MATEMÁTICA

REFLEXIONES QUE SE DESPRENDEN DE LOS RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN Y SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Como parte de la difusión de los resultados de la evaluación de Segundo Ciclo del GCBA (2009) les ofrecemos este apartado del Informe Definitivo de la Evaluación Jurisdiccional que a la brevedad será recibido en forma impresa en todas las escuelas.

¿Qué reflexiones didácticas se abren a partir de esta evaluación?

El siguiente apartado tiene el propósito de brindar, por un lado, algunas posibles explicaciones acerca de los desaciertos más frecuentes ocurridos en las pruebas de Matemática; por otro, sugerir una serie de propuestas didácticas vinculadas con los temas que mayor dificultad han presentado en la prueba en función de los resultados analizados.

Para tal fin, se seleccionó un conjunto de respuestas de alumnos, tanto correctas como incorrectas, a diferentes ítemes de las pruebas y se realizó un análisis acerca de lo que se puso de manifiesto en sus resoluciones. Dicho análisis ha permitido aproximarnos a las estrategias matemáticas de las cuales disponen los alumnos y a cómo manejan la información necesaria para la resolución de los problemas planteados.

Es importante reflexionar en torno al error ya que éste indica diferentes grados de conceptualización que merecen ser discutidos, lo cual permite pensar además en las posibles intervenciones pedagógicas que propician mejores aprendizajes en el aula. En diferentes oportunidades la elección del problema y sus variables didácticas tienen la intención de que afloren las preconcepciones erróneas que permitirán construir los conocimientos desde el análisis y no de la repetición.

En este apartado no se presentan las problemáticas didácticas que se identificaron organizadas en función de los bloques de contenido sino en función de ciertos campos conceptuales importantes del nivel: la proporcionalidad, la división, las construcciones y el uso de propiedades geométricas y la medida. Dicha organización responde a que puede ser más enriquecedor repensar estos contenidos a través de diferentes significados, y además analizar cómo es posible retomar el concepto en otros contextos, poniendo en juego otros saberes asociados.

<u>Proporcionalidad</u>

Uno de los temas del currículum que puede abordarse en diferentes campos numéricos y a partir del trabajo con diferentes contextos es el de la proporcionalidad directa. Diversas situaciones, que van desde hechos de la vida cotidiana hasta determinados fenómenos físicos, son factibles de problematizarse a través de un modelo que vincula magnitudes que varían uniformemente.

Por ello cabe destacar que el aprendizaje de este concepto inmerso en el campo multiplicativo involucra muchos otros que se van construyendo solidariamente con el de proporcionalidad. En consecuencia, es necesario pensar una enseñanza que considere estos aspectos, proponga sucesivas aproximaciones al concepto de proporcionalidad a lo largo de toda la escolaridad y tenga en cuenta esta amplia gama de matices para dotar de un sentido al aprendizaje que vaya más allá de las técnicas de resolución de los problemas que involucra.

A continuación comentaremos algunas ideas que poseen los alumnos en torno a la noción de la proporcionalidad, a partir del análisis de sus diversas respuestas frente a algunos de los problemas planteados en la evaluación. Estas ideas, a veces correctas, otras equivocadas, permiten identificar cuestiones claves para trabajar didácticamente con miras a producir mejoras en la construcción del conocimiento de esta noción.

Problemáticas identificadas a partir de las resoluciones de los alumnos

Código de ítem: MAT02

En una fábrica se colocan los tornillos en bolsitas todas de igual cantidad. Completá esta tabla donde se relacionan la cantidad de tornillos y la de bolsitas.

Cantidad de bolsitas	2	3	8	9	11	16	
Cantidad de tornillos			120	135			270

Ya se mencionó que para resolver este problema de proporcionalidad directa los alumnos pueden o no recurrir al cálculo de la constante de proporcionalidad.
Es importante considerar una amplia gama de formas de resolver este tipo de problemas y no circunscribirlo al cálculo de la constante de proporcionalidad. La respuesta que se analiza a continuación ilustra las limitaciones que poseen los alumnos cuando tienen disponible como único recurso la determinación de la constante y el trabajo con productos y divisiones en torno a la misma. En este caso, el alumno no es capaz de resolver la cuenta de dividir y no pareciera tener otra estrategia posible para determinar la cantidad de bolsitas para 270 tornillos.

2.2.

En una fábrica se colocan los tornillos en bolsitas todas de igual cantidad. Completá esta tabla donde se relacionan la cantidad de tornillos y la de bolsitas.

Cantidad de bolsitas	2	3	8	9	11	16	
Cantidad de tornillos	30	45	120	135	165	240	270

15 x2 = 30

15 x3 = 45

15 x11 = 165

15 x16 = 240

270 : 15

Una de las estrategias que predomina en las producciones de los alumnos para resolver problemas que involucran la proporcionalidad ha sido la aplicación de la denominada "regla de tres". Pero por otra parte, el mero uso de la misma sin otro tipo de mediación o recurso puede transformarse en una aplicación mecánica y algorítmica sin sentido ni reflexión, que incluso no habilita a los alumnos a tener control sobre los resultados obtenidos, como puede verse en la siguiente respuesta incorrecta, donde el alumno no logra anticipar que no es posible que, si de 2 a 3 bolsitas hay 14 tornillos más, de 8 a 9 bolsitas haya 15 tornillos de diferencia, y de 9 a 11, que son dos bolsitas, haya 119 tornillos.

2.2.

En una fábrica se colocan los tornillos en bolsitas todas de igual cantidad. Completá esta tabla donde se relacionan la cantidad de tornillos y la de bolsitas.

Cantidad de bolsitas	2	3	8	9	11	16	
Cantidad de tornillos	3	17	120	135	254		270

8b —— 120t
3b —— $X = \frac{3 \times 120}{8} = 17$

9b —— 135
11b —— $X = \frac{11 \times 135}{9} =$

8b —— 120t
2b —— $X = \frac{2 \times 120}{8}$

La falta de reflexión sobre la aplicación de una técnica o algoritmo también determina dificultades con el algoritmo de la división. En el mismo ejemplo anterior hay errores en la resolución de la cuenta de dividir que no crean ningún conflicto: al dividir 360 por 8 le da 17 y esta sería la cantidad de tornillos en tres bolsas. Es decir, en la misma resolución se generan contradicciones que no le dan aviso al alumno de que está cometiendo algún error, por la falta de reflexión y control sobre sus producciones. En general se encuentra que las diferentes cuentas no son analizadas en cuanto a su coherencia.

Otros sentidos de la proporcionalidad se ponen en juego en la resolución de los siguientes problemas propuestos en la evaluación:

Código de ítem: MAT16

Para obtener un tono de verde particular, en las instrucciones de la pinturería se indica lo siguiente: mezclar 3 tarros de pintura blanca por cada 4 tarros de pintura verde. ¿Cuánta pintura blanca es necesaria para mezclar con 1 tarro de pintura verde?

En este caso, el manejo de la proporcionalidad se cruza con el dominio del campo numérico de los racionales. Una vez más la estrategia de la regla de tres puede ser una vía de resolución disponible para los alumnos, pero que evidencia las limitaciones de la aplicación de una técnica vacía de contenido por no estar anclada en un sentido construido previamente que le dé razón de ser. Esta producción inconclusa muestra cómo es posible hacer todo el planteo de la regla pero no saber "cómo" usarla para resolver el problema. La forma de dar los datos en el problema condiciona el plateo de la regla y por consiguiente, las multiplicaciones y divisiones que hay que efectuar.

1.5.

Para obtener un tono de verde particular, en las instrucciones de la pinturería se indica lo siguiente: mezclar 3 tarros de pintura blanca por cada 4 tarros de pintura verde. ¿Cuánta pintura blanca es necesaria para mezclar con 1 tarro de pintura verde?

3 Tarros Blanca ——— 4 tarros Verdes

x tarros Blanca ——— 1 tarro Verde $= X = \frac{4 \times 1}{3} =$

Hay contextos que son fértiles para enmarcar y dotar de sentido el trabajo con magnitudes proporcionales. En este caso, la mezcla de pinturas permite apoyar las nociones de proporción y equivalencia en el mantenimiento de la tonalidad. No alcanza con considerar que si se necesita menos pintura de un color, se necesitará menos de la otra, sino poder disponer de elementos para calcular con precisión la cantidad necesaria.

Es frecuente que a la proporcionalidad se le atribuyan propiedades características de un comportamiento aditivo, tal como muestra esta respuesta incorrecta que considera que si se quita 1 litro de pintura de un color debe quitarse también 1 litro de la otra. Este problema da la posibilidad de relacionar la misma tonalidad con fracciones equivalentes.

1.5.

Para obtener un tono de verde particular, en las instrucciones de la pinturería se indica lo siguiente: mezclar 3 tarros de pintura blanca por cada 4 tarros de pintura verde. ¿Cuánta pintura blanca es necesaria para mezclar con 1 tarro de pintura verde?

3 Tarros P/ blanco = 4 tarros P/ ~~blanca~~ verde

2 tarros P/ blanca = 3 tarros P/ verde

1 Tarro P/ blanco = 2 Tarros P/ verde

Rta: Con 1 tarro de Pintura ~~blanca~~ verde no se mezcla usa Pintura blanca.

Otro marco posible para el abordaje de la proporcionalidad puede ser el trabajo con múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida.

Código de ítem: MAT31

Un sobrecito de azúcar pesa 2 g.
¿Cuántos sobrecitos se necesitan para reunir 2 kg de azúcar?

Para resolver correctamente este ítem, es necesario conocer la relación entre los múltiplos de las unidades de peso. Tal como muestra esta resolución incompleta, el 2 en un caso representa gramos y en otro, kilogramos; pero como no se maneja la relación de equivalencia no parece que se pueda concluir nada respecto de la cantidad de sobrecitos necesarios.

2.8.

Un sobrecito de azúcar pesa 2 g.
¿Cuántos sobrecitos se necesitan para reunir 2 kg. de azúcar? 4

2 g ——> un sobrecito

2 kGr ——> $x = \frac{2 \times 1}{2} =$

Si bien aquí parece imprescindible conocer que 1 kg equivale a 1000 gramos para resolver el ejercicio, algunos resultados demuestran que los alumnos pueden recordar memorísticamente esta relación pero no comprender cabalmente el sentido de la misma. Es habitual que en clase se diga que para pasar de unidades de peso (y también de longitud) hay que ir de 10 en 10, pero que no se reflexione sobre esta afirmación en el marco de la proporcionalidad.
La siguiente resolución incorrecta evidencia cómo dicha relación de equivalencia es un conocimiento que está disponible pero no es utilizado al momento de obtener la respuesta de la cuenta de dividir.

2.8.

Un sobrecito de azúcar pesa 2 g.
¿Cuántos sobrecitos se necesitan para reunir 2 kg. de azúcar?

1 kg ——> 1.000 g

2 kg ——> $x = \frac{2 \times 1000}{1} = 2000$ g.

2.000 | 2
0000   100

Rta. Se necesita 100 sobrecitos para reunir 2 kg de azúcar

Algunas sugerencias didácticas a propósito de la proporcionalidad

Hasta aquí se ha tratado de dar cuenta de la complejidad que encierra el concepto de proporcionalidad, a partir de una muestra de las diferentes cuestiones que hay que considerar al momento de desplegar la enseñanza en torno a esta noción:

- La posibilidad de apelar al cálculo de la constante de proporcionalidad así como el recurrir a otros procedimientos basados en propiedades escalares de la proporcionalidad.
- Los diferentes tipos de números que pueden ponerse en juego: (naturales, enteros, racionales).
- La naturaleza de las magnitudes que intervienen (longitud, peso)[1].
- La conceptualización acerca de la medida.
- La variedad de contextos de utilización de estos conceptos.

Un concepto de tal densidad implica pensar una enseñanza que contemple todas y cada una de estas cuestiones.

División

La división es uno de los conceptos que se trabajan en este ciclo, probablemente el que con más frecuencia está circunscrito a un trabajo mecánico. Pareciera que al hablar de división sólo se hace referencia al algoritmo que permite resolver cuentas y no a los diferentes problemas que la operación resuelve.
Aquí se presenta una serie de problemas alrededor de la cuenta de dividir que fueron considerados en la evaluación, y que ponen de manifiesto para qué cuestiones la división es útil, además de qué información da cada uno de los componentes de la cuenta.

Código de ítem: MAT06

Juan tenía una cantidad de chocolates que quería repartir en partes iguales entre sus amigos sin que sobrara nada; para eso, escribió la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \cline{2-2} \cancel{2} & 6 \end{array}$$

¿Cuántos chocolates tenía Juan y entre cuántos amigos los repartió?

[1] Por tratarse de segundo ciclo, sólo nos referimos a las magnitudes longitud y peso que son las que se espera que hayan sido trabajadas. Cabe destacar que el trabajo con el concepto de proporcionalidad no concluye en esta instancia sino que se retoma en el Nivel Medio y deben incluirse otras magnitudes posibles de ser asociadas a comportamientos proporcionales, tales como área, volumen, peso específico, velocidad, etc.

Como se expuso anteriormente, este ítem trata de atrapar mucho más que la resolución de un problema de reparto. Se trata de clasificar qué clase de preguntas se resuelven con esa cuenta y, en cada situación, qué indica cada número que la compone.
El contexto es familiar (el reparto de chocolates entre amigos) pero se trata de una problemática intramatemática, ya que pone en juego las relaciones entre los números que componen la cuenta de dividir. El contexto sirve para situar a los alumnos en lo cotidiano de sus prácticas.
En este caso se trata de vincular el divisor con la cantidad de amigos que recibirán el reparto y 32, que es el total de los chocolates a repartir.

Se puede observar que la misma cuenta podría servir para contestar otras preguntas, como se verá más adelante, por ejemplo cuántos chocolates enteros le dio a cada amigo y cuántos chocolates le sobraron.

A partir de aquí se verán algunas ideas que tienen los alumnos y que se evidencian en las respuestas que presentan. Se reflexionará sobre algunas de ellas para analizar qué intervenciones o actividades en el aula permitirían aprovechar este contenido.

2.1.

Juan tenía una cantidad de chocolates que quería repartir en partes iguales entre sus amigos sin que sobrara nada; para eso, escribió la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \cline{2-2} \cancel{2} & 6 \end{array}$$

¿Cuántos chocolates tenía Juan y entre cuántos amigos los repartió?

tenia 2 amigos y 6 chocolates

Este ejemplo de respuesta incorrecta pone de manifiesto una práctica escolar habitual: siempre que se divide, la información está en el cociente y el resto, que son los números que se obtienen al hacer la cuenta. Aquí se evidencia que la repetición de un algoritmo sin tener que reflexionar sobre lo que se obtiene o las diferentes respuestas ante la misma cuenta llevan a contestar algo que no tiene sentido.

2.1.

Juan tenía una cantidad de chocolates que quería repartir en partes iguales entre sus amigos sin que sobrara nada; para eso, escribió la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 320 & 50 \\ \hline 20 & 6,4 \end{array}$$

¿Cuántos chocolates tenía Juan y entre cuántos amigos los repartió?

Juan tiene 5 chocolates y los repartio en 6,4 . sobro 2.

Esta resolución incorrecta muestra que, a pesar de que se ve la posibilidad de dividir, incluso con decimales, no se logra ninguna reflexión de por qué se continúa la división ni qué significan los valores encontrados. Se confunde el divisor con la cantidad de chocolates y no se deja de lado el cociente: parece que debería ser parte de la respuesta, y aunque se reparte todo el chocolate se vuelve a considerar el resto en la respuesta.

2.1.

Juan tenía una cantidad de chocolates que quería repartir en partes iguales entre sus amigos sin que sobrara nada; para eso, escribió la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \hline & 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

¿Cuántos chocolates tenía Juan y entre cuántos amigos los repartió?

3 chocolates para cada uno

Aquí nuevamente se ensaya una respuesta con los números que se obtienen en la división. Seguramente el contexto de reparto induce a dividir y con eso, a responder algo que no tiene sentido con la propuesta original.

Es posible notar que todas estas producciones están atravesadas por una práctica escolar basada en problemas tipo, donde falta la reflexión sobre lo obtenido y sobre la diversidad de situaciones que, aunque puedan resolverse con la misma cuenta, informan cuestiones diferentes.
.

A continuación, otro ítem que involucra la misma cuenta pero que solicita obtener datos diferentes del anterior:

Código de ítem: MAT11

> Juan tenía una cantidad de chocolates que quería repartir en partes iguales entre sus amigos sin que sobrara nada; para eso, escribió la siguiente cuenta:
>
> $$\begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \cline{2-2} \cancel{2} & 6 \end{array}$$
>
> Si repartió todo el chocolate, ¿cuánto le dio a cada amigo?

Ahora sí se plantea la necesidad de determinar cuánto recibe cada amigo. Aquí se afirma que se reparte todo el chocolate, lo que implica seguir repartiendo los 2 que sobran. Esto pone en juego seguir la división e interpretar el 6,4 del cociente como 6 chocolates y 4/10, o analizar el reparto de los 2 chocolates restantes utilizando algún método gráfico.
Es interesante notar cómo la misma cuenta permite diferentes preguntas que ponen en juego nuevos conocimientos. En este caso, el reparto equitativo y las fracciones.

A continuación se verán algunas producciones en donde se pueden identificar las dificultades que propone este problema:

1.3.

Juan tenía una cantidad de chocolates que quería repartir en partes iguales entre sus amigos sin que sobrara nada; para eso, escribió la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Si repartió todo el chocolate, ¿cuánto le dio a cada amigo?

Le dio 6 a cada amigo y 2 se quedo el .

En este ejemplo se observa que el alumno no tiene en cuenta la afirmación de que todo es repartido.

En el próximo ejemplo, si bien completa correctamente la división, la respuesta dice 6,4 pedacitos sin tener en cuenta que esa respuesta no pone de manifiesto cómo son los pedacitos o qué partición se hace. Vincula la respuesta con el cociente pero no puede retornar al contexto para contestar adecuadamente.

1.3.

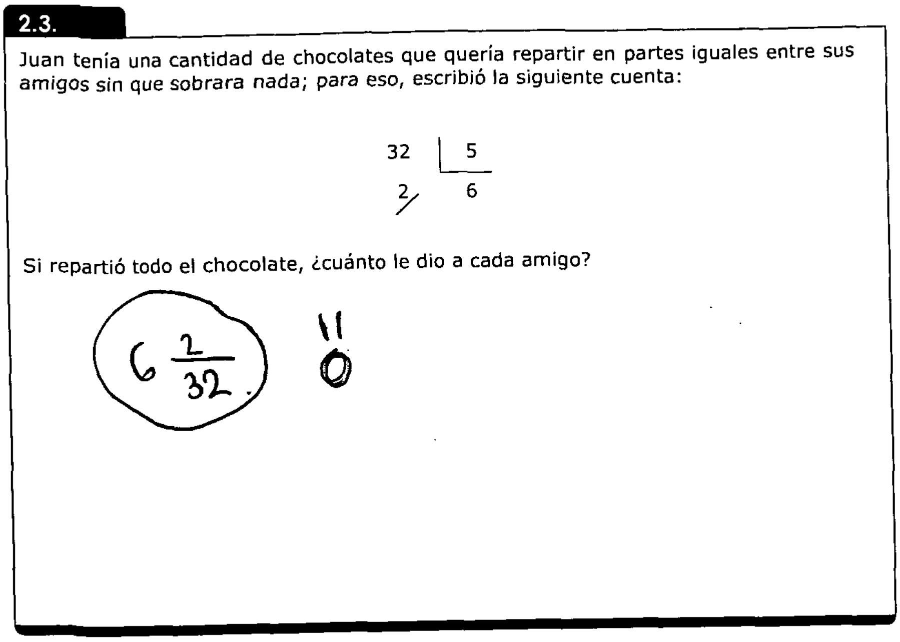
Juan tenía una cantidad de chocolates que quería repartir en partes iguales entre sus amigos sin que sobrara nada; para eso, escribió la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 32{,}0 & 5 \\ \hline 20 & 6{,}4 \end{array}$$

Si repartió todo el chocolate, ¿cuánto le dio a cada amigo?

6 y le sobraro 2 o para que de exacto 6,4 pedacitos.

En este otro ejemplo de respuesta incorrecta se pone en juego alguna relación que se plantea como regla. Es común que ante estos problemas se llegue a la conclusión (muchas veces no analizada y sólo reproducida) que la respuesta es 6 enteros (por el cociente) y 2/5 por la relación entre el resto y el divisor. En este caso la "regla" no comprendida se transforma en que el resto arma la fracción pero con el dividendo. Se pone de manifiesto una vez más que la repetición sin reflexión de algoritmos no permite reconstruir el concepto si se olvida la regla.



2.3.

Juan tenía una cantidad de chocolates que quería repartir en partes iguales entre sus amigos sin que sobrara nada; para eso, escribió la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Si repartió todo el chocolate, ¿cuánto le dio a cada amigo?

$6\frac{2}{32}$

11
0

Anteriormente se señaló que, al hablar de división, no se piensa exclusivamente en la cuenta de dividir sino en los problemas que involucra la división como concepto. Por ello se propone ahora el análisis sobre otro ítem que involucra a la división en su resolución.

Código de ítem: MAT08

Para reparar el patio de la escuela se necesitan 427 cerámicas. En el comercio se venden en cajas de 35. ¿Cuántas cajas se deben comprar para realizar el arreglo?

Aquí la cuenta de dividir tiene otro sentido ya que, al venderse las cajas cerradas, el resto indica que debe comprarse una caja más.
Cualquier respuesta que haga referencia al resto, con la cuenta correctamente resuelta resulta correcta. También es correcto cualquier procedimiento aunque no utilice la cuenta de dividir: podrían ser sumas sucesivas o multiplicaciones, siempre que se tenga en consideración la caja extra o las baldosas que faltarían.

Otra forma de resolución aparece en el siguiente ejemplo de respuesta incorrecta:

2.1.

Para reparar el patio de la escuela se necesitan 427 cerámicas. En el comercio se venden en cajas de 35. ¿Cuántas cajas se deben comprar, para realizar el arreglo?

427 | 35
27 88
3

Respuesta: se necesitan 88 cajas de ceramica para reparar el piso de el patio de la escuela

Se observa una forma particular de realizar el algoritmo de la división, ya que divide el 42 por 5, le da 8 y sobran 2 y luego divide el 27 por 3, le da 8 y sobran 3. Más allá del error en el uso del algoritmo es evidente una falta de reflexión sobre los resultados obtenidos, ya que 88 cajas de 35 cerámicos da aproximadamente 35 x 2 = 70, 70 x 40 = 2.800 y aún faltan 8 cajas, lo que implica muchas más cerámicas que las necesarias. Además no tiene en consideración las 3 cerámicas que según su cálculo le faltarían.

En los ejemplos de respuestas incorrectas que se muestran a continuación, se reconoce a la división como la operación que permitiría encontrar la respuesta, sin embargo no hay un retorno al problema para indicarla. La respuesta es que se necesitan 12,2 cajas, lo que no tiene sentido en el contexto propuesto, o la parte decimal es tomada como el resto, por lo que la respuesta es “Se necesitan 12 cajas y 2 baldosas”.

2.1.

Para reparar el patio de la escuela se necesitan 427 cerámicas. En el comercio se venden en cajas de 35. ¿Cuántas cajas se deben comprar, para realizar el arreglo?

427 | 35
77 12,2
70
0

Se deben compror 12,2.

2.1

Para reparar el patio de la escuela se necesitan 427 cerámicas. En el comercio se venden en cajas de 35. ¿Cuántas cajas se deben comprar, para realizar el arreglo?

4270 | 35
77 12,2
70
00

debe comprar 12 cajas y 2 ceramicas sueltas

En esta última opción no hay registro de lo que significa la parte decimal en el contexto. Sería $\frac{2}{10}$ de la caja, es decir $\frac{2}{10} \times 35 = 7$ cerámicos más son necesarios.

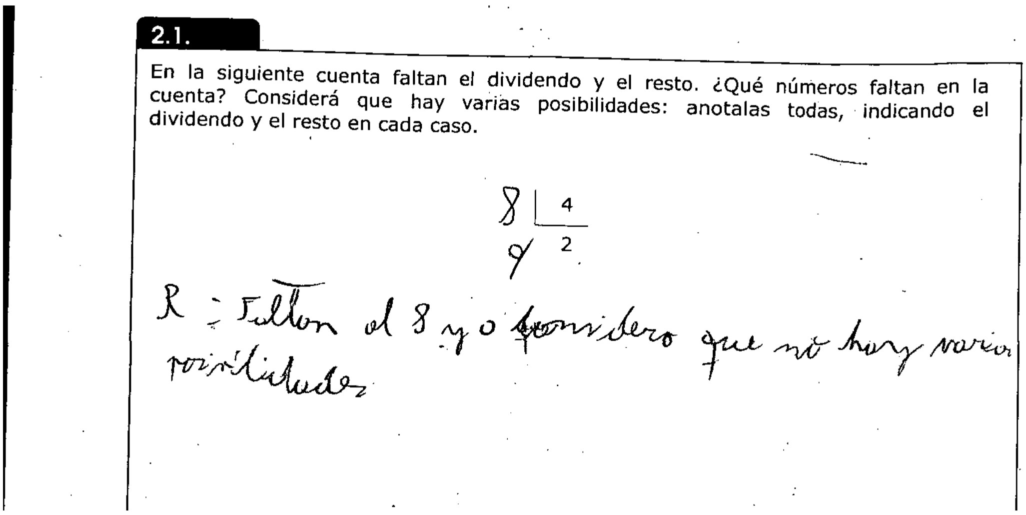
Por último, el análisis de un nuevo ítem que corresponde a la división.

Código de ítem: MAT03

En la siguiente cuenta faltan el dividendo y el resto. ¿Qué números faltan en la cuenta? Considerá que hay varias posibilidades: anotalas todas, indicando el dividendo y el resto en cada caso. $\begin{array}{l\|l} & 4 \\ \hline & 2 \end{array}$

Este es un problema matemático que carece totalmente de contexto, en el que vuelven a ponerse en juego las relaciones entre los componentes de la división: divisor x cociente + resto = dividendo y además, que el resto debe ser menor que el divisor.

Fueron consideradas correctas las respuestas que tuvieron en cuenta esta relación y responden o todos los dividendos o los pares de dividendo y resto, y parcialmente correctas las que exhibieron una o dos de las 4 respuestas posibles.


2.1.

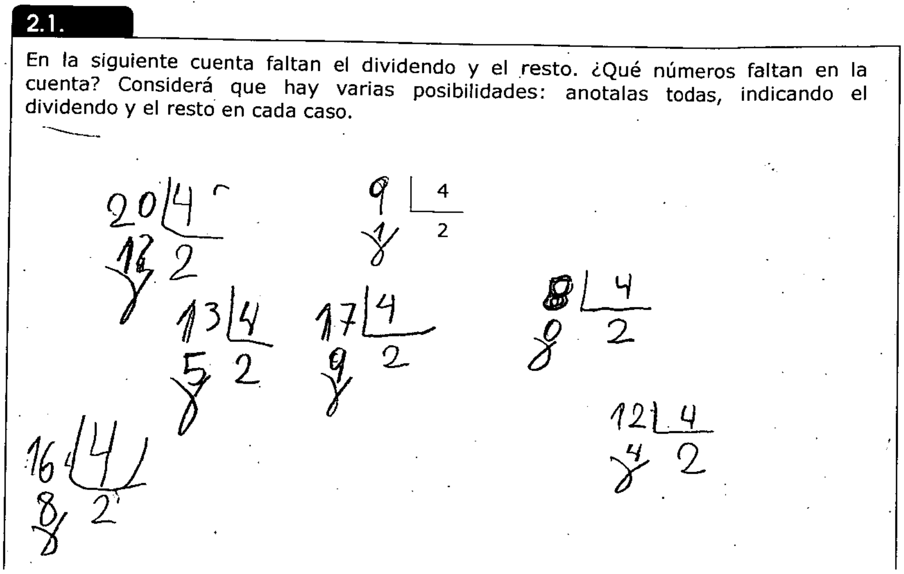
En la siguiente cuenta faltan el dividendo y el resto. ¿Qué números faltan en la cuenta? Considerá que hay varias posibilidades: anotalas todas, indicando el dividendo y el resto en cada caso.

8 | 4
0   2

R: Faltan el 8 y o considero que no hay varias posibilidades

En este caso se muestra una sola respuesta y se afirma que no hay más.

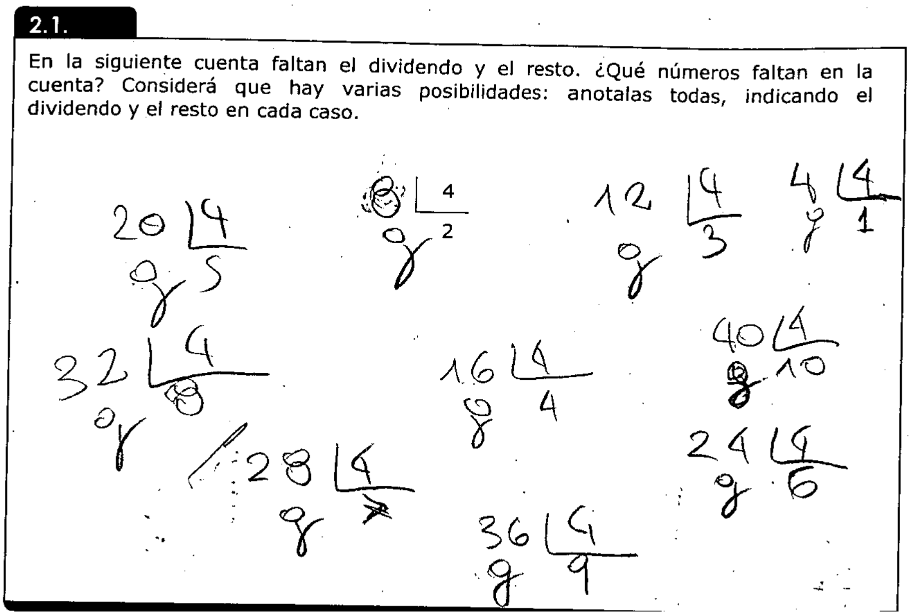
Podría suceder que la condición del resto no sea tenida en cuenta, obteniéndose respuestas que, en realidad, cambian el cociente; así se ve en la resolución incorrecta propuesta a continuación.



2.1.

En la siguiente cuenta faltan el dividendo y el resto. ¿Qué números faltan en la cuenta? Considerá que hay varias posibilidades: anotalas todas, indicando el dividendo y el resto en cada caso.

En los ejemplos de respuestas incorrectas que se muestran a continuación no se tiene en cuenta la consigna; en un caso se mantiene el resto 0 y va cambiando el cociente y en el otro, se mantienen el resto 0 y el cociente. En ninguno de los dos se interpreta la consigna que pide que se mantengan fijos el cociente y el divisor.



2.1.

En la siguiente cuenta faltan el dividendo y el resto. ¿Qué números faltan en la cuenta? Considerá que hay varias posibilidades: anotalas todas, indicando el dividendo y el resto en cada caso.

2.1.

En la siguiente cuenta faltan el dividendo y el resto. ¿Qué números faltan en la cuenta? Considerá que hay varias posibilidades: anotalas todas, indicando el dividendo y el resto en cada caso.

14 | 7 — 0 2
8 | 4 — 0 2
12 | 6 — 0 2
18 | 9 — 0 2
6 | 3 — 0 2

Algunas sugerencias para trabajar con el concepto de división

Se ha detectado que muchas resoluciones están ancladas en lo que usualmente el alumno piensa que debe responder. En determinadas circunstancias y basándose en una práctica de resolución de una serie de problemas “tipo”, es frecuente que en muchos casos no se plantee una reflexión de los números obtenidos en las cuentas realizadas. El alumno resuelve problemas de partir o repartir tradicionales y sabe qué contestar. Sin embargo, ante un problema parecido pero al que le faltan los datos en el enunciado y hay que buscarlos en la cuenta, no puede relacionar los problemas que resolvió con el método que usó, ni explicar qué cuenta le permitió responder eso.

Este análisis entre los problemas y sus resoluciones requiere poner en juego más relaciones que la cuenta que se hace para resolver un problema. Es necesario trabajar una especie de “clasificación” de los problemas que se resolvían con esa cuenta y qué respuestas posibles se podrían obtener para que el alumno la tenga disponible. Lo que se observa en las respuestas analizadas es que este tipo de reflexión no parece encontrarse entre las actividades áulicas a las que se enfrentan cotidianamente los alumnos.
Por ese motivo, en el ítem Mat 06, ante la pregunta de cuántos chocolates tenía y cuántos amigos se encuentran muchas respuestas que se refieren a otras preguntas, como cuánto recibió cada amigo o cuántos chocolates sobraron, entre otras.
Esto nos permite asegurar que el manejo del algoritmo de la división no garantiza la resolución de una serie de problemas asociados a la división y que forman parte del campo de problemas relacionados que asegura el conocimiento del concepto.

Como ya fue señalado, el trabajo a partir del error permite reflexionar, más allá de la corrección, acerca de dónde está el concepto o el argumento erróneo para poder utilizarlo correctamente.
Las intervenciones docentes a partir de las producciones no correctas permitirán que el alumno pueda analizar su procedimiento. La intervención debería dirigirse en ese camino, no a decir "Está mal, corregilo" o "Está mal, se hace así". Hay que tener en cuenta que el alumno no sabe que lo hizo mal y sin una intervención no podrá cambiar su producción.
Por ejemplo, en ítem Mat 03, cuando el alumno sólo encuentra una respuesta, que es dividendo 8 y resto 0, se le podría preguntar si puede encontrar una división con cociente 2 y resto 1. Esto desbloquearía la unicidad que se plantea en la resolución.
En el caso en el que proponen divisiones que no son correctas, como dividendo 14 y resto 0, invitarlos a comprobar la división.
En cualquiera de los casos se trata de que el alumno pueda comprender su error para tratar de solucionarlo.

El ítem Mat08, propone otro aspecto de la división que es necesario tener en cuenta, la incidencia del resto en la respuesta.
El resto en una división entera puede querer decir diferentes cosas:

- Si se estaba repartiendo algo, es lo que sobra y no se repartió.
- Si lo que se repartía puede fraccionarse, el resto es lo que hay que particionar para terminar de repartir
- Si lo que pretendía era ordenar elementos en cajas, autos, etc., el resto indica una caja o un auto más necesarios para incluir lo que sobra.
- Si se camina desde un número hacia atrás, dando saltos de la misma medida, el resto indica el número más cercano a 0 al que se puede llegar.

Es decir, que en muchos problemas el resto tiene un significado que forma parte de entender lo que se está haciendo al concretar una división.

Los problemas que requieren encontrar diferentes componentes de una división, como el Mat 03, ponen a los alumnos en el lugar de generar números con determinadas condiciones. Esta práctica permite abordar actividades de exploración.
A partir de este tipo de problemas es posible proponer diferentes opciones dando cociente y resto; cociente, divisor y resto; dividendo y resto, y así poner en juego la posibilidad de una, ninguna, varias o infinitas soluciones.

Se puede así resignificar las características de la cuenta de dividir y las condiciones de los números que se relacionan en la misma.
"….pensamos que en el trabajo con este tipo de problemas, los alumnos adquieren algunas ideas conceptuales que son herramientas muy propicias para el trabajo algebraico.
Por otro lado, se considera que la familiaridad que los alumnos tienen con los números naturales constituye un buen punto de apoyo para abordar el

tratamiento de lo general que es una de las características de aquello que los alumnos deben comenzar a concebir como parte del trabajo en matemática."[2]

Construcciones y uso de propiedades geométricas

Frecuentemente la geometría en el aula ha sido relegada a la memorización de propiedades o a la repetición de algunos pasos que llevan a la construcción de algunas figuras. Este recorte no permite que los alumnos trabajen sobre la exploración de conjeturas y procedimientos. El trabajo geométrico propone una forma de pensamiento particular y no considerarla en la escuela coarta a los alumnos la posibilidad de desarrollar dichas habilidades.

Las construcciones geométricas proponen un campo fértil para poner en juego la exploración y el uso de los instrumentos geométricos, sus posibilidades y limitaciones, ponen de manifiesto la planificación y la ejecución de los pasos previstos, así como permiten la posibilidad de replantear los pasos si el resultado no es el buscado.

Al respecto, el Diseño Curricular de Segundo Ciclo sostiene:
"El trabajo geométrico que se propone en el Segundo Ciclo ha de favorecer que los alumnos aprendan que los conocimientos son un medio para poder establecer afirmaciones sobre los objetos con los que tratan, sin necesidad de apelar a la constatación empírica. Se trata de un proceso largo que incluye la resolución de diferentes tipos de problemas. Enfrentar un problema supone siempre, en algún nivel, la movilización de ciertos conocimientos –ya elaborados o en vías de elaboración – que serán confirmados, reorganizados, reestructurados o cuestionados a través de la resolución. Este proceso supone un juego dialéctico entre anticipación, resolución y validación que no excluye de manera alguna las constataciones empíricas pero que las ubica –siempre – como respuesta a alguna pregunta que los niños se han formulado, a alguna anticipación que han hecho."[3]

G. Arsac[4] plantea que la práctica geométrica supone una ida y vuelta constante entre un texto y un dibujo. En este marco, el trabajo alrededor de las

[2] Horacio Itzcovich y Claudia Broitman "ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN EN LOS *TRES CICLOS DE LA EGB"* Documento Nº 2 - Año 2001; *Provincia de Buenos Aires Dirección General de Cultura y Educación,* Subsecretaría de Educación, *Dirección Provincial de Educación de Gestión Estatal. Dirección de Educación General Básica Gabinete Pedagógico Curricular - Matemática*

[3] Tomo 2, página 547

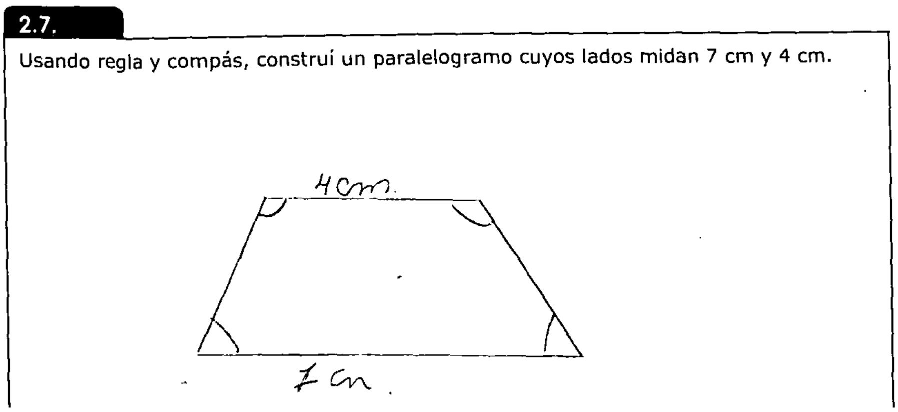
[4] Arsac, G y otros. *Iniciación al pensamiento deductivo.* Lyon: Presses Universitaires, 1992

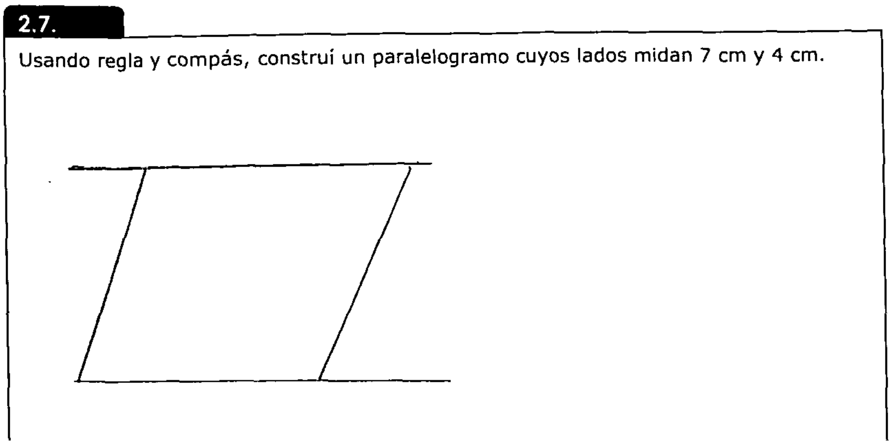
construcciones de figuras puede constituir un medio favorable para la identificación de las relaciones que las caracterizan.
Los problemas de construcción a partir de datos, como los que se presentan a continuación, intentan poner a los alumnos como protagonistas de la construcción y no como reproductores de las instrucciones que da el maestro. Este protagonismo lo incita a reflexionar sobre lo que puede hacer y la implicancia de sus procedimientos en la construcción.

Código de ítem: MAT24

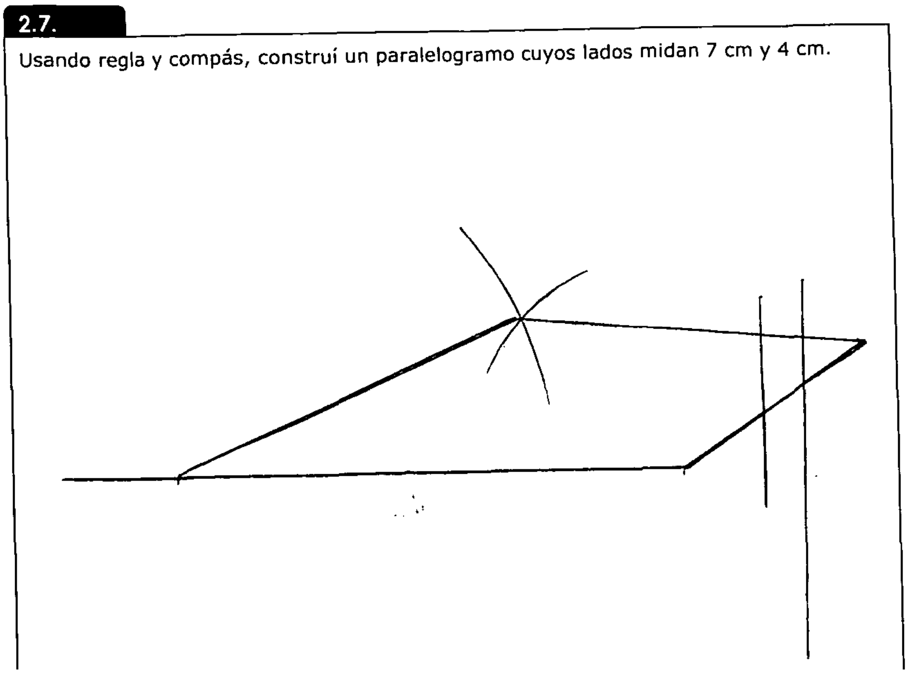
> Usando regla y compás, construí un paralelogramo cuyos lados midan 7 cm y 4 cm.

En este problema es necesario conocer la definición de paralelogramo y ponerla en juego para la construcción.
Una de las mayores dificultades se produce por el desconocimiento de la definición, lo que generó construcciones erróneas como las que aparecen seguidamente:

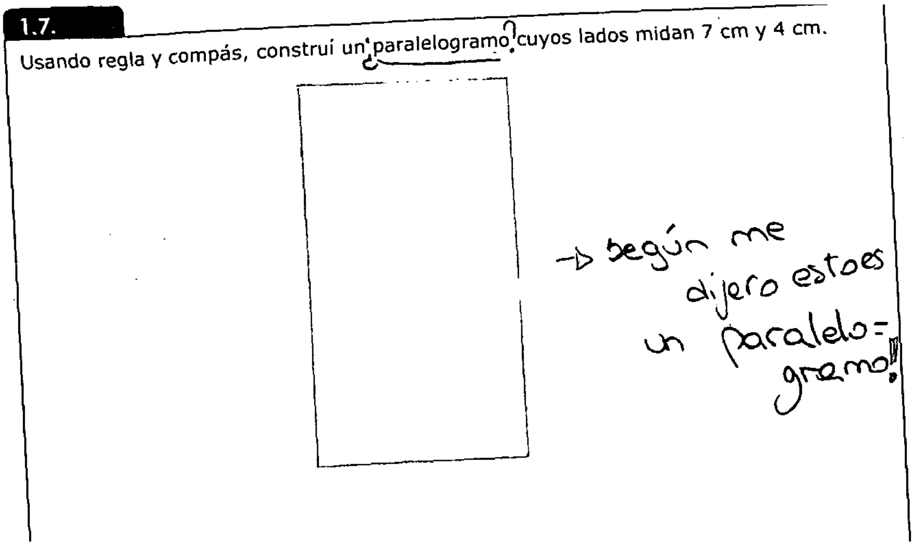




Otra de las dificultades que se evidenciaron en distintas resoluciones fue el trazado de rectas paralelas, aunque se tomó como parcialmente correcto el trazado aproximado. Sin embargo en el siguiente ejemplo de respuesta incorrecta se muestra la imposibilidad de compatibilizar la medida con el paralelismo.



En la siguiente respuesta correcta se puede pensar que el alumno no estaba muy convencido de que un rectángulo sea un paralelogramo; sin embargo lo es y su respuesta es correcta. Llama la atención esta relación estanca entre las definiciones de los cuadriláteros.



1.7.

Usando regla y compás, construí un paralelogramo cuyos lados midan 7 cm y 4 cm.

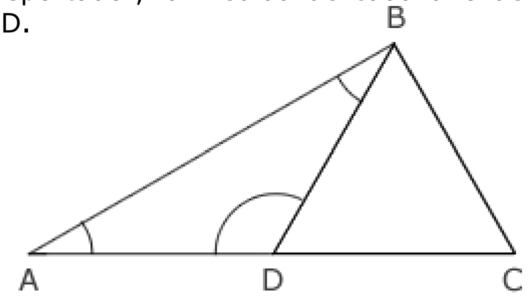
-> según me dijero esto es un paralelo= gramo!!

Otra cuestión importante a propiciar en el trabajo geométrico es la resolución de ejercicios usando propiedades. Así aparece en el siguiente ítem de la evaluación que propone un trabajo de determinar medidas sin medir.

Código de ítem: MAT27

En esta figura el triángulo BCD es equilátero y el triángulo ABD es isósceles. Averiguá, sin usar el transportador, la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo ABD.

Dibujo sin escala



Como ya se dijo, para resolver correctamente este ítem es necesario conocer algunas propiedades vinculadas al los triángulos y sus características fundamentales:

- la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos.
- en un triángulo equilátero todos los ángulos miden lo mismo, es decir 60º.
- un triángulo isósceles tiene dos ángulos con igual medida.

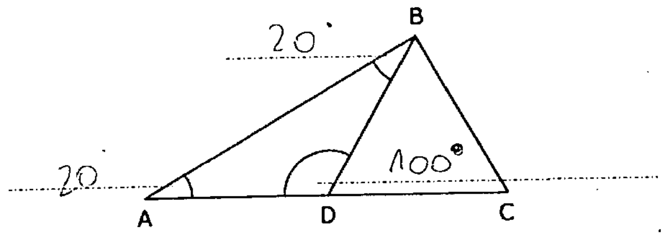
Este conocimiento implica no sólo recordar de memoria estas informaciones como si fueran datos aislados, sino poder articular los datos como propiedades que se deben mantener simultáneamente.

El siguiente ejemplo de respuesta incorrecta muestra que se puede manejar una relación (en este caso que un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales) independientemente de que se verifique la otra (que la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos). Además no tiene en cuenta el dato que pone de relieve el triángulo equilátero.

1.7.

En esta figura el triángulo BCD es equilátero y el ABD es isósceles. Averiguá sin usar el transportador la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo ABD

Dibujo sin escala

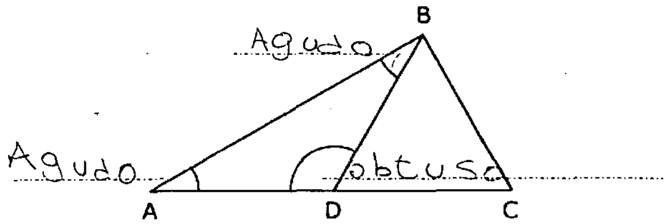


Algunos de los errores frecuentes que evidencian prácticas más emparentadas con una geometría de clasificaciones y definiciones pueden verse en el siguiente ejemplo de respuesta incorrecta, donde el alumno se limita, tan sólo, a identificar con una característica del ángulo en lugar de la medida.

1.7.

En esta figura el triángulo BCD es equilátero y el ABD es isósceles. Averiguá sin usar el transportador la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo ABD

Dibujo sin escala

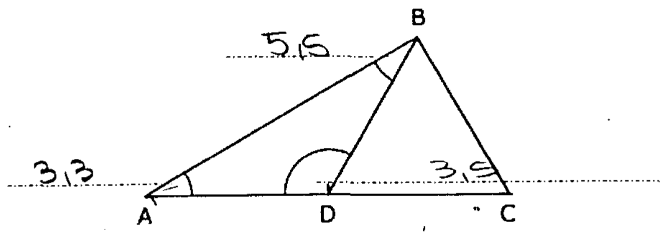


También se observa otro error muy frecuente en Geometría, que es la identificación del concepto de medida casi exclusivamente con longitudes de lados. El siguiente ejemplo de respuesta incorrecta es una muestra que corrobora lo dicho anteriormente, además de ilustrar varios de los aspectos señalados a lo largo de este documento: los que se refieren a la falta de interpretación y control de los resultados obtenidos en el contexto del problema.

1.7.

En esta figura el triángulo BCD es equilátero y el ABD es isósceles. Averiguá sin usar el transportador la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo ABD

Dibujo sin escala



Algunas reflexiones sobre la enseñanza de la Geometría

Las construcciones trabajadas en forma abierta, es decir, las que permiten la exploración y la puesta en juego de diferentes estrategias, la comprobación de suposiciones y el replanteo de pasos si no se logra el objetivo, evidencian la representación mental del objeto que se quiere construir, la definición que se maneja y lo que debe hacerse para que esas conceptualizaciones se vean reflejadas en la construcción realizada.
Hemos observado que, en las resoluciones correctas no se presenta un paralelogramo que no sea la representación general del paralelogramo con el ángulo agudo a la izquierda. Esto podría deberse a que no se ha analizado la multiplicidad de soluciones a partir de una colección de datos.
En este ítem, la cantidad de paralelogramos posibles de construir es infinita. En clase podría tratarse esta particularidad y analizarse qué condiciones son necesarias para que la construcción sea única.
También puede variarse el tipo de instrumentos permitidos para realizar la construcción. Estas elecciones de las variables didácticas posibilitan poner en juego diferentes propiedades de las figuras, según las necesidades de la construcción.
Así se genera un trabajo muy productivo que apela a las propiedades de las figuras en acto y no a la mera repetición.

Las respuestas obtenidas al ítem propuesto nos permiten asegurar que el estudio memorístico de las definiciones y propiedades no asegura su utilización.

Esto último vuelve a encontrarse en los problemas que se refieren a la aplicación de propiedades de las figuras, cuando se integra el registro verbal con la representación gráfica. Muchas veces se resuelven erróneamente porque se transfieren características propias de los lados a los ángulos o viceversa.
Pasar por la necesidad de cambiar de unas propiedades a otras es lo que garantiza la verdadera integración de los conceptos trabajados.

Medida

La propuesta del DC respecto de este contenido consiste en poner a los alumnos frente a condiciones reales de medición y comparación realizando estimaciones y conjeturas. Esto trasciende los problemas mecánicos de pasaje de unidades que se convierten en un algoritmo al que no pueden recurrir si lo olvidan. Relaciones más cotidianas de comparación permite a los alumnos tener sus propias referencias y ponerlas en juego en variados problemas.

A continuación se analiza uno de los ítems propuesto en la evaluación que involucra la medida.

Código de ítem: MAT30

> Las siguientes son las alturas de Hernán y sus amigos.
> Francisco: 143 cm; Julián: 1m 39 cm; Cecilia: 15 dm; Hernán: 1 m 4 dm.
> ¿Quién es el más bajo de todos?

Aquí se presenta un contexto cotidiano y lo que debe tenerse en cuenta es cómo relacionar las unidades. La mayor complejidad la proporcionan los dm, ya que muchas respuestas incorrectas reflejan que los alumnos no lograron relacionarlos con las otras unidades.

En la siguiente resolución incorrecta puede notarse que no hay una coherencia entre como toma los decímetros para cada chico, en el caso de Hernán 4 dm = 0,4 m y en el caso de Cecilia 15 dm = 0,15 m. Esta misma incoherencia se refleja con los 39 cm escritos como 0,039.
Puede verse, además, que se piensa que los dm son la primera cifra después de la coma, sin importar cuántas unidades se tenga. No se observa un análisis de las propiedades del sistema de numeración que se heredan en la medida.
De todas maneras, aun con los errores que hay en el análisis de las unidades, la comparación es correcta y se determina que la más baja es Cecilia.

2.7.

Las siguientes son las alturas de Hernán y sus amigos. Francisco: 143 cm; Julián: 1m 39 cm; Cecilia: 15 dm; Hernán: 1 m 4 dm. ¿Quién es el más bajo de todos?

F 1,43 cm
J 1,039 m
C 0,15 m Cecilia es el más bajo
H 1,4 m

La respuesta que se muestra a continuación permite demostrar que el desconocimiento de las relaciones entre los múltiplos y submúltiplos del metro pone de manifiesto unas medidas incoherentes para alturas de personas, sin embargo esta falta de reflexión y algunos supuestos del tipo “Como es matemática, no tiene que dar real” proponen a los docentes el desafío de pensar problemas en los que no se traten situaciones en las que los resultados no tienen coherencia real.

2.7.

Las siguientes son las alturas de Hernán y sus amigos. Francisco: 143 cm; Julián: 1m 39 cm; Cecilia: 15 dm; Hernán: 1 m 4 dm. ¿Quién es el más bajo de todos?

1,43 FRANCISCO
1,39 JULIÁN
41,00 Hernán
15,00 CECILIA

MÁS BAJO.

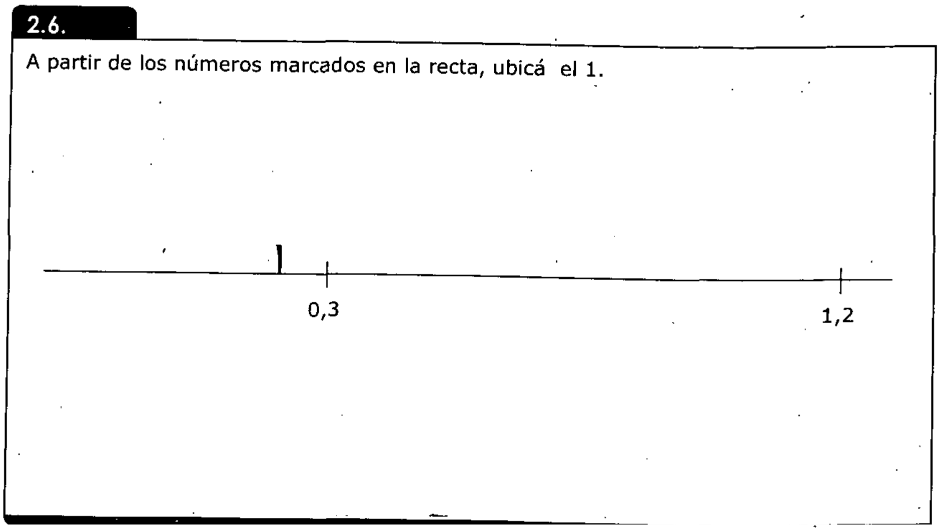
DM: DIÁMETRO
10 M.

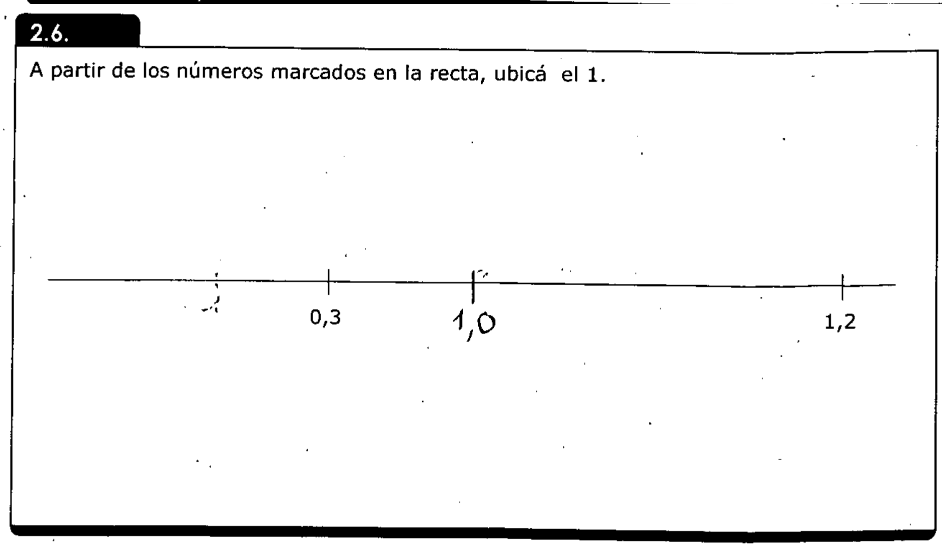
Otro aspecto a considerar cuando se trabaja con la medida es la posibilidad que brinda de utilizar el recurso de la representación en la recta numérica para operar simultáneamente con las nociones de orden en los diferentes campos numéricos involucrados.

En estos ejemplos de respuestas incorrectas se pueden observar los errores más frecuentes que se producen cuando se considera la representación en la recta como una actividad cerrada en sí misma.

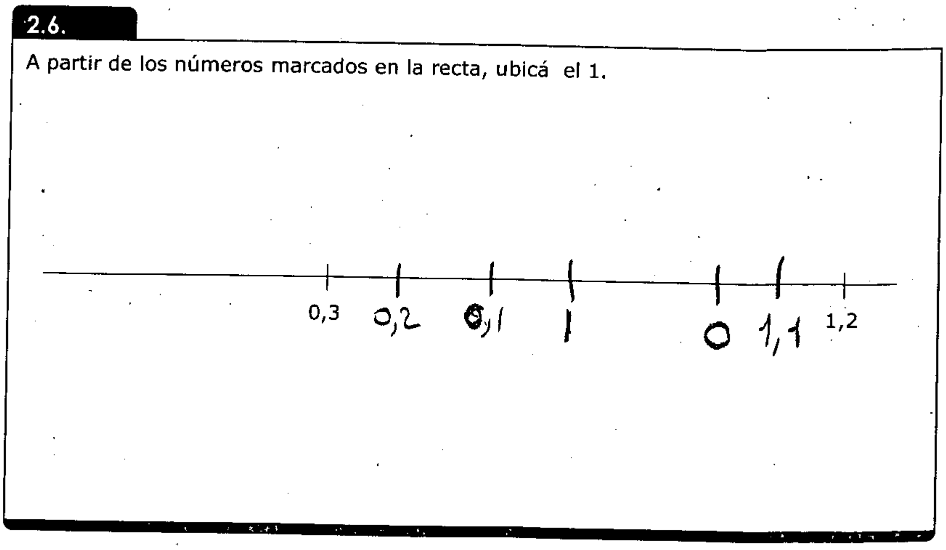
Código de ítem: MAT23

A partir de los números marcados en la recta, ubicá el 1.





Como puede verse en estos ejemplos, no pareciera que los alumnos tengan disponible ningún recurso para controlar la respuesta que producen, y por tanto se limitan a ubicar en la recta los números hasta incluso sin criterio ordinal, tal como aparece en este otro ejemplo de respuesta incorrecta:



Algunas reflexiones sobre la Medida

Medir es una actividad cotidiana en la que estamos inmersos: distancias entre ciudades, elementos que se compran por su longitud (tornillos, cintas, burletes), alturas de personas y objetos, largos de ropa, etc.
Esta cotidianeidad indica la necesidad de trabajar el contenido. Es necesario que al finalizar este ciclo los alumnos logren construir una representación intuitiva de las medidas para luego formalizar las relaciones entre múltiplos y submúltiplos de cierta unidad.

Una propuesta del DC sobre esta cuestión dice: *"¿Cuál es el espesor de un diccionario: 70 mm, 70 cm o 70 m?"*[5] Lo que se destaca en el ejemplo es que las situaciones presentadas a los alumnos deberían apuntar menos a la mecánica del pasaje de unidades y más hacia el significado y la coherencia de las unidades utilizadas y los instrumentos más adecuados para realizar mediciones.

Como fue señalado oportunamente, el trabajo con el pasaje de unidades sería propicio que estuviera enmarcado en el contexto de la proporcionalidad para construir significados en torno a la relación entre los múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida. Este trabajo también se puede articular con el recurso de representación en la recta numérica para evitar considerarlo como un fin en sí mismo, inconexo con otros contenidos a trabajar.

[5] Diseño curricular para la Escuela Primaria. Segundo Ciclo 2004, Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección general de Planeamiento. Dirección de currícula. pp 623