades convencionales (¿cuánto es 1 m? ¿y 1 cm? ¿y 1 km?).

Estos problemas también dan la oportunidad para debatir en el aula sobre otras cuestiones, como por ejemplo el carácter convencional de la unidad de medida y la importancia de su determinación: ya que medir es comparar con una unidad, por lo tanto el resultado de la medición depende de la unidad elegida. También permiten explicitar los errores cometidos en la medición, debidos a los procedimientos empleados o a la elección de la unidad.

Asimismo, frente a la necesidad de cambiar unidades, estos problemas dan lugar a plantear la relación existente entre las transformaciones

7 *Bressan y Gysin en Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, Argentina, 1995.*

de la unidad y las medidas correspondientes. Cabe recordar que si la unidad usada es la mitad que la empleada anteriormente, la medida será el doble; y si con una cierta unidad el mismo objeto mide una cantidad determinada y con otra unidad, la tercera parte, es porque esta segunda unidad es tres veces mayor que la primera.

Gracias a este tipo de problemas es posible, también, efectuar cálculos simples de medidas y expresar de manera apropiada el resultado de una medición, de un cálculo o de una estimación con un número y una unidad, empleando unidades adecuadas y, según el caso, utilizando una expresión compuesta, una escritura racional o un encuadramiento.

Tradicionalmente, en la escuela primaria se realizan algunas comparaciones cualitativas y mediciones con unidades no convencionales para la longitud. Este inicio, que intenta recuperar de algún modo el proceso histórico, descuida en ocasiones el hecho de que los niños ya conocen y usan las unidades convencionales. En este sentido, y si bien es importante diferenciar los distintos tipos de unidades, es necesario presentar situaciones que requieran realizar mediciones, evaluar qué instrumentos están disponibles y cuál es el tipo de información que puede obtenerse.

Por ejemplo, algunos textos escolares proponen, para el caso de la longitud, medir el largo del banco o de un libro, usando gomas o lápices, con el propósito de descubrir que las medidas obtenidas son distintas y comprender la necesidad de la existencia de la convención. En este caso, cabría preguntarnos ¿es verosímil esa situación?, ¿quién necesita ese dato y para qué?

En cambio, si lo pedido es determinar la posibilidad de delimitar una cancha para realizar un deporte en el patio o en el terreno de la escuela, cabría la necesidad de realizar algunas mediciones para analizar la pertinencia, en ese caso específico, de las medidas que figuran en los reglamentos.

En este caso, los alumnos enfrentados al problema de medir quizá recurran espontáneamente a una cinta métrica, que tal vez conozcan por el uso social. Si es así, convendría realizar las mediciones avanzando sobre las dificultades producidas en el uso del instrumento; luego se podría discutir cómo resolver el problema sin la cinta, aportando incluso alguna información histórica acerca de unidades antiguas como el codo, el pie, la legua, la vara, etc.

Otra posibilidad es que no estén disponibles los instrumentos necesarios o se desconozca su uso, y entonces será el conjunto de la clase, con la ayuda del docente, el que decidirá cómo resolver el problema.

La escritura de cantidades con números y unidades y la transformación de esas escrituras son conocimientos ligados a la comprensión de los diferentes órdenes de unidades y, por lo tanto, es posible presentar problemas para que los alumnos elaboren distintos procedimientos para encontrar los resultados e ir sistematizando las relaciones entre las unidades para toda la clase, introduciendo otras menos conocidas por su escaso o nulo uso en la vida cotidiana.

El itinerario que proponemos para ser recorrido por los alumnos con el fin de construir las fórmulas para calcular, por ejemplo el área de una figura, parte de la idea de que la sistematización de las mismas debe darse a partir de un trabajo de recuperación de los procedimientos producidos por los alumnos frente a la resolución de un problema adecuado. Esto implica que, en un primer momento, el maestro necesita entender dichos procedimientos, para poder hacernos cargo del proceso de evolución de los mismos, hasta llegar al procedimiento experto.

La utilización de cambios regulares en el sistema decimal de medidas es, precisamente lo que lo asemeja al sistema de numeración y la escritura de la medida tiene su equivalente en lo que refiere a la descomposición de un número en unidades, decenas y centenas, etc.

Comprender el significado de medir en el tema de áreas es un concepto complejo y difícil para los niños. Entender que la unidad de medida es una porción de superficie y que esta puede entrar una cierta cantidad de veces entera o en fracción en otra dada, sólo es posible si los alumnos participan activamente en el proceso de ‘cubrir’ con esa unidad la superficie dada. Por esta razón, nos parece que las primeras aproximaciones a este estudio deben estar orientadas en este sentido.

Ejemplo 1

Para estimar áreas y medir con unidades no convencionales, en una situación de contexto extramatemático, es posible proponer, por ejemplo, que los chicos realicen estimaciones y mediciones de superficies con unidades elegidas por ellos, planteando una actividad como la siguiente:

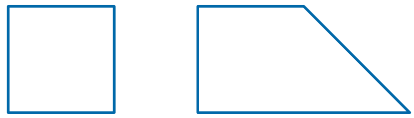
> *Se quiere saber, de manera aproximada, si 20 bancos con sus respectivas sillas y el escritorio de la maestra podrán entrar en un aula de 4 m x 7 m.*

En este tipo de situaciones, los niños podrían utilizar como unidad de medida un banco con su respectiva mesa y, a partir de allí, pensar en hileras de bancos para cubrir los 7 m de largo y los 4 m de ancho. También podrían comparar directamente con una hilera de bancos de su salón. Sabiendo que hay 10 bancos en una parte de un salón que tiene 2 m por 6 m, deberán estimar para las medidas del otro salón lo que podría suceder.

Ejemplo 2

Para medir áreas con unidades no convencionales, en una situación de contexto intramatemático, el maestro podría presentar una secuencia de actividades que permitan introducir estas discusiones:

Determina, aproximadamente, el área de cada una de las siguientes figuras, utilizando la unidad de medida propuesta. Usa papel de calcar.



unidad de medida 

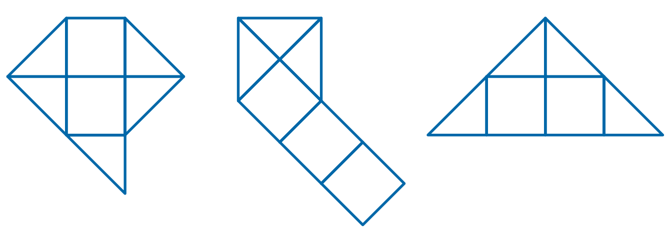
Martina dice que si la unidad de medida fuera un cuadradito como el siguiente, para determinar el área de las figuras del problema anterior no haría falta poner esta nueva unidad dentro de las figuras para determinar cuántas veces entra.

a) ¿Es verdad lo que dice Martina? ¿Por qué?
b) ¿Cuál sería el área de cada figura con esta unidad?

Utilizando como unidad de área el triangulito del problema anterior, dibuja dos figuras que tengan un área de 8 unidades.

Utilizando como unidad de área el cuadradito del problema 2, dibuja dos figuras que tengan un área de $4\frac{1}{2}$ *unidades.*

Para resolver el problema, tres niños armaron las siguientes figuras. Controla si cumplen con la consigna, o no, y explica por qué.



Ejemplo 3
Para medir áreas con unidades convencionales, en una situación de contexto extramatemático, el trabajo que proponemos comienza con la medición o estimación de espacios que los alumnos conocen, como su aula, el patio de la escuela, la biblioteca, usando los m^2 y los cm^2.

En relación con el metro cuadrado, hay que tener en cuenta la discusión acerca de su forma. Es poco habitual considerar que es posible hacerla variar y mantener su medida: así, un rectángulo de $\frac{1}{2}$ m x 2m de lado también mide $1m^2$.

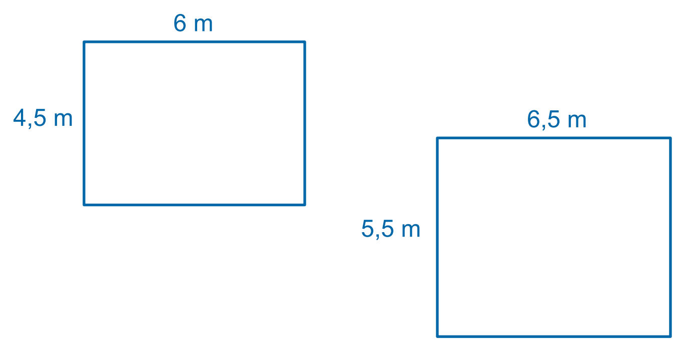
Es fundamental que los niños puedan realizar las primeras experiencias con un cuadrado de un metro de lado construido con papel, porque esto habilita la posibilidad de que entiendan la medida, más allá de su aspecto numérico, y la reconozcan también como un espacio cubierto por esa cantidad. En este caso, podrán buscar estrategias con el fin de determinar cuántos de esos cuadrados son necesarios para cubrir todo el espacio solicitado. Por ejemplo, el maestro puede pedir a los alumnos que realicen una actividad como la que sigue:

> *Estimen las medidas de los lados del aula (aproximarlas a números naturales) y piensen cuántos m^2 (mostrarles en el piso o en el techo, lo que sería un metro cuadrado) entran.*

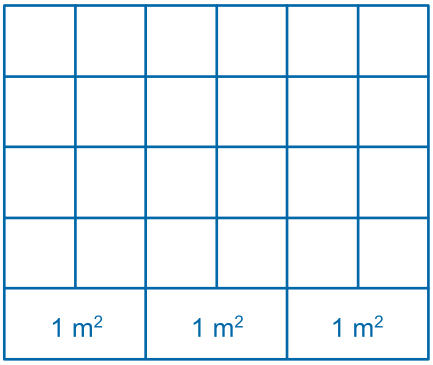
Ejemplo 4

Para medir áreas con unidades convencionales, en una situación de contexto extramatemático, es posible plantear, por ejemplo:

> *Calcula el área de las siguientes aulas:*



Es bastante posible que, para resolver, los alumnos busquen reproducir el mismo tipo de procedimiento que venían usando que, en este caso, sería cubrir con cuadritos toda la superficie para determinar la cantidad que entra en esas aulas. También es bastante posible que usen cuadraditos de 1 m^2.



Por ejemplo, para el aula de 6 m x 4,5 m, si bien la longitud de uno de sus lados es un número decimal, el hecho de que sea 4,5 y que el otro lado sea un número par, permite que con el recurso de cuadricular la figura, los alumnos determinen fácilmente que con la última fila arman 3 cuadraditos más, porque cada uno es $\frac{1}{2}$ de un metro cuadrado.

En el caso del aula de 6,5m x 5,5m, si bien sigue siendo válido el recurso anterior, ofrece mayor dificultad para los alumnos porque al realizar las relaciones entre las porciones de cuadraditos se completan 30 m^2, quedan 11 mitades de cuadradito ($5\frac{1}{2}$ m^2) y la mitad de la mitad de un cuadradito ($\frac{1}{4}$ m^2) por lo que es necesario sumar e interpretar ese valor en m^2 ($30 + 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$) donde $\frac{3}{4}$ de m^2 se puede expresar como 0,75 m^2, para poder dar como resultado 35,75 m^2.

Para resolver, además de cubrir con cuadraditos, los alumnos podrán usar diferentes formas de calcular (contar los cuadraditos que entran, sumar las filas de cuadraditos, multiplicar), lo que posibilita la comparación de métodos y sean establecidas relaciones entre ellos que lleven a poner de manifiesto aquellas que no todos los alumnos tienen en cuenta.

Los docentes pueden plantear preguntas como *¿de qué medida eligieron hacer los cuadraditos?, ¿por qué?* y otras que lleven a comparar el procedimiento consistente en una suma reiterada con el que empleó una multiplicación.

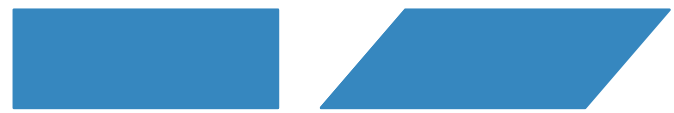
Este tipo de discusiones posibilita poner en común herramientas que usan unos alumnos y que no necesariamente están disponibles para otros. Si bien el hecho de discutirlo una vez no garantiza que aquellos quienes contaron o sumaron vayan a multiplicar en un próximo problema, los pone en mejores condiciones tanto para la resolución de otro problema similar como para la comprensión de las discusiones posteriores.

Ejemplo 5

Para avanzar en la sistematización de otros procedimientos para el cálculo de áreas de figuras diferentes a los cuadrados y rectángulos, es necesario que los alumnos puedan realizar un trabajo de búsqueda de áreas equivalentes, dobles o mitades, ya que las transformaciones de unas figuras en otras de áreas equivalentes permiten el cálculo de áreas de otros polígonos.

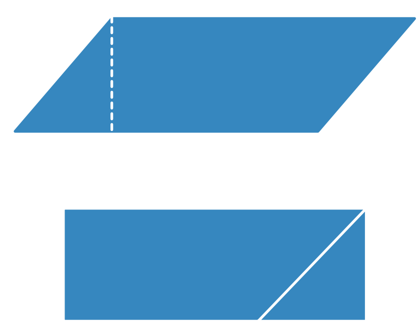
Por ejemplo, para el caso del paralelogramo el maestro puede proponen, en un sexto grado, la siguiente actividad:

Dado un rectángulo de 4 cm de largo por 1,5 cm de alto y un paralelogramo de igual base y altura a los lados del rectángulo, ¿es posible utilizar lo que sabes del área del rectángulo para calcular el área del paralelogramo?



Algunos alumnos realizaron la trasformación del paralelogramo al rectángulo, encontrando que es posible calcular lo pedido, y 'midieron' los lados del nuevo rectángulo, como muestra el siguiente dibujo, para luego multiplicar los lados del paralelogramo, 4 cm y 2 cm, cuya área les da 8 cm^2.

Otros midieron los lados del paralelogramo y, en algunos casos, hicieron el conteo de los cm^2 y de los $\frac{1}{2}cm^2$ o $\frac{1}{4}cm^2$. Procedimientos erróneos como el mencionado darán ocasión de discutir la relación entre la medida de los lados del rectángulo y la de los lados del paralelogramo, lo que permitirá a los alumnos comprender por qué la expresión base por altura o ancho por alto es útil para calcular el área del paralelogramo.



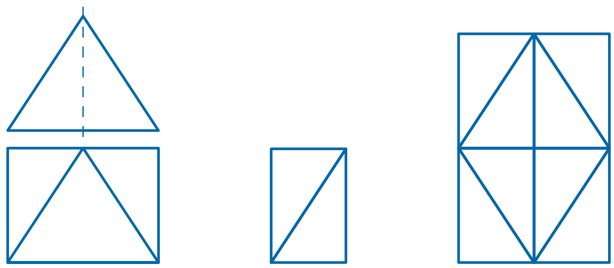
Ejemplo 6

La posibilidad de generalizar un procedimiento para establecer fórmulas para una misma clase de figuras, como por ejemplo los triángulos, aun cuando tengan distintas propiedades (isósceles o no, obtusángulos, rectángulos o acutángulos) requiere de una exploración bastante intensa sobre casos particulares.

También requiere de la discusión, a partir de intervenciones específicas del docente, sobre la posibilidad de usar una misma estrategia para figuras de distinta forma. Asimismo, habrá que variar las medidas, utilizando primero valores que permitan establecer relaciones fácilmente para, luego, avanzar con otras expresiones.

El siguiente es un problema en dos fases. La primera plantea la siguiente consigna y muestra varias resoluciones, entre ellas las del gráfico.

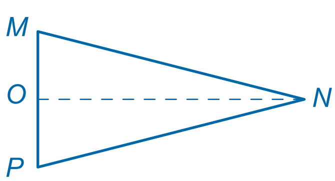
Calcular el área de un triángulo isósceles de 4 cm de altura y 3 cm de base.



Solución A   Solución B   Solución C

En la segunda fase, la maestra o el maestro selecciona los tres procedimientos que siguen y propone:

Escriban un instructivo para describir el procedimiento. Luego pásenlo a otro grupo para calcular el área de MNP, sin nuevos dibujos o recortes.



MP = 1,8 cm
ON = 3,5 cm

Este sistema permite comprobar la equivalencia entre lo realizado por cada grupo de niños y posibilita que surjan diferentes producciones; como, por ejemplo, altura del triángulo x $\frac{1}{2}$ de la base del triángulo; o bien, base del triángulo x altura del triángulo, dividido 2; como así también $\frac{1}{2}$ de base del triángulo x doble de la altura del triángulo ÷ 2.

Para continuar, el docente podría retomar los instructivos recientemente elaborados por los grupos, y proponer una discusión sobre cuáles sirven cuando el triángulo no es isósceles o cuando se dan otros datos.

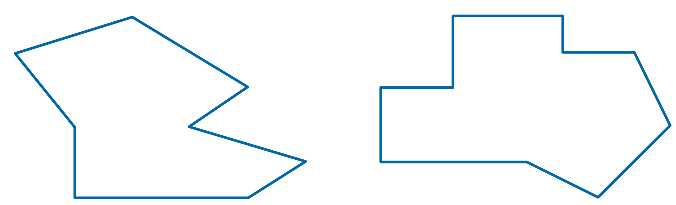
Un aspecto a tener en cuenta es el significado que dan los alumnos a las expresiones ‘base’ y ‘altura’, ya que cuando los dibujos aparecen siempre en la misma posición esto lleva a asociar la base con un segmento horizontal; y la altura, con uno vertical. Igualmente habrá que descubrir que en un mismo triángulo es posible identificar tres pares de datos que permiten calcular el área.

Así como para el área, una parte del trabajo sobre perímetro estará dedicada a las mediciones efectivas; otra parte a la construcción de fórmulas; y otra a la diferenciación entre perímetro y área.

Ejemplo 7

Para que las actividades de medición efectiva de perímetros con unidades convencionales resulten un verdadero desafío es necesario presentar, para su comparación, dos polígonos irregulares dibujados en hoja lisa de, por ejemplo, 8 y 10 lados, y cuyos perímetros estén entre 45 cm y 55 cm.

¿Cuál de los siguientes polígonos tiene mayor perímetro?



En una puesta en común, posterior a las mediciones efectivas, es posible registrar los resultados obtenidos en el pizarrón y discutir respecto de las formas de expresar las longitudes (en cm y mm, en mm con escrituras con coma, etc.). También convendrá debatir sobre las posibles razones de las diferencias entre las medidas: en el caso de que el largo del segmento no pueda leerse en un número entero de mm, ¿qué pasa si elijo siempre la raya de atrás? ¿o siempre la de adelante? ¿cómo hacer para equilibrar las faltas o los excesos?

También podrán ser analizadas las distintas formas de determinar el perímetro, considerando ventajas y obstáculos. Por ejemplo, si hay segmentos que no han sido medidos, ¿cómo hacer para no olvidarse de ninguno?; al ubicar de manera incorrecta la regla sobre el segmento medido, ¿desde dónde empezar a contar para leer correctamente?; si hay errores de cálculo en la suma de longitudes, ¿por qué no pensar en utilizar la calculadora para controlar?

Es interesante analizar el valor máximo obtenido para cada perímetro, así como el valor mínimo y determinar si alguno de ellos no resulta razonable en función de la precisión del instrumento que ha sido usado. A partir de considerar estas cuestiones lograremos encontrar un intervalo que incluya las respuestas razonables encontradas por los alumnos y no una “respuesta correcta”, encuadrando el resultado de la medición. Por ejemplo, el perímetro está entre 48,5 cm y 49 cm. Y por qué no pensar en una escritura del tipo 46,9 cm < perímetro de la figura 1< 50,7cm, donde los valores planteados son el máximo y mínimo razonables encontrados por los alumnos.

La tarea de realizar prácticas efectivas de medición no es fácil ni cómoda y, por lo general, los maestros se enfrentan con algunos problemas: inexistencia de instrumentos de medida en cantidad suficiente para todos los alumnos; instrumentos defectuosos o con ligeras diferencias; problemas de precisión en la lectura o en el uso del instrumento; problemas de escritura de la medida resultante, etc.

Lo dicho pone de relieve la importancia de la preparación minuciosa y previa, por parte de los maestros, de las actividades a realizar y de las condiciones que las mismas exigen para el logro de sus objetivos.

Proponemos vincular el estudio del perímetro con lo enseñado en geometría sobre lados de las figuras; por ejemplo, al analizar cómo varía el perímetro a partir de la introducción de modificaciones a una figura patrón.

Ejemplo 8

Situaciones como las siguientes, que evitan el cálculo, son muy convenientes porque ponen en juego el concepto de perímetro, que constituye la base para pensar, luego, la vinculación con el área.

¿Es posible saber, sin medir, si una de estas figuras tiene mayor perímetro que otra o no, o si son iguales?

¿Qué otras variaciones podrían ser realizadas en la Figura 1 para que resulte en la segunda un perímetro mayor y qué variaciones para que resulte uno menor?


Fig. 1

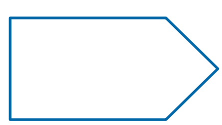


Fig. 2

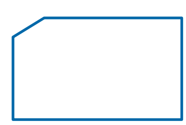


Fig. 3

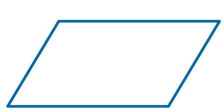


Fig. 4

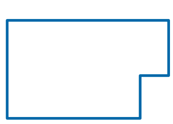


Fig. 5

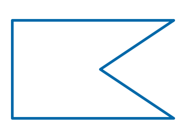


Fig. 6

El objetivo de esta actividad es que los alumnos, a partir de la información del rectángulo y sin medir, puedan establecer relaciones entre las figuras para analizar qué sucede con el perímetro en las distintas variaciones.

Por ejemplo, pueden averiguar que el perímetro de la Figura 2 será mayor que el del rectángulo de la Figura 1 y que los lados que forman la punta representan una longitud mayor que la del lado del rectángulo.

Una discusión interesante podría presentarse a raíz de la comparación entre el rectángulo y la Figura 5, en que para más de un alumno será una sorpresa que los perímetros sean iguales.

Para el cálculo del perímetro habrá que seguir un camino similar al planteado para el área, hasta el arribo a la fórmula de perímetro de rectángulos y de cuadrados. Por otra parte, es importante también presentar otras alternativas que pongan el acento en cuáles son los datos necesarios para calcular el perímetro de distintas figuras.

Ejemplo 9

Los siguientes son ejemplos donde se requiere un análisis de la información ofrecida, para inferir los datos necesarios y, así, resolver la situación planteada.

> *Doña Juana tiene que alambrar su terreno, que es rectangular. La Municipalidad ya alambró los 20 metros de frente que están sobre la ruta. En total, le falta alambrar 70 metros. Para mayor protección, doña Juana quiere poner alambre de púa solamente en los costados del terreno. ¿Cuántos metros de alambre de púa tendrá que comprar?*

> *Alicia está haciendo un almohadón cuadrado de 50 cm de lado. Para adornarlo, quiere coser en una de sus caras una puntilla colocada a 5 cm del borde formando otro cuadrado. ¿Cuánta puntilla necesita?*

El área y el perímetro son dos conceptos íntimamente ligados, por lo que el estudio de dicha relación no debería quedar afuera de la escuela. Su exploración favorece el mayor entendimiento de determinadas propiedades que sólo quedan en evidencia a partir de un trabajo de diferenciación entre las mismas. Esta práctica no toma en cuenta que las magnitudes área y longitud están íntimamente relacionadas, y por lo tanto se impone un trabajo de diferenciación entre ellas, que colabore en la mayor comprensión de cada una.

Generalmente, una dificultad que tienen los niños frente a la resolución de problemas es que sólo pueden aplicar sus conocimientos si poseen toda la información dada en forma directa; es decir dada como dato. Por este motivo, presentar problemas en los cuales sea necesario analizar el enunciado y observar si la información es suficiente, o no, para obtener la respuesta buscada –o si hay datos que no son necesarios– a la vez que introduce una problemática ligada al tratamiento de la información, plantea la necesidad de analizar las propiedades de la figura dada y relacionarla con los datos proporcionados.

Hemos planteado que algunas dificultades que muchos alumnos presentan para diferenciar perímetro y área pueden atribuirse, al menos en parte, a un tratamiento escolar poco articulado. Es frecuente que en tercer o cuarto grado se calculen perímetros, y áreas en quinto o sexto; pero sin establecer situaciones que permitan vincular estas medidas, o discutir si un aumento en el perímetro deriva necesariamente en un aumento del área, situación que solo puede generalizarse para el caso de polígonos regulares.

Una idea intuitiva muy común en los alumnos, es que las dos magnitudes varían de la misma manera: si una aumenta, la otra también lo hace; y si una se mantiene constante la otra actúa de la misma manera.

Ejemplo 10

A continuación, presentamos un juego cuyo primer objetivo es poner en evidencia para los alumnos que hay diferentes figuras que tienen la misma área, del mismo modo que hay diferentes figuras que tienen el mismo perímetro.

Se necesitan 60 cuadraditos de igual tamaño en cartulina o plástico, 10 tarjetas que digan *área*, con los siguientes números: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13; y otras 10 tarjetas que digan *perímetro*, con estos números: 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30. La clase se organiza de modo que haya grupos formados por dos personas en cada uno.

Los cuadraditos son puestos en el centro de la mesa con las tarjetas numeradas, revueltas, y puestas boca abajo. Por turno, uno de los jugadores levanta una tarjeta y la lee en voz alta. El juego consiste en formar –con los cuadraditos– configuraciones en las que estos estén unidos por un lado completo, y que tengan las áreas o perímetros estipuladas en las tarjetas. La unidad de medida para el perímetro es el lado de los cuadraditos; y la unidad de medida para la superficie, cada uno de los cuadraditos.

Durante un tiempo estipulado previamente, cada grupo trata de armar la mayor cantidad de configuraciones que respeten la condición dada por la tarjeta, utilizando los cuadraditos que están en el centro de la mesa.

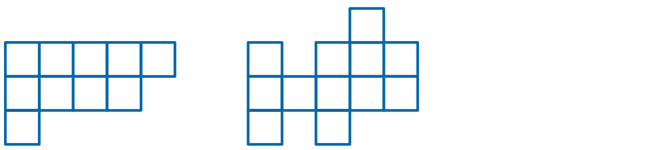
Pasado el tiempo, son expuestas las configuraciones y se adjudica 1 punto a cada configuración correcta y 0 puntaje a las incorrectas; los cuadraditos vuelven al centro de la mesa para la próxima jugada. El juego termina cuando alguno de los grupos alcanza 15 puntos.

Luego de un primer momento de juego, es recomendable realizar una confrontación en la que sean analizados los diferentes procedimientos y respuestas de los alumnos. Este primer debate debería permitir poner en común y, en algunos casos sistematizar, procedimientos y estrategias de los alumnos para obtener las figuras. Así como también analizar cuáles les resultaron más difíciles de lograr y por qué.

Después, el maestro puede presentar problemas sobre la misma cuestión que permitirán poner en práctica las conclusiones obtenidas en el juego, en la línea de estos ejemplos:

Marisa dijo que cuando a su grupo le tocó la tarjeta 'área 10', armaron 6 figuras, ¿cuáles pudieron haber sido esas figuras?

El grupo de Hernán armó las siguientes figuras a partir de la tarjeta 'perímetro 18', ¿cuáles van a obtener puntaje?



Otra actividad orientada en el mismo sentido de los problemas anteriores y que, si se propone luego de ellos, puede contribuir a la profundización de las reflexiones iniciadas, es la siguiente:

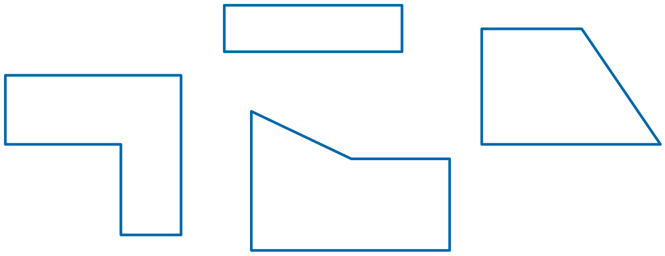
Ejemplo 11

En ellas aparecen algunas formas que no son posibles de construir a partir de los materiales del juego.

Cuando sea posible, transforma (agregándoles o sacándoles algo) las siguientes figuras, para obtener otras que tengan:

a) un área mayor, pero que conserven el mismo perímetro.

b) un área menor y un perímetro mayor.



Estas dos últimas consignas piden a los alumnos que manipulen figuras para obtener otras que mantengan ciertas condiciones, y que además evalúen la posibilidad de realización de dichas variaciones.

En la primera, en dos de las figuras no es posible obtener otra que tenga mayor área e igual perímetro: puesto que son convexas, cualquier variación que implique aumentar el área, aumentará, a la vez, el perímetro. En el segundo caso, en cambio, sí es posible realizar las transformaciones necesarias para cualquiera de las figuras dadas, ya que al quitar una sección a la figura, disminuye el área y aumenta el perímetro.

Habitualmente, el término ‘cantidad’ es utilizado para indicar el valor que toma una magnitud en un objeto particular. Por ejemplo, el largo de una varilla; pero esa longitud también hace referencia a cualquier objeto que pueda superponerse exactamente con el largo de esa varilla. Por eso, para comunicar cantidades sin necesidad de tener a la vista las unidades usadas para medir fue creado un sistema de unidades. Si bien cualquier sistema podría ser válido y cómodo para expresar las mediciones, hay razones que justifican el uso de un sistema regular común acordado universalmente.

En la actualidad, el de uso más extendido es el sistema métrico decimal, que realiza los cambios de diez en diez en las magnitudes lineales y según las potencias de diez en las otras magnitudes.

La utilización de cambios regulares es, precisamente, lo que asemeja el sistema de medidas al sistema de numeración. En ambos casos es necesaria la comprensión de los diferentes órdenes de unidades para entender y elaborar escrituras numéricas. La escritura de la medida tiene su equivalente en lo que refiere a la descomposición de un número en unidades, decenas y centenas, etc.

El dominio de las escrituras de cantidades a partir de un sistema regular de medidas suele ser objeto de trabajo en sexto grado. El problema de las escrituras equivalentes es complejo, ya que su comprensión involucra otros conceptos: por ejemplo, el valor de posición y la importancia del cero. A los problemas relativos a los números decimales hay que añadir aquellos propios de la medida, en lo referente a escrituras con diferentes unidades. Los alumnos suelen cometer errores para pasar de la lectura a la escritura de cantidades cuando éstas tienen ceros.

Ejemplo 12

La siguiente actividad debe presentarse teniendo en cuenta las unidades ya conocidas por el grupo. Estas podrían ser las que incluyen el ejemplo u otras.

El propósito de este problema es favorecer en los alumnos el establecimiento de relaciones entre los distintos órdenes de magnitud.

Dadas las siguientes cantidades, agrúpalas según sean mayores que un metro o menores que un metro. Justifica tus respuestas.

0,1 km	*900 cm*	*86000 mm*
750 dm	*1,6 hm*	*12 dam*

Algunos alumnos afirman que todas las cantidades son mayores que un metro; pero dicen que 0,1 km es menor o que hay tres menores (señalando 900 cm, 86000 mm y 750 dm). Entre las justificaciones dadas por ellos, aparece que algunos consideran la medida sin tener en cuenta la unidad, por ejemplo *0,1 km* es menor que un metro porque *0,1* es menor que *1*. Otros tienen presente la unidad de medida independientemente de la medida: *0,1 km* es mayor que el metro porque tiene el km y agrupan como menores que el metro las medidas *900 cm*, *86000 mm*, *750 dm*. Para el caso del 1,6 hm, en general aparece como mayor que el metro, ya sea porque consideraron la unidad de medida o la medida.

Para seguir trabajando con estas relaciones, es posible pedirles que ordenen de mayor a menor las cantidades anteriores. En este caso, no es suficiente compararlas con un metro para encontrar la respuesta, deberán comparar las cantidades entre ellas.

Es posible que la mayoría de los alumnos expresen las cantidades en metro y luego las ordenen. En este caso, una intervención posible es preguntar: "si un niño expresa todas las cantidades en otra unidad, ¿van a quedar ordenadas de igual manera o no?". También es posible pedirles que anticipen cómo será el tamaño de los números, en función de la unidad elegida: "*¿si pasamos todos a hm o dm ¿en qué caso los números serán más grandes?*"

También esta materia permite proponer algunas transformaciones para analizar:

> *Un niño leyó 'la décima parte de un kilómetro' y escribió 0,1 km 1/10 de 1000 m = 100 m ¿es correcto?*
>
> *O bien: Un niño para 1,6 hm dijo: '1hm es una cuadra, es decir 100 metros, entonces 1,6 son 106 metros' ¿están de acuerdo?*

A partir de esta actividad el maestro puede concluir que: para ordenar cantidades, o compararlas, es conveniente siempre expresarlas en una sola unidad de medida, la que no tiene por qué ser siempre el metro, puede ser otra.

Ejemplo 13

Para avanzar en las relaciones que explicitaron los alumnos, en relación a que cuánto más chica es la unidad de medida, mayor es la medida; y viceversa, podremos plantear situaciones donde entren en juego las equivalencias entre cantidades y sean explicitadas las relaciones entre medidas y unidades de medidas, como en la siguiente:

Teniendo en cuenta lo discutido sobre unidades y medidas, responde:
a) ¿Será verdad que si elegimos unidades mayores, el valor de la medida será menor? ¿Por qué?
b) ¿En qué unidad expresarías 86 m; sin variar la cantidad, para que la medida sea mayor que la dada?
c) Se quiere expresar la siguiente cantidad –25 cm– en una unidad de medida 100 veces mayor. ¿Cuál es la unidad? ¿Cuántas veces más pequeña es la medida?
d) ¿En que unidad expresarías la cantidad 86000 mm para que la medida (el número) sea más pequeño y no varíe la longitud?

En estas actividades veremos que los alumnos pondrán en juego algunas relaciones y conocimientos que han aprendido anteriormente como, por ejemplo, aquellas entre múltiplos y submúltiplos en relación específica con el metro: 1m=100 cm, 1m = 1/10 dam; o, desde lo cotidiano, la relación 1 cuadra igual a 100 metros y asocian como si fueran sinónimos la cuadra y el hectómetro; o la regla del aula tiene 100 centímetros y las correspondencias entre la numeración hablada y las escrituras fraccionarias y decimales de los números y las relaciones 1/2 o 0,5 metro equivalen a 50 centímetros; 1 cuadra es un hectómetro, 100 metros; 1/2 cuadra equivale a 50 metros; 1/4 de cuadra a 25 metros, dos cuadras y media son 250 metros (2,5 hm = 250).

En todos estos casos es importante la reflexión permanente sobre las equivalencias de cantidades de diferentes magnitudes utilizando unidades no convencionales y convencionales, con las relaciones de décimas, centésimas, etc. De forma similar podemos proponer actividades como la presentada aquí para poner en juego las relaciones que se establecen en el Sistema Legal de medidas.

Ejemplo 14

Completa para que las expresiones resulten equivalentes:

10 cm =..... m	*10 cm = ...0,1.....*
10..... = 0,1 m	*.....cm = 0,1.....*

Si bien los ejemplos anteriores han sido desarrollados teniendo en cuenta la longitud, que es la magnitud que con mayor frecuencia aborda el tratamiento escolar y permite comprobaciones empíricas muy accesibles, el mismo tipo de trabajo puede plantearse para situaciones referidas a capacidades o pesos.

Cabe advertir que para los alumnos no es directa la generalización: si 1 kilómetro equivale a 1000 metros, kl equivale a mil litros y kilogramo a mil gramos, o que si para expresar una misma cantidad la unidad se reduce a la décima parte, la medida resulta 10 veces mayor, tanto para longitudes como para capacidades y pesos. En este sentido, no basta con trabajar en profundidad la longitud para pasar luego a sistematizar las relaciones entre unidades para otras magnitudes sin desarrollar antes actividades específicas al respecto.

SOBRE EL DOMINIO DE ESTADÍSTICA O DEL TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

En relación con los contenidos de este dominio consideraremos el problema *Libros vendidos*, presentado en tercer grado.

Libros vendidos por mes

Grado	Tercer grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Interpretar información directa de un gráfico de barras.
Nivel de desempeño	Nivel I
Respuesta correcta	A : Enero

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	75,64%
Porcentaje de respuestas de los distractores	B : 9,01 % C : 6,16 % D : 6,02 %
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	3,17%

19 La venta de libros de una librería en los primeros meses del año se muestra en el siguiente gráfico:

¿En qué mes hubo mayor venta de libros?

- A Enero.
- B Febrero.
- C Marzo.
- D Abril.

DM3.B2.IT07

Este ítem, con un alto porcentaje de respuestas correctas, remite a una interpretación directa del gráfico que no necesita la consideración de los valores que toman las variables. Basta con identificar cuál es la columna más alta.

Sin embargo en otro ítem, con características similares pero en el que la pregunta requiere reunir los valores correspondientes a dos de las variables, el porcentaje de respuestas correctas desciende al 12%; mientras que para la opción donde se reúne las dos variables con mayores valores, el porcentaje es del 44%. Los niños consideran los valores que corresponden a las columnas más altas y los suman, sin tener en cuenta que la pregunta no está referida a esas variables.

Para seguir trabajando en clase, en el caso de la venta de libros podrían presentarse otras preguntas como:

Ejemplo 1

¿Cuántos libros fueron vendidos en los cuatro meses?
¿Es cierto que en abril se vendió el triple de libros que en febrero?
En mayo, el librero espera vender más libros que en abril pero menos que en enero, ¿cuántos libros espera vender?
¿Cuál es la diferencia entre las ventas de enero y las de febrero? ¿Y entre febrero y marzo?
Si cada 4 meses el librero vendiera aproximadamente la misma cantidad de libros, ¿cuántos libros podría vender en el año?

Al trabajar sobre la interpretación de gráficos, es frecuente que los maestros no adviertan la necesidad de variar las preguntas y de que éstas tengan un propósito. Por ello las preguntas responden más a un 'interés escolar' que a una verdadera necesidad.

En este sentido es muy útil que los gráficos analizados tengan relación con algún contenido de Ciencias Sociales o Naturales en curso, y que su análisis aporte información para el tema en estudio. De otro modo es difícil advertir si las conclusiones a las que los alumnos llegan son razonables o no, y cuáles serían las consecuencias de tomar esa información como válida.

La presentación escolar para ejercicios de resolución de problemas aritméticos, generalmente, es hecha por medio de un enunciado. No es frecuente que los maestros usen diferentes portadores e incluyan más información que la imprescindible para resolverlo. Sin embargo, cuando enfrentamos un problema fuera del contexto escolar, muchas veces es necesario buscar y organizar la información necesaria para solucionarlo y tomar decisiones acerca de qué datos usar. Tal como señalábamos en relación con la idea de contrato didáctico, muchos niños piensan que un problema es un enunciado con datos que deben ser usados en uno o más cálculos y cuyo resultado es la respuesta a la pregunta planteada.

La prueba de matemática del SERCE, en cambio, se propone dentro de un marco en el que los conocimientos matemáticos deberían tener sentido también fuera de la escuela. Si la idea es formar a los alumnos para desenvolverse con éxito en la vida social, interpretando el mundo en una variedad de situaciones, es imprescindible promover en la escuela el desarrollo de las habilidades de interpretar y analizar información presentada en distintos portadores.

Este trabajo podrá comenzar con actividades de interpretación de tablas y avanzar luego en la organización de datos recogidos frente a alguna investigación.

Dado que, en muchos casos, los gráficos involucran relaciones de proporcionalidad, es posible vincular esta tarea con problemas multiplicativos. Ya sea para hacer barras o pictogramas, o más adelante gráficos de sectores, se usan escalas que conservan la proporcionalidad entre las cantidades intervinientes en la situación.

Ejemplo 2

A la salida de una biblioteca escolar está publicado el siguiente gráfico:

¿Qué leen los niños?
Pedidos a la biblioteca de la escuela

¿Cuáles fueron los libros más pedidos?
¿Cuántos libros se prestaron en lo que va del año?
Si quisieran comprar nuevos libros, ¿les sirve la información del gráfico para decidir la compra?¿Cómo?

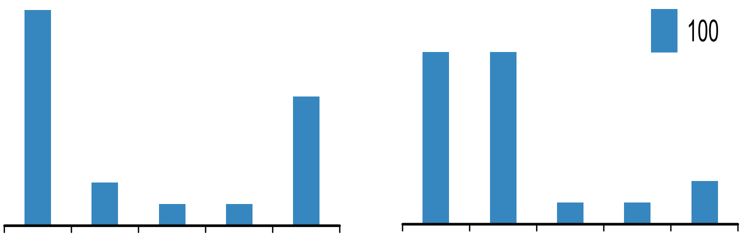
También son interesantes aquellas situaciones en las que sea necesario pasar la información de una forma de presentación a otra, ya que –además de analizarla– interesa discutir qué tipo de presentación resulta más adecuada para las necesidades de quien la organiza.

Ejemplo 3

Se realizó una encuesta a 1000 alumnos de escuelas primarias acerca de la cantidad de horas que ven televisión por día. Los siguientes fueron los resultados:

Cantidad de horas de TV	*Cantidad de personas*
1	*500*
2	*100*
3	*50*
4	*50*
5 o más	*300*

Al observar los valores, podemos plantear la posibilidad de que los alumnos realicen un informe escrito acerca de las características de esta población, qué es observable acerca de los valores extremos, etc.; para luego proponer que descubran cuál es el gráfico que corresponde a esta tabla; que argumenten acerca de su afirmación y completen con los valores correspondientes.



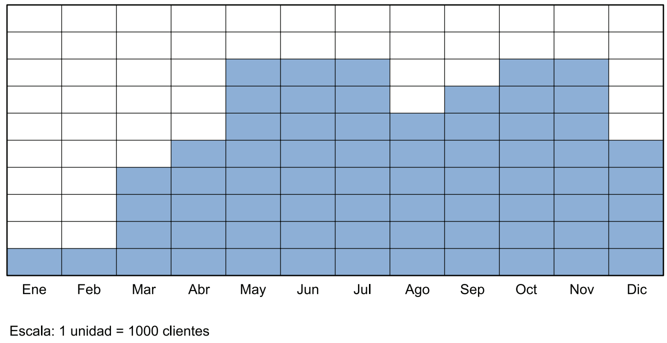
Una vez descubierto cuál es el gráfico correcto, el profesor puede proponer que los alumnos confeccionen una tabla con los valores que corresponden al otro. Así estaremos creando una situación de reversibilidad respecto del análisis de la información entre tabla y gráfico, previa a la producción de los mismos por parte de los alumnos.

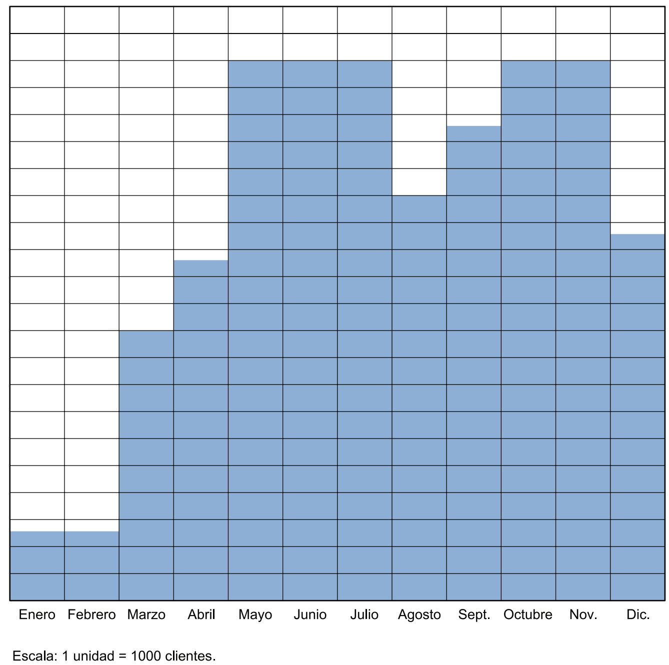
Más adelante el docente podría trabajar modificando las escalas y determinando cuál es la intención del que presenta el gráfico. Una misma información mostrada en gráficos con distintas escalas puede dar lugar, para el lector poco atento, a interpretaciones erróneas.

La elaboración de gráficos involucra decidir no solo el tipo de gráfico que se desee usar, sino también la escala, en función de los datos disponibles y de la situación en estudio.

Ejemplo 4

El dueño de un negocio encargó a dos empleados que le trajeran información sobre los clientes atendidos durante el año. Uno de ellos aseguró que el gráfico del otro estaba mal, ya que el suyo mostraba, claramente, que había más clientes. ¿Es cierto lo que dice?





En relación con el tratamiento de la información, también hay que tener en cuenta la necesidad de entregar problemas en los que se varíe la forma de presentación de los enunciados –con texto, con tablas, con gráficos, con portadores sociales de información como menús, horarios de micros, listas de precios–, modificando las preguntas para que aparezcan algunas que puedan ser contestadas con un dato, otras que no sea posible responder y algunas que tengan más de una respuesta posible.

Igualmente es recomendable plantear a los niños una diversidad de tareas. Entre otras, inventar un enunciado, producir un procedimiento, analizar el procedimiento de otro, escribir cómo pensó para llegar al resultado, formular un instructivo para que otro resuelva como él, justificar por qué lo resolvió de cierta forma, y/o analizar argumentos de otros niños.

SOBRE EL DOMINIO DE VARIACIONES O DEL ESTUDIO DEL CAMBIO

En relación con los contenidos de este dominio, consideraremos los problemas presentados en sexto grado, sobre las nociones de proporcionalidad (caso de la variación lineal) y porcentaje, como caso particular de constante de proporcionalidad.

Presentamos a continuación los problemas de ítem denominados *Jugo y Canilla* y luego los problemas en los que interviene la noción de porcentaje, que hemos llamado sucesivamente *Reforestación*, *Deportes*, *Cultivos* y *Ciclismo*. Para cada uno desarrollaremos, primero, un análisis individual de los conocimientos involucrados en sus posibles resoluciones y, luego, un análisis conjunto que aporte nuevas conclusiones.

El análisis individual incluye los posibles procedimientos de resolución para desarrollar los conocimientos que permiten responder adecuadamente, y también las dificultades posibles que explicarían las demás alternativas de respuesta.

CANILLA Y JUGO

Ambos problemas proponen preguntas a partir de enunciados en los que intervienen magnitudes directamente proporcionales y difieren en los contextos elegidos, el tipo de magnitudes propuestas, el tipo de datos y su forma de presentación.

27 Con una canilla de agua de caudal constante se llenan botellas de igual capacidad. La tabla muestra los tiempos que tardan en llenarse.

Número de botellas	Tiempo
2	1 minuto
3	1 minuto y medio
4	2 minutos
5	2 minutos y medio
6	3 minutos

¿Cuánto tiempo tardan en llenarse 9 botellas?

- A 5 minutos
- B 4 minutos y medio
- C 4 minutos
- D 3 minutos y medio

DM3.B4.IT02

Canilla

Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que requiere
Respuesta correcta	B : 4 minutos y medio

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	56,36%
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 22,49 % C : 7,84 % D : 11,51 %
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	1,80 %

El problema *Canilla* (llave de agua) propone averiguar el tiempo de llenado de una cantidad de botellas y proporciona un enunciado que incluye un texto y una tabla con pares de datos correspondientes a las dos magnitudes, que son directamente proporcionales. En el enunciado está indicado que el caudal es constante, para señalar que el tiempo de llenado es igual para todas las botellas aunque el término ‘caudal’ puede ser desconocido para los niños.

El número de botellas es una cantidad discreta y, por lo tanto, expresada con números naturales; y el tiempo es una cantidad continua expresada, en cada caso, con número y unidad. En efecto, la parte entera está expuesta en forma numérica; pero la fracción del entero incluido ($\frac{1}{2}$) está indicada con la palabra “medio”, así como la unidad utilizada, minuto.

Los procedimientos correctos que podrían usar los alumnos para resolver están explicados por las propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa. Así por ejemplo, es posible analizar las diferencias constantes de 1 y $\frac{1}{2}$ en cada columna, o que a 2 de diferencia en la cantidad de botellas corresponde 1 minuto de diferencia en el tiempo de llenado (Procedimiento A). Por otra parte, si a 5 botellas le corresponden 2 minutos y $\frac{1}{2}$; y a 4, 2 minutos, entonces, a 9 botellas le van a corresponder 4 minutos y $\frac{1}{2}$ (Procedimiento B).

Número de botellas	Tiempo
2	1 minuto
3	1 minuto y medio
4	2 minutos
5	2 minutos y medio
6	3 minutos

También es posible usar la “propiedad escalar”. Por ejemplo, entre los pares (2 ; 1) y (4 ; 2) “al doble de botellas corresponde el doble de tiempo de llenado” (Procedimiento B) y de allí calcular que como 9 es el triple de 3 botellas le corresponde el triple de 1 minuto y medio. El triple, además, se podría calcular multiplicando o sumando.

Número de botellas	Tiempo
2	1 minuto
3	1 minuto y medio
4	2 minutos
5	2 minutos y medio
6	3 minutos

Asimismo la propiedad de la suma de pares y la suma de sus correspondientes (Procedimiento C), por ejemplo, a la suma de 2 + 3 le corresponde la suma de 1 minuto + 1 minuto y medio.

Número de botellas	Tiempo
2	1 minuto
3	1 minuto y medio
4	2 minutos
5	2 minutos y medio
6	3 minutos

Otra alternativa sería averiguar la constante de proporcionalidad; en este caso, el tiempo de llenado de una botella (Procedimiento D). De ese modo, para 9 botellas habría que calcular $\frac{1}{2}$ minuto x 9 o sumar 9 veces $\frac{1}{2}$ minuto.

Finalmente, podrían tomar cualquier par de datos correspondientes y escribir una proporción o un planteo para averiguar el cuarto proporcional; es decir, usar la conocida "regla de tres" (Procedimiento E): si para 6 botellas, 3 minutos, para 9 botellas X minutos.

6 botellas ------------- 3 minutos
9 botellas------------- X minutos

Entonces $\frac{6}{9} = \frac{3}{x}$ $\quad x = \frac{9 \bullet 3}{6} = 4\frac{1}{2}$

Las alternativas de respuestas erróneas implicaron considerar sólo la regularidad de aumentar medio en la serie de los tiempos (D: 3 minutos y medio, respuesta del 11,51 % de los niños) sin advertir que 9 no es el siguiente de 6. También supusieron que como 9 está bastante lejos de 6 hay que poner la cantidad mayor o sumar todos los números de la columna de los tiempos, sin tomar en cuenta los medios ya que están escritos con palabras (A: 5 minutos, respuesta del 22,49 % de los niños). Otra respuesta partió de la base que 9 es más que 1 de diferencia con 6 y, por eso, va el subsiguiente en la serie de los tiempos (4 minutos, respuesta del 7,84 % de los niños).

Por su parte, el problema *Jugo* propuso averiguar la cantidad de kilogramos de manzanas necesarios para producir una cantidad dada de litros de jugo, y proporcionó un texto en el que aparece un dato de cada una de las dos magnitudes relacionadas, que son directamente proporcionales. Los números son naturales, de 2 y 3 cifras.

Al considerar, por ejemplo, un problema similar en que se solicita calcular cuántos kilogramos de dulce puede fabricar un productor artesanal que dispone de 220 kilogramos de fruta sabiendo que con 55 kg pueden hacerse 100 kilogramos de dulce, los procedimientos de resolución podrían ser los enumerados anteriormente.

Es posible que los alumnos que dominen el cálculo mental adviertan que 220 es el cuádruple de 55 y multipliquen 100 x 4 obteniendo fácilmente el resultado (400).

También pueden hacerlo en dos pasos calculando dobles:

55	*100*
110	*200*
220	*400*

Otros pueden calcular el valor que corresponde a 1kg de fruta haciendo 100 ÷ 55 y, como este resultado es 1,8181818181... si consideran 1,81 y lo multiplican por 220 el resultado obtenido es 398,2 y no 400 lo que puede llevar a un interesante análisis en la clase.

También sucede que existen alumnos que organizan una proporción: 55 : 100 :: 220 : X. Igualmente podría usarse una estrategia de cálculo aproximado para controlar el resultado, razonando que como la cantidad de kilos de dulce es un poco menos que el doble de kilogramos de fruta, el resultado tendrá que ser un poco menos que 440.

Los errores más frecuentes de los alumnos en los problemas de proporcionalidad, en relación con el modelo en el que piensan, devienen del uso de modelos aditivos que les hacen pensar, para este caso, que si a 55 kilogramos hay que agregarle 165 para tener 220, entonces a 100 kilos hay que agregarle también 165 y podrían decir que la respuesta es 265 kilos.

El contexto elegido para el problema *Canilla* favorece la comprensión del enunciado, ya que refiere a la actividad de llenado de botellas aunque no la han realizado, la han podido ver en sus hogares. La presentación de datos en lenguaje coloquial favorece su interpretación, ya que esta fracción tiene un uso social extendido y por lo tanto los alumnos pueden darle sentido, aun cuando no hayan trabajado el tema en la escuela. Por otra parte, su presentación en una tabla favorece el establecimiento de regularidades en ambas columnas. Así, obtiene más de 56% de respuestas correctas.

Aunque el problema *Jugo* presenta un contexto comprensible, y la información está presentada en el orden en que se podría escribir un planteo para usar la “regla de tres”; como ya hemos analizado, no presenta apoyos para usar otros procedimientos, por lo que disminuye el porcentaje de aciertos respecto del problema “canilla”, obteniendo sólo un 35 % de respuestas correctas.

Es posible que, en menor medida, la disminución esté también relacionada con el tamaño de los números que, en este caso, son de dos y de tres cifras en lugar de ser de sólo una cifra, como ocurre con el problema *Canilla*.

Para ambos problemas, la respuesta elegida como correcta en segundo lugar es la que considera un tratamiento de los datos que no toma en cuenta las relaciones en juego (suma todos los números de una columna).

PORCENTAJE

Los problemas que analizamos proponen preguntas a partir de enunciados textuales y sólo en un caso incluyen un gráfico. En ellos difieren las magnitudes involucradas, el tamaño y tipo de números y la tarea propuesta a los alumnos.

El problema que denominamos *Reforestación* da dos cantidades y pide calcular qué porcentaje es una de la otra. Son dos áreas expresadas con número naturales pequeños: 15 y 3.

29 Una familia ha reforestado 3 hectáreas de un bosque de 15 hectáreas. ¿Qué porcentaje del bosque reforestó?

- A 12%
- B 20%
- C 25%
- D 45%

Reforestación

Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que requiere calcular un porcentaje
Respuesta correcta	B : 20 %

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	27,20 %
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 29,18 % C : 12,40 % D : 27,24 %
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	3,98 %

Como en todo problema de proporcionalidad, los procedimientos de resolución ya mencionados para los problemas anteriores, implican el uso de sus propiedades. En este caso, es posible asociar el porcentaje a la idea de parte de un todo, y buscar una o más fracciones equivalentes para expresar esa parte: entonces, $\frac{3}{15}$ es equivalente a $\frac{1}{5}$ y también a 20/100 (Procedimiento A).

La respuesta correcta fue elegida por el 27,20 % de los estudiantes. Las alternativas de respuestas erróneas implican que los alumnos consideraron una manipulación inadecuada de los datos. Por ejemplo, la resta de los datos (A: 12 % con 29,18 % de niños) o el producto de los datos (D: 45 % con 27,24 % de los niños).

El problema que denominamos *Cultivos* también da dos cantidades, y pide calcular qué porcentaje es una de la otra. Son dos áreas expresadas con números naturales más grandes: 1200 y 6000. Un 30,7 % de los niños entregaron la respuesta correcta (C: 20 %) y las alternativas de respuestas erróneas también implicaron considerar una manipulación inadecuada de los datos. Por ejemplo, la resta de los datos y la eliminación de dos ceros (D: 48 % con 29,4 % de niños) o el cociente de los datos (A: 5 % con 13,6 % de los niños).

Deportes

Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que requiere utilizar el concepto de porcentaje asociado a fracción.
Respuesta correcta	C : Básquetbol

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	28,92 %
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 13,53% B : 9,10 % D : 46,64 %
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	1,71%

Deportes es un problema que pide reconocer, en un gráfico, el sector que representa el 25%, que corresponde al básquetbol. El porcentaje está asociado con uno de los primeros porcentajes que se suele enseñar, por corresponder a $\frac{1}{4}$, que es fácil de marcar en el gráfico de torta. Pese a ello, sólo responde en forma correcta 28,92 % de niños, mientras que el mayor porcentaje (46,64 %) respondió en forma inadecuada, indicando que era el fútbol. Podemos inferir que eligen esa respuesta pues este deporte tiene un mayor número de adeptos.

25 El gráfico representa el porcentaje de amigos de Ignacio que practican solamente un deporte.

¿Qué deporte practica exactamente el 25% de los amigos de Ignacio?

- A Tenis
- B Natación
- C Basquetbol
- D Fútbol

DM3.B4.IT02

Ciclismo

Grado	Sexto grado de básica o primaria
Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que involucra el concepto de porcentaje
Respuesta correcta	B : 81

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	38,03 %
Porcentaje de respuestas de los distractores	A : 26,07 % C : 11,45 % D : 20,95 %
Porcentaje de respuestas omitidas o inválidas	3,51 %

En cuanto al problema *Ciclismo*, éste pide calcular el porcentaje, siendo los datos y el porcentaje números naturales.

29 En la escuela de Sonia hay 540 niñas. El 15% de ellas practica ciclismo. ¿Cuántas niñas practican ciclismo?

- A 36
- B 81
- C 459
- D 525

DM6.B4.IT13

Hay errores frecuentes que debieran ser tenidos en cuenta para discutir sobre ellos y cuestionarlos. Tal es el caso de considerar en situaciones donde hay un crecimiento proporcional que éste es aditivo y, entonces, si el maestro da un par de elementos correspondientes de la relación y pide buscar otros pares, intentan sumar siempre la diferencia entre los elementos del par dado. Este error se traslada luego a situaciones más generales y lleva, en los inicios del álgebra, a dar por correcta la eliminación del término b en la siguiente ecuación:

$$(a + b)/c = (d + b)/c$$

El campo de problemas que pueden ser resueltos usando la noción de proporcionalidad es muy amplio y, durante la escolaridad primaria, comienza con el estudio de aquellos en los que intervienen magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Desde los primeros años de escolaridad, los niños son enfrentados a problemas que involucran la noción de proporcionalidad en los que aparece el valor unitario. Por ejemplo: "si 1 caramelo cuesta 10 centavos, ¿cuánto cuestan 8 caramelos?"; o donde se pregunta "si 5 caramelos cuestan 50 centavos, ¿cuánto cuesta un caramelo?".

Para continuar este trabajo, es posible plantear problemas sin informar cuál es el valor unitario, para que los niños usen, en forma implícita, dos de las propiedades que caracterizan a las relaciones de proporcionalidad directa: al doble de una cantidad le corresponde el doble de la otra; y a la suma de dos cantidades le corresponde la suma de las cantidades correspondientes. También son útiles las situaciones donde deben analizar si se cumplen o no las propiedades que permiten afirmar que están en presencia de una relación de este tipo.

Más adelante, el desafío será ofrecer a los alumnos la oportunidad de avanzar en los procedimientos de resolución de los problemas donde intervienen magnitudes directa e inversamente proporcionales, utilizando constantes de proporcionalidad con diferentes significados y comparando constantes.

En todos los casos, luego de resolver habrá que proponer el análisis de esas estrategias para separarlas del problema, con el propósito de que puedan reinvertirlas en otras situaciones. Reflexionar sobre las propiedades que actúan como instrumentos de resolución en los problemas de proporcionalidad y dominarlas para decidir cuál usar según los números que aparecen, significará para los alumnos contar con herramientas cada vez mejores. Asimismo, les permitirá avanzar en la conceptualización de la proporcionalidad.

Cabe destacar que no ayudará a los alumnos comunicar y mostrar cómo funciona la "regla de tres" para resolver este tipo de problemas, esperando que luego ellos la apliquen, sino que la tarea de los maestros será generar situaciones donde sea posible poner en juego dichas estrategias.

La construcción del concepto de proporcionalidad demanda varios años de la escolaridad. Diversos estudios señalan que los niños no consideran a la vez todas las propiedades que caracterizan esta noción, comenzando con la idea de monotonía creciente, luego con la propiedad escalar y la de la suma y, por último, la de la constante.

El campo de problemas de la proporcionalidad incluye situaciones de ampliación y reducción de figuras aplicando alguna escala: aquellas donde la constante de proporcionalidad es un porcentaje, las que incluyen equivalencias entre unidades de medida, las que plantean velocidades constantes, las de reparto proporcional e, incluso, aquellas en las que se da una doble proporcionalidad, como es el caso de las variaciones del área de un rectángulo al modificarse una dimensión mientras las otras son constantes.

Ejemplo 1

Si proponemos este tipo de problemas con las cantidades presentadas en tablas, facilitamos el establecimiento de las relaciones "al doble, el doble" y "a la suma, la suma", como en el siguiente caso:

Manuel es el encargado de la boletería de pasajes de mediana y larga distancia, y necesita calcular rápidamente el precio de distintas cantidades de boletos, sobre todo cuando, durante las vacaciones, llegan muchos clientes juntos. Para ahorrar tiempo, y no hacer la cuenta cada vez, armó esta tabla para los pasajes que llevan al pueblo más cercano.

Número de pasajeros	2	3	5	7
Precio de los boletos	24	36	60	72

-¿Cómo podría utilizar Manuel su tabla para calcular el valor de 4 boletos? ¿Y si fueran 6? ¿Y si suben 8 personas juntas? ¿Y si fueran 12?
-¿Por qué se le habrá ocurrido poner estas cantidades en su tabla?

Luego de que los alumnos resuelvan esta situación, el maestro puede centrar la discusión en cómo llegaron a los resultados, reflexionando sobre las formas de obtener el precio de 4 boletos o el de 6, conociendo el de 2 boletos. También sobre cómo calcular el precio de 5 u 8 boletos conociendo los precios de 2 y de 3.

Es habitual que, al iniciarse en el trabajo de proporcionalidad, todas las situaciones presentadas sean directamente proporcionales. En el trabajo matemático con una noción es necesario conocer en qué casos es posible usarla para resolver, y también conocer sus límites; es decir en qué problemas no es posible usarla. Por ello también convendrá presentar problemas donde sea necesario analizar los datos de distintas situaciones, para ver si presentan o no una regularidad que cumpla con las propiedades de la proporcionalidad directa.

Ejemplo 2

Entre los contextos que nos permiten proponer este trabajo, podemos considerar el cálculo de cantidades en una receta, del costo o la capacidad de distintos envases, o el análisis de distintas ofertas. Por ejemplo:

Indica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:
a) Para hacer una torta de manzana necesito 3 huevos; para hacer 3 tortas de manzana necesitaré el triple.
b) Para embaldosar dos aulas iguales necesito 238 baldosas; para embaldosar solo una, necesito 119.
c) Si, al año, Ema pesa 12 kg, a los 10 años pesará 120 kg.

d) Si con 24 baldosones cubro un piso de 3 m por 2 m, con 48 baldosones cubro un piso de 6 m por 4 m.

Otro contexto que favorece la discusión sobre la utilidad del modelo de proporcionalidad es el de las ofertas. También aquí el análisis de la constante resulta una herramienta útil para decidir si existe o no proporcionalidad.

Lorena fue a comprar $\frac{3}{4}$ kg de helados y en la lista figuraban los siguientes precios:

1 kg ----- $10
$\frac{1}{2}$ kg ---- $ 6
$\frac{1}{4}$ kg ---- $ 4

Lorena pensaba pagar $ 7,50 y el heladero le dijo que debía pagar $ 10.
a) ¿Por qué pensó Lorena que debía pagar $ 7,50?
b) ¿Cómo habría explicado el heladero como calculó el valor de $ 10?
c) Modifica el enunciado de la situación para evitar confusiones.

En esta actividad, los chicos pueden responder que Lorena pensó en el precio unitario y calculó el valor de los $\frac{3}{4}$ kg utilizando la proporcionalidad; en tanto que el heladero sumó los precios de $\frac{1}{2}$ kg más $\frac{1}{4}$ kg ($6 + $4), independientemente de cualquier relación de proporcionalidad.

Resulta interesante promover la discusión acerca de que, en los datos de la lista de precios, cuando la cantidad del helado es menor, el costo es menor; pero el mismo no disminuye en la misma relación. Por otra parte, el precio por cada kilo no representa la constante que permitirá determinar los valores de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. De los datos, resulta que para $\frac{3}{4}$ kg hay 3 precios posibles: $12, $10 y $7,50. Además, si la relación fuera de proporcionalidad, considerando el costo unitario, el $\frac{1}{2}$ kilo debería valer $5 y el $\frac{1}{4}$ kilo $2,50. Por último, en la lista de precios podríamos agregar alguna inscripción, como Oferta: ¡lleve 1 kg y pague solo $10!

El análisis de los precios de diferentes artículos presentados en distintos tamaños (gaseosas, aceites, jabón en polvo, yerba, etc.) en las góndolas de los supermercados favorecerá la lectura inteligente de la información y la toma de decisiones respecto de la presencia o no de ofertas.

Las actividades en las que hay que pasar de una forma a otra de representación de la relación de proporcionalidad también aportan a la construcción de sentido. Por ejemplo, se puede presentar una situación en un texto que dé lugar a confeccionar una tabla.

También es importante tener en cuenta que es posible incorporar nuevas representaciones de las relaciones de proporcionalidad, a las ya conocidas de enunciado textual y de tabla; como por ejemplo algunos gráficos estadísticos de barras o pictogramas, como demuestra el problema de los libros prestados por la biblioteca que expusimos en el apartado relativo al tratamiento de la información. Habrá que considerar, luego, la presentación de problemas que permitan a los niños avanzar hacia la propiedad de la constante de proporcionalidad.

Ejemplo 3

Los docentes pueden exponer un problema que los niños comenzarían a resolver usando propiedades de la proporcionalidad ya conocidas (y que muestra cómo, en muchos casos, no tiene sentido el pasaje por la unidad) y les convenga luego avanzar al uso de la constante. Por ejemplo:

Calcula el costo de las cantidades de fotocopias que aparecen en la tabla.

Cantidad de fotocopias	*15*	*60*	*10*	*5*	*1*	*27*
Precio ($)	*1,5*					

Dos tipos de estrategias podrían ser usadas por los niños para llegar al precio de las 27 fotocopias: haciendo dos pasos, dividiendo primero por 15 para saber el precio de una fotocopia y luego multiplicando por 27 para calcular el costo total; o advirtiendo que, para todos los pares de valores de la tabla, la relación entre la cantidad de fotocopias y el precio es 1/10; es decir, dándose cuenta de que si multiplican por 1/10 la cantidad de fotocopias, obtendrán el precio.

Cuando debe razonarse sobre situaciones que ponen en juego relaciones de proporcionalidad, es importante pensar que en las relaciones aditivas y multiplicativas hay cambios absolutos y cambios relativos. La habilidad de pensar en términos relativos está vinculada con el razonamiento proporcional. La noción de razón como índice comparativo entre dos cantidades fundamenta este segundo tipo de aproximación.

El primer procedimiento implica el paso por la unidad o búsqueda del valor unitario; mientras que el segundo involucra el uso de la propiedad: en una relación de proporcionalidad directa, se cumple que el cociente entre los pares de cantidades correspondientes a ambas magnitudes es constante. Podemos pensar el segundo procedimiento como una generalización del primero, pues uno busca la relación entre dos cantidades (15 fotocopias y $ 1,5); y, en el otro, la relación entre todos los pares de cantidades.

Como muestra el ejemplo, al cambiar los datos se modifican los conocimientos necesarios para resolverlo. De este modo, el mismo problema permite, con unos datos, revisar propiedades conocidas y, con otros, dar lugar al uso de nuevas.

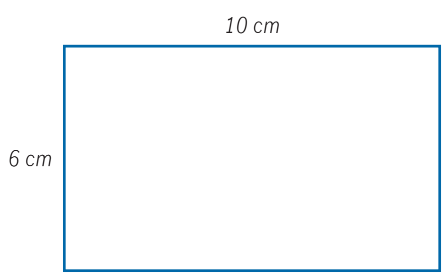
Ejemplo 4

Veamos dos ejemplos donde la constante de proporcionalidad representa un índice comparativo de cantidades de la misma magnitud.

Para hacer jugo de frutilla, Juana pone 3 litros de agua en 1 jarra donde previamente colocó 2 cucharadas de jugo concentrado. Para la fiesta de su hermana, Juana necesita calcular cantidades mayores, y decide hacer una tabla como la siguiente para saber cuánta agua necesita para que con las siguientes cantidades de jugo concentrado obtenga el mismo sabor. Completa la tabla.

Cantidad de cucharadas de jugo	*2*	*4*	*6*	*12*	*20*
Cantidad de litros de agua	*3*				

Necesitamos achicar un plano. Hagan 3 cm por cada 4 cm.



En el primer problema aparece el concepto de equivalencia asociado a la conservación de la proporción entre las partes de jugo concentrado y agua, y no a la conservación de la cantidad de jugo. Los pares de números que aparecen en la tabla son fracciones equivalentes, cuyo significado está asociado ahora a la concentración del jugo o a la mezcla entre las jarras de jugo y las de agua. Siendo esta relación la constante de proporcionalidad $\frac{3}{2}$ (1,5 de agua por cada jarra de jugo), lo que se explicita cuando es necesario determinar el valor que se corresponde con el 1 (en este ejemplo, expresa la cantidad de jarras de agua por cada jarra de jugo).

El segundo problema implica trabajar con escalas. En este caso, las fracciones son un índice comparativo de una misma magnitud. Al resolver problemas de escalas de mapas, ampliaciones o reducciones, es interesante analizar el significado del valor de la constante en relación a lo que su aplicación produce: si es menor que la unidad, se vincula a una reducción; y si es mayor que la unidad, da como resultado una ampliación.

En algunos problemas, la constante de proporcionalidad está expresada con fracciones y representan un índice comparativo que vincula dos magnitudes diferentes.

Ejemplo 5
Veamos un caso en que la constante es una nueva magnitud, la velocidad.

Un caminante recorre 5 km en 2 horas. Suponiendo que mantiene la velocidad de la marcha, completa la tabla que sigue:

Tiempo de marcha del caminante en h	*2*	*4*	*6*	*3/4*
Distancia recorrida en km	*5*			

La constante de proporcionalidad $\frac{5}{2}$ permite pasar de tiempo a distancia. Este problema pone en juego el concepto de fracción y, en el caso de saber la distancia que recorre un automóvil en $\frac{3}{4}$ de hora, da sentido a la multiplicación de fracciones. Si bien los alumnos aún no han sistematizado la multiplicación de fracciones, estarán en condiciones de averiguar dicha distancia utilizando las propiedades de la proporcionalidad directa.

En el caso del porcentaje aparece nuevamente la fracción como índice comparativo o constante de proporcionalidad.

Ejemplo 6
Al tratar de interpretar el 50% de 20, estamos comparando las partes con el todo. Así, buscamos vincular la relación 50 por cada 100 con una fracción equivalente de denominador 20.

En una ciudad, se realizaron los juegos deportivos interescolares en los que participaron 80 alumnos. De acuerdo a las diferentes categorías y juegos, lograron estos premios:
- 3 alumnos obtuvieron el primer puesto en salto en largo y 5 alumnos el primer puesto en velocidad,
- 2 equipos de fútbol (22 alumnos) lograron el segundo puesto y
- 15 alumnos obtuvieron los terceros puestos en diferentes juegos.

Decide, haciendo cálculos mentales, cuáles de las siguientes afirmaciones de los chicos son ciertas:
1. Más del 50% de los alumnos trajeron premios.
2. El 10% logró estar en los dos primeros puestos.
3. Más del 25% de los alumnos alcanzó el segundo puesto.

Este problema incluye porcentajes calculables mentalmente en forma sencilla, si se asocia el 50% con $\frac{1}{2}$, el 25% con $\frac{1}{4}$ y el 10% con la décima parte.

En cuanto a los problemas donde intervienen magnitudes inversamente proporcionales, es necesario plantear primero su resolución para luego considerar el análisis de las relaciones involucradas. Los problemas de fraccionamiento y envasado de productos proporcionan un contexto que permite otorgarles significado.

Ejemplo 7

Una pequeña bodega decidió fraccionar en envases de menor capacidad el contenido de 80 damajuanas de 5 litros cada una. Averigua qué cantidad de cada tipo envases sería necesaria según las capacidades que aparecen indicadas en la tabla.

Capacidad del envase (litros)	*5*	*2*	*1*	*1/2*	*3/4*
Cantidad de envases	*80*				

A partir del primer par, es posible hallar el correspondiente de 1 litro pensando que, si el envase tiene 5 veces menos capacidad, serán necesarias 5 veces más unidades, por lo que habrá que hacer
80 x 5 = 140. En este caso, hay que usar una relación escalar, es decir, multiplicar una cantidad y dividir otra (en ambos casos, por el número 5, sin unidades). Todos los demás pares podrán ser completados utilizando relaciones escalares y advirtiendo que, para saber el correspondiente de $\frac{3}{4}$, convendrá calcular primero el de $\frac{1}{4}$.

También se podría resolver calculando la constante de proporcionalidad. En este caso, la constante representa la cantidad total de litros a envasar, y es posible de obtener haciendo 5 litros por envase x 80 envases = 400 litros. Esta es una relación funcional, que vincula magnitudes diferentes: la capacidad de cada envase con el número de envases necesarios.

La última situación muestra que entre las magnitudes inversamente proporcionales es posible establecer dos tipos de relaciones: una entre cantidades de una misma magnitud; es decir, una relación escalar; y una relación funcional que vincula magnitudes diferentes y refleja el sentido de la unidad de razón o la constante de proporcionalidad.

Para seguir trabajando con el proyecto en las escuelas

Este libro, especialmente destinado a los y las docentes, presenta el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE). Se trata del estudio de desempeños de los estudiantes más importante llevado a cabo en la región, y fue realizado en dieciséis países de América Latina y el Caribe, más el estado mexicano de Nueva León.

Si bien en cada país las decisiones de promoción y acreditación responden a distintos criterios y parámetros, en todos los casos es importante señalar que la evaluación permite recoger información sobre el estado de los saberes de los alumnos para orientar la enseñanza.

Frente a los errores descubiertos, es necesario comprender cómo y por qué se producen; y elaborar luego actividades de distinto tipo para reorientar la enseñanza. Muchas veces, como docentes, procuramos anticipar los errores de nuestros alumnos para acortar el proceso de aprendizaje, pero esto no es posible. Los errores son parte del proceso de aprendizaje y surgen en función de los conocimientos que circulan en la clase y no de la 'falta de habilidad para la matemática' de algún estudiante.

Desde esta perspectiva, niñas y niños van internalizando progresivamente que la matemática es una ciencia que sufre transformaciones, cuyos resultados y progresos se obtienen como consecuencia necesaria de la aplicación de ciertas relaciones y del debate entre quienes las plantean, y no como una práctica donde es otro quien determina la validez de lo que se discute.

Este trabajo incorpora a los alumnos en el proceso de evaluación en un lugar diferente del habitual, donde quedan a la espera de la palabra del docente que les ratifica de inmediato si lo que hicieron está o no bien.

Así fueron analizados y sintetizados los logros y las dificultades que muestran los estudiantes al responder las preguntas del estudio, con el fin de acercar a los docentes algunas propuestas para interpretar los resultados de las pruebas y las producciones de los alumnos.

Por otra parte, en concordancia con los del Laboratorio Latinoamenricano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE), el objetivo ha sido proporcionar a los docentes algunas sugerencias para trabajar en clase. Su uso dependerá de decisiones en base a los proyectos institucionales y a las particularidades de cada grupo de alumnos.

Las propuestas incluidas son solo una variedad de alternativas, entre las muchas posibles. En este sentido, esperamos que su lectura y discusión con otros colegas derive no en la 'aplicación' de los ejemplos desarrollados, sino en nuevas propuestas adaptadas tanto a los conocimientos particulares de cada grupo de alumnos como a los proyectos de cada institución. Sería sumamente interesante sistematizar todas las propuestas que surjan en este proceso.

Al desarrollar el enfoque para llevar adelante el trabajo en las clases de matemática, fue destacada la importancia de la resolución de problemas, de su secuenciación y modos de presentación de los mismos; como también la tarea docente de alentar la reflexión sobre lo realizado, y de incentivar a niños y niñas para que comuniquen sus producciones y fundamente sus elecciones. Todo esto atendiendo a que la escuela debe proporcionar las herramientas para formar ciudadanos plenos, críticos y responsables que puedan participar activamente en la sociedad.

Bibliografía

Artigue, M., Douady, R. y otros. Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericano. Bogotá,1995.

Brousseau, Guy (1988) “Los diferentes roles del maestro” en Parra, C. y Sáiz, I. (coords.). Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Paidós. Buenos Aires. 1994. pp. 65-94.

---------------- Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Libros del Zorzal. Buenos Aires, 2007.

Chemello, G.; Agrasar, M. Recomendaciones para la elaboración de diseños curriculares de formación de profesores de enseñanza primaria. Instituto Nacional de Formación Docente. Argentina, 2008.

---------------- y Chara, S. Cuadernos para el aula. Área Matemática. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. Argentina, 2004-2006.

Chevallard, Y. , Bosch, M. y Gascón, J. Estudiar Matemáticas. ICE-Horsori. Barcelona, 1997.

Douady, R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7 (2), 1986, pp 5-31.

Gorgorió, N. Deulofeu, J. Bishop, A. (coords.). Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. ICE-Grao. Barcelona, 2000.

Itzcovich, H. (coord.). La matemática escolar. Las prácticas de matemática en el aula. Aique. Buenos Aires, 2007.

Skovsmose, O. Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Una empresa docente. Bogotá, 1999.

Vergnaud, G. La teoría de los campos conceptuales *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, Vol. 10, nº 2, 1990, pp. 133-170.

¿Cómo resuelven nuestros estudiantes las actividades matemáticas? ¿Qué procedimientos utilizan para resolver los problemas? ¿Qué factores pueden incidir en la dificultad o facilidad con que resuelven las tareas matemáticas?

Estas son algunas preguntas a las que responde un grupo de especialistas en evaluación y en didáctica de la matemática convocado por el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) en Aportes para la enseñanza de la Matemática.

Basado en los resultados que arrojó el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE), realizado en dieciséis países y un estado mexicano, este libro analiza y sintetiza los logros y las dificultades de los niños de Latinoamérica y el Caribe en relación con esta asignatura.

En concordancia con los objetivos del LLECE, que apoya a los países de la región para mejorar la calidad de la educación, y con un lenguaje accesible y propuestas claras, las autoras explican los elementos teóricos y prácticos que pueden ayudar a los docentes a profundizar y mejorar sus prácticas de enseñanza para lograr buenos aprendizajes en matemática.

OTRAS PUBLICACIONES DEL SERCE

Serie Reportes

- Primer Reporte de los resultados del SERCE
  Los aprendizajes de los estudiantes
  de América Latina y el Caribe.
- Resumen Ejecutivo
  Los aprendizajes de los estudiantes
  de América Latina y el Caribe.
- Reporte de los resultados de Escritura
  Los aprendizajes de los estudiantes
  de América Latina y el Caribe.
- Reporte Técnico del SERCE
- Estudio de Factores Asociados
  a los logros cognitivos

Serie Aportes para la Enseñanza

- Aportes para la enseñanza de la Matemática
- Aportes para la enseñanza de la Lectura
- Aportes para la enseñanza de la Escritura
- Aportes para la enseñanza de las Ciencias
  de la Naturaleza

LLECE
Laboratorio Latinoamericano de Evaluación
de la Calidad de la Educación