Programa de reorganización de las trayectorias escolares de los alumnos con sobreedad
en el Nivel Primario de la Ciudad de Buenos Aires

Proyecto Conformación de grados de aceleración

Grado de aceleración 6º | 7º

Tercer bimestre

Matemática

Anexo

2004

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento.

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires

Jefe de Gobierno

Dr. Aníbal Ibarra

Vicejefe de Gobierno

Lic. Jorge Telerman

Secretaria de Educación

Lic. Roxana Perazza

Subsecretaria de Educación

Lic. Flavia Terigi

Directora General de Planeamiento

Lic. Florencia Finnegan

Directora General de Planeamiento

Lic. Florencia Finnegan

Directora de Currícula

Lic. Cecilia Parra

Coordinadoras del Programa

María Elena Cuter ▪ María Alejandra Rossano

Equipo técnico del Programa

Antonio Carabajal ▪ Mercedes Etchemendy ▪ Marcela Fridman ▪ Ianina Gueler ▪ Mariela Helman
Guillermo Micó ▪ Egle Pitón ▪ Vanesa Roisman ▪ Paola Tarasow ▪ Violeta Wolinsky

Dirección de Currícula

Coordinación General

Susana Wolman

Matemática

Coordinación del área y supervisión del trabajo

Patricia Sadovsky

Elaboración de este material curricular

Héctor Ponce ▪ María Emilia Quaranta

Diseño gráfico y diagramación: María Victoria Bardini, Gabriela Middonno.

Corrección de estilo: Teresita Vernino.

Í N D I C E

MATEMÁTICA

Presentación

Estas páginas incluyen material adicional con el fin de enriquecer la propuesta para el tercer bimestre. Su intención es doble: por un lado, como material de estudio en función de la disponibilidad del docente y, por el otro, como un conjunto de problemas entre los cuales elegir para trabajar con los alumnos. El docente decidirá cuáles podrá considerar con su grupo de acuerdo con el tiempo disponible en su proyecto de enseñanza.

Unidad 1

Divisibilidad

Criterios de divisibilidad

El docente explicará a sus alumnos que, para algunos números, existen maneras de darse cuenta rápidamente, sin hacer la cuenta, si un número es divisible por otro, y en esta parte del trabajo de divisibilidad vamos a proponerles aprender y reflexionar sobre esas reglas. Aludiendo al título de este apartado, se les explicará –y quedará anotado en las carpetas– qué es un criterio: una condición que nos permite saber algo sobre el número o los números que estamos analizando. En este caso, como se trata de criterios de divisibilidad, serán condiciones para saber cuándo un número es divisible por un número determinado, sin tener que apelar a la cuenta.

Trabajo para el alumno

Divisibilidad por 10; 100, 1.000; etcétera

Problema 1

Durante el año pasado y este año, realizaste muchas multiplicaciones y divisiones por 10, 100, 1.000, etc. Viste que, debido a la organización de nuestro sistema de numeración, estos cálculos eran muy sencillos. A partir de eso que ya sabés, ¿podrías decir una regla que permita en todos los casos saber sin hacer la cuenta de dividir si un número

- será divisible por 10?
- por 100?
- por 1.000?

Para hacerlo podés revisar en el cuadernillo del primer bimestre las actividades sobre sistema de numeración (páginas 19 y 20) y sobre la división por 10 y por 100 (páginas 24 y 25).

¿Cómo podés estar seguro de que la regla que enunciaste será válida para cualquier número?

El análisis colectivo posterior a la resolución se centrará en la justificación del criterio de divisibilidad por la unidad seguida de ceros, apoyándose en la descomposición multiplicativa de los números. En términos de los docentes, un número terminado en cero puede expresarse como una cierta cantidad **x** de decenas y cada decena que se divide por 10 es 1, con lo cual **x** decenas dividido 10 es **x**. Por ejemplo, 120 puede expresarse como 12 decenas y, como 1 decena dividido 10 es 1, entonces 12 decenas dividido 10 es 12.

En la discusión, además podrán detenerse a analizar que, también gracias a la organización decimal de nuestro sistema de numeración, es muy fácil determinar el cociente y el resto de un número dividido 10. Por ejemplo:

158 = 15 x 10 + 8, y esta expresión "informa" que, si se divide 158 por 10, el cociente es 15 y el resto 8. También será interesante remitir al recuadro de información sobre sistema de numeración trabajado en el primer bimestre (*Material para el alumno*, páginas 24 y 25):

Un número de tres cifras puede expresarse como las dos primeras cifras por 10 más la última. Por ejemplo:

586 = 58 x 10 + 6;
705 = 70 x 10 + 5;
430 = 43 x 10;
300 = 30 x 10.

¿Cómo se transforma la regla anterior si el número tiene más de tres cifras? ¿Y si es de dos cifras?

Un número de cuatro cifras puede expresarse como:

- Las tres primeras cifras por 10 más la última. Por ejemplo, 5.462 = 546 x 10 + 2.
- Las dos primeras cifras por 100 más las dos últimas. Por ejemplo, 5.462 = 54 x 100 + 62.
- La primera cifra por 1.000 más las tres últimas. Por ejemplo, 5.462 = 5 x 1.000 + 462.
O, también, la primera por 1.000, la segunda por 100, la tercera por 10 más la última:
5.462 = 5 x 1000 + 4 x 100 + 6 x 10 + 2.

Al término de este análisis, se espera que, además de las relaciones establecidas, se formule y anote en las carpetas el criterio de divisibilidad por la unidad seguida de ceros:

Un número es divisible por 10 si su última cifra es 0.
Un número es divisible por 100 si sus dos últimas cifras son 0.
Un número es divisible por 1.000 si sus tres últimas cifras son 0.

Trabajo para el alumno

DIVISIBILIDAD POR 5

Problema 2

¿Podrían ahora tratar de enunciar una regla que permita saber, para cualquier número y sin hacer la cuenta, si será divisible por 5?

¿Cómo podemos estar seguros de que la regla que formularon servirá para cualquier número?

Una discusión con toda la clase permitirá confrontar los criterios enunciados por los alumnos en su trabajo autónomo previo sobre este problema. Esta discusión se dedicará a explicitar que los múltiplos de 5 van de 5 en 5; cada dos múltiplos de 5 se "encuentra" un múltiplo de 10, por lo tanto los números terminados en 0 son múltiplos de 5. Otra manera de pensar esto es establecer que los múltiplos de 10 son también múltiplos de 5 porque 10 = 2 x 5 y entonces un número que se puede escribir bajo la forma ... x 10 también se puede escribir bajo la forma ... x 2 x 5. Se podrá recordar los análisis realizados sobre la tabla pitagórica el año anterior, cuando se explicitó que los números de la tabla del 10 eran el doble que los de la del cinco, porque 10 era el doble de 5, entonces hacer 10 veces algo era el doble que hacerlo 5 veces...

Además de los números terminados en 0, están los terminados en 5; son los que tienen resto 5 al dividirlos por 10, entonces son divisibles por 5.

... x 10 + 5 = ... x 2 x 5 + 5

Aquí se remitirá al trabajo sobre división entera desarrollado previamente.

Trabajo para el alumno

DIVISIBILIDAD POR 2

Problema 3

¿Podrían ahora tratar de enunciar una regla que permita saber, para cualquier número y sin hacer la cuenta, si será divisible por 2? ¿Cómo podemos estar seguros de que la regla que formularon servirá para cualquier número?

La puesta en común confrontará los diferentes enunciados y sus justificaciones. Para los alumnos es en general evidente que los números que terminan en 0, 2, 4, 6 u 8 son múltiplos de dos. Aquí, el docente podrá introducir las definiciones de números pares e impares:

Trabajo para el alumno

Un número es **par** si es múltiplo de 2. O sea, un número par puede escribirse como 2 x ... .

Un número es **impar** si no es múltiplo de 2. O sea, un número impar puede escribirse como 2 x ... + 1.

El maestro explicará estas definiciones y preguntará por qué los impares pueden expresarse como "2 por algo más 1", ¿qué sucede si fuera más 2?, ¿y si fuera más 3?, ¿más 4?

En el problema 4 los niños tendrán ocasión de utilizar las relaciones recién introducidas.

Trabajo para el alumno

Problema 4

Para cada una de las siguientes afirmaciones, decidí si es Verdadera o Falsa y explicá cómo llegaste a pensarlo:

a) Todos los números pares son divisibles por 2.
b) La suma de dos números pares es un número par.

c) La suma de una cantidad par de números impares es un número impar.
d) La suma de una cantidad impar de números impares es un número impar.
e) La suma de un número par y de un número impar es un número impar.

Si el docente considerase que este listado resulta demasiado extenso, podrá proponer trabajar sobre algunas afirmaciones y dejar las otras como tarea.

La primera se puede justificar apelando a la definición de número par : 2 x .... . Para la segunda, los alumnos quizá lleguen a establecer que están sumando dos números que pueden anotarse como 2 x ... + 2 x ... . Si no surgiera del grupo, el docente recordará la relación ya establecida: al sumar múltiplos de un número se obtiene un múltiplo de ese número.

La falsedad de la afirmación c) y la verdad de la afirmación d) se pueden justificar del mismo modo. Sabemos que un número impar se puede escribir como 2 x ... + 1. Si tenemos una cantidad par de números impares, esos « +1 » forman un número par, es decir, un número de forma 2 x ... . En cambio, si la cantidad de números impares es impar, esos « +1 » forman un número de la forma 2 x... + 1. Esto se mostrará a partir de ejemplos que permitan observar cómo se agrupan los + 1 de cada expresión impar.

Por ejemplo :

13 + 7 + 15 + 11 = 2 x 6 + 1 + 2 x 3 + 1 + 2 x 7 + 1 + 2 x 5 + 1 =
= 2 x 6 + 2 x 3 + 2 x 7 + 2 x 5 + 4

↓

(2 x 2, obtenido a partir de las 4 veces)

13 + 7 + 15 = 2 x 6 + 1 + 2 x 3 + 1 + 2 x 7 + 1
2 x 6 + 2 x 3 + 2 x 7 + 3

↓

(obtenido a partir de las 3 veces « +1 »)

Trabajo para el alumno

DIVISIBILIDAD POR 4

Problema 5

¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 4 ?

10 - 20 - 30 - 40 - 50 - 60 - 70 - 80 - 90 - 100

Hasta 40 podemos saberlo, pensando en la tabla. ¿Cómo es posible saberlo rápidamente sin hacer la cuenta pensando en los múltiplos de 4 que ya conocemos?

Un análisis colectivo llevará a los alumnos a identificar cómo pueden conocer los múltiplos de 4 a partir de múltiplos ya conocidos. Por ejemplo : 80 es divisible por 4 porque es dos veces 40. Es decir, se están sumando dos múltiplos de 4. También podría argumentarse que 80 es 2 x 4 x 10, por lo tanto, es divisible por 4.

Si los alumnos no lo hubiesen advertido, el docente les hará notar que, cada dos números "redondos", hay un múltiplo de 4: 10 no es múltiplo de 4, 20 sí, 30 no, 40 sí, etc. Se puede analizar que si a un múltiplo de 4 se le suma 10, el resultado no será múltiplo de 4 y que si se suman otros 10, sí se obtendrá un múltiplo de 4. Se podría preguntar para qué números es posible decir si serán divisibles por 4 a partir de lo analizado.

El docente pedirá a los alumnos que anoten las conclusiones de lo discutido en sus carpetas y procederá luego a una revisión colectiva de lo anotado para realizar una nueva versión, ahora de todo el grupo, de las conclusiones.

Trabajo para el alumno

Problema 6

¿Podés encontrar una manera rápida, sin hacer la cuenta, de decir si los siguientes números son divisibles por 4?

100 200 300 400 500 600 700 800 900 1.000

Es probable que algunos alumnos crean en principio que en este caso puede suceder algo similar a lo que ocurre con los « nudos » de las decenas recién trabajados: que los múltiplos de 4 avancen de a 200. La reflexión colectiva se orientará a analizar que, si 100 es múltiplo, cualquier número que pueda formar con grupos de 100 es múltiplo de 4. Aquí se remitirá nuevamente a las propiedades ya analizadas y utilizadas en reiteradas oportunidades: a) la suma de múltiplos de un número da un múltiplo de ese número y b) la multiplicación de un múltiplo de un número **a** por cualquier otro número, da un múltiplo de ese número **a**.

Trabajo para el alumno

Problema 7

¿Podés encontrar una manera rápida, sin hacer la cuenta, de decir si los siguientes números son divisibles por 4? Para cada caso, explicá cómo lo pensaste.

68
54
43
42
102
107
120
116
134
148
158
316
520
1.012

En un espacio de reflexión colectiva posterior a la resolución individual o de a dos, esperamos que puedan apoyarse en relaciones con los múltiplos que ya conocen. Para los números de dos cifras, en los resultados de la tabla y los análisis realizados a partir de la serie de los nudos de las decenas, o de descomponer un número en una suma o una multiplicación que involucre a múltiplos de 4.

Por ejemplo, para 68, los alumnos podrán decir que es 60 + 8 y ellos saben que ambos son múltiplos de 4. El docente podrá proponer la escritura de 4 x 15 + 4 x 2. Para 54, ya saben que 50 no es múltiplo de 4, por lo tanto, si a ese número se le agregan 4 no se obtiene otro múltiplo de 4. Aquí podrá remitirse al trabajo sobre división entera. Si al dividir 50 por 4, el resto es 2; con 54 se obtiene el mismo resto.

Para los números de 3 cifras, se busca establecer que el número se puede expresar como un múltiplo de 100 más el número que forman las dos últimas cifras. Como el múltiplo de 100 es múltiplo de 4, basta con analizar qué sucede con las dos últimas cifras. Para ello, los alumnos se apoyarán en todas las relaciones mencionadas anteriormente.

Trabajo para el alumno

Problema 8

De a dos, piensen y escriban, un criterio o más de uno para saber sin equivocarse y sin hacer la cuenta, si un número cualquiera es divisible por 4.

A través de esta tarea se pide una enunciación general, para cualquier número, no para unos números particulares. Es cierto que los alumnos apelarán -y buscamos que lo hagan- a ejemplos para explorar qué hace que un número sea divisible por 4, pero –del mismo modo que lo señalamos para otras oportunidades– el enunciado del criterio no sale directamente de la lectura de los ejemplos sino de relaciones que van estableciendo los niños en sus interacciones entre lo que están buscando y las significaciones que atribuyen a lo que sucede en los ejemplos movilizados. Es decir, los ejemplos constituyen un terreno de exploración, no ofrecen directamente el criterio que los alumnos deben elaborar.

Luego, podrán reunirse de a dos pares de alumnos a confrontar los criterios y seleccionar el o los criterios que les parecen mejores, o incluso formular otro/s. Se podrá organizar un intercambio entre las diferentes producciones. Para ello, una posibilidad es que los grupos anoten el o los criterios elegidos en afiches que quedarán expuestos en el salón para que todos los grupos puedan analizar los criterios formulados por sus compañeros. Se dará un tiempo para que se lean, se anoten preguntas sobre los que no se entienden, se realicen objeciones, etcétera.

Posteriormente, se organizará una puesta en común, en la cual se retomen dichas afirmaciones, se realicen preguntas sobre las producciones de los compañeros que no se comprendan, se analice su validez, se confronten tratando de ver cuáles son similares, cuáles podrían incluirse en otra más general, etcétera.

En esta instancia los alumnos muy probablemente afirmarán –o será introducido por el maestro– que los números divisibles por 4 son pares: es decir, el número tiene que ser par. Ahora bien, esta relación "Si un número es divisible por 4, entonces es par", lleva muchas veces a los alumnos a sostener su afirmación recíproca (errónea): "Si un número es par, entonces es divisible por 4". En otros términos, todos los múltiplos de 4 son pares, pero no todos los pares son múltiplos de 4, sólo algunos lo son. Estas relaciones deberán ser discutidas en clase probando la verdad de la primera y la falsedad de la segunda. La misma relación podría enunciarse del siguiente modo: si un número es divisible por 4 es divisible por 2, ya que si puede escribirse como 4 x ...., también puede escribirse como 2 x 2 x ... . Más informalmente, si recorremos la tabla del 2, cada dos múltiplos de 2 encontramos un múltiplo de 4, porque cada 2 veces 2 se forma 1 vez 4. Justamente, por esa razón, no podemos decir que si un número es par es múltiplo de 4, porque hay pares que no lo son, hay pares que pueden escribirse como 2 x ... pero no como 2 x 2 x ... .

Se espera que, de algún modo, los alumnos lleguen a establecer que como un número redondo de centenas es múltiplo de 4, es suficiente analizar las dos últimas cifras y, para ello, cuentan con las relaciones que pueden realizar con múltiplos conocidos de la tabla del 4 y de los "nudos" de las decenas. El docente podrá ofrecer una escritura aritmética para esta condición. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 512 &= 5 \times 100 + 12 = \\ &= 5 \times 100 + 4 \times 3 = \\ &= 5 \times 4 \times 25 + 4 \times 3 \end{aligned}$$

Vemos entonces que 512 es múltiplo de 4 porque puede descomponerse en una suma de múltiplos de 4. En cambio, 1.007 no es divisible por 4 porque no puede descomponerse en una suma de números divisibles por 4:

$$1.007 = 10 \times 100 + 7 = 10 \times 100 + 4 \times 1 + 3$$

Divisibilidad por 3

Para trabajar el **criterio de divisibilidad por 3** proponemos a continuación dos vías de acceso entre las cuales optará el docente: la primera, abarca desde el problema **9** hasta el problema **17**; la segunda, desde el **17** hasta el **20**. En la primera, se comienza por proponer problemas que lleven a los alumnos a "tejer" diferentes relaciones, establecer criterios parciales, que sirvan frente a algunos números para, a partir de allí, introducir posteriormente el criterio convencional. En las actividades 17 a 20, se propone una presentación más directa, en la que el docente explique las razones del funcionamiento del criterio "oficial" de divisibilidad por 3 para luego hacerlo funcionar en algunos problemas. El docente podrá realizar el recorrido completo desde el problema 9 hasta el 20, podrá optar por seleccionar algunos o podrá restringirse al trabajo con los problemas 18 a 20, recuperando luego algunos de los problemas del primer trayecto. La decisión estará regida en principio por el tiempo disponible, sabiendo que la primera opción, con todo su interés, se hace algo más extensa; la segunda permite, en caso de no disponer de tiempo para desplegar la primera, un atajo que no sacrifique la comprensión de la regla.

Trabajo para el alumno

Problema 9

Sabiendo que 720 es múltiplo de 3, ¿podrías decir otros múltiplos de 3 cercanos a 720? Para cada caso, explicá cómo es posible estar seguro sin hacer la cuenta de que esos números son divisibles por 3.[1]

[1] Algunos de los problemas que se proponen para trabajar sobre el criterio de divisibilidad por 3 han sido retomados a partir de un trabajo elaborado por Raúl Pontello en el marco del Postítulo "Especialización superior en la enseñanza de la matemática para el Nivel Primario (I y II Ciclo)", Escuela de Capacitación Docente CePA, Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, marzo de 2004.

Tras un momento de resolución individual o de a dos, se pondrán en común los múltiplos hallados, analizando los criterios utilizados para establecer que tales números son divisibles por 3. El análisis colectivo se focalizará en que los múltiplos de 3 van de 3 en 3, y que así es posible hallar otros múltiplos. También a partir de esa idea es posible establecer que, si a un múltiplo de 3 se le agrega o se le quita otro múltiplo de 3, se encuentra un número que también lo es. Así, por ejemplo, 738, 750, 690, etc. son múltiplos de 3. Del mismo modo, se podría rescatar que, si se multiplica 720 por cualquier otro número, también se obtiene un múltiplo de 3. En otros términos, en este momento se rescatará con toda la clase cómo puede saberse si un número es divisible por 3 a partir de establecer relaciones con otros múltiplos ya conocidos.

Trabajo para el alumno

Problema 10

Tenemos las siguientes ternas de números consecutivos:

11 - 12 - 13
25 - 26 - 27
41 - 42 - 43
97 - 98 - 99

¿Cuántos números divisibles por 3 hay en cada terna?
¿Será siempre la misma cantidad de números divisibles por 3 para cualquier terna? ¿Por qué?

Se podría proponer a los alumnos que trabajen sobre este problema individualmente o de a dos para luego pedirles que lo discutan en pequeños grupos –de 4 integrantes– donde deberán establecer algún acuerdo y anotar las conclusiones obtenidas. En una puesta en común, podrán copiarse las conclusiones en el pizarrón para confrontarlas y analizarlas. Se busca establecer con todos los alumnos que, como los múltiplos de 3 van de 3 en 3, cada 3 números seguidos, hay seguro un múltiplo de 3 y nunca puede ser más de uno: si es el primero, no pueden ser el segundo ni el tercero; si es el segundo... Se podrá apoyar este análisis sobre la recta numérica.

Trabajo para el alumno

Problema 11

Tenemos el siguiente grupo de cuatro números naturales seguidos:

150 - 151- 152 -153

¿Qué cantidad de múltiplos de 3 hay en cada uno de ellos?

¿Será siempre la misma cantidad para cualquier grupo de cuatro números naturales seguidos?

Se podrá proceder tal como se hizo con el problema 10. Si los alumnos se limitaran a probar con ejemplos de cuaternas que comiencen todas con un múltiplo de 3, el docente podrá proponerles otros ejemplos en los que el múltiplo de 3 se encuentre en el segundo o tercer lugar. En la puesta en común, buscando dar un carácter general a las afirmaciones de los alumnos, se retomarán cuáles son los lugares en los que puede caer un múltiplo de 3 en una serie de cuatro números seguidos, y dónde caen el múltiplo anterior y el posterior en cada uno de esos casos.

Trabajo para el alumno

Problema 12

A continuación, aparece la lista de los números "redondos" hasta 100.

- ¿Cuáles son múltiplos de 3? ¿Cómo podés saberlo rápidamente sin hacer la cuenta de dividir?

- ¿Cuáles son los restos, respectivamente, al dividir 10 y 20 por 3? Sin hacer la cuenta de dividir, se puede saber cuál es el resto al dividir por 3 a los números de esta lista que no son múltiplos de 3. ¿Cómo?

- A partir de esos restos, ¿cómo podemos saber cuáles son los múltiplos de 3 más cercanos a esos números "redondos"?

	Sobra al dividir por 3
10	
20	
30	
40	
50	
60	
70	
80	
90	
100	

Entre todos, se revisará cuáles son múltiplos de 3 y cómo puede establecerse esto a partir de múltiplos conocidos. Por ejemplo, podrán afirmar que 30 lo es, por la tabla o porque saben que 3 x 10 es 30; 60 a partir de 30 o de 6; y 90 a partir de 30, o de 30 y 60, etcétera.

El segundo ítem apunta a establecer que sabiendo que, al dividir 10 por 3, el resto es uno y para 20, el resto es 2, es posible saber cuál será el resto al dividir los otros números redondos: como 40 se forma agregando 10 a un número que es múltiplo (30), sabemos que el resto va a ser 1; 50 se puede formar agregando 20 a un múltiplo de 3, por lo tanto, el resto será 2; etcétera.

Conocer el resto de un número al dividirlo por 3 nos permite saber a qué distancia de ese número estarán otros múltiplos de 3 cercanos. Así, por ejemplo, si con 70 tenemos resto 1, con 69 tenemos resto 0; lo mismo que para 72; si para 80, el resto es 2, 81 es múltiplo de 3, lo mismo que 78...

De esta manera, tales relaciones, a partir de múltiplos de 3 conocidos o del conocimiento de los restos al dividir ciertos números por 3, permiten un criterio parcial que hace posible cubrir un grupo de números. A partir de 30; 60 y 90, se puede anticipar si un número será divisible por 3 para un rango de números.

Trabajo para el alumno

Problema 13

¿Cuánto hay que sumar a cada uno de los siguientes números para obtener el múltiplo de 3 más cercano?

38
40
26
55
100
81

¿Puede haber algún número al que haya que sumarle 5 para llegar al múltiplo de 3 más cercano? ¿Por qué?

Después de un trabajo a cargo de los alumnos, el maestro retomará la cuestión con toda la clase para establecer que dado un número cualquiera, a lo sumo está a dos números de un múltiplo de 3. Podrá apoyarse para ello en la recta numérica. En este análisis podrá preguntar también cuáles serían los números a restar para encontrar el múltiplo de 3 más cercano. Se busca identificar que la distancia de un número al múltiplo de 3 anterior es el resto al dividir por 3 el número dado y determina también cuánto le falta para completar un nuevo "salto de 3". Así, se concluirá que para cualquier número que tomemos sólo caben tres posibilidades: o es múltiplo de 3; o sobra 1 al dividirlo por 3; o sobra 2. Se vincularán estas conclusiones con las obtenidas al analizar la cantidad de múltiplos de 3 en series de tres y cuatro números consecutivos (problemas 10 y 11, páginas 19 y 20).

Trabajo para el alumno

Problema 14

- ¿Puede ser que si sumo dos múltiplos de 3 obtenga un múltiplo de 3?

- ¿Puede ser que si sumo dos números que no son múltiplos de 3 obtenga un múltiplo de 3?

- ¿Puede ser que si sumo un múltiplo de 3 con otro número que no es múltiplo de 3 obtenga un múltiplo de 3?

El primer ítem sólo retoma una relación entre múltiplos ya identificada y utilizada en numerosas oportunidades. Respecto del segundo, los alumnos posiblemente explorarán mediante ejemplos y encontrarán que unas veces se obtiene un múltiplo de 3 y otras no. Si no sucediera así, si sólo se limitasen a probar con ejemplos en los que siempre encuentren múltiplos de 3 o donde siempre encuentren resultados que no lo son, el docente podrá ofrecer otros sumandos a modo de contraejemplo. A partir de que lleguen a establecer que se da sólo en algunos casos, se propondrá un nuevo problema: ¿cómo es posible saber en qué casos se cumple esa afirmación? Se apunta a que los alumnos puedan identificar que se acumulan los restos de ambos sumandos. Es decir, si el primer número –al dividirse por 3– tiene resto 1 y el segundo resto 2, con ambos restos se puede armar otro nuevo grupo o "salto" de 3. A partir de la misma relación se prueba la imposibilidad de la tercera afirmación.

Trabajo para el alumno

Problema 15

¿Existen múltiplos de 3 que terminan con 0? ¿Y con 1?, ¿y con 2?, ¿y con 4?, ¿y con 5?, ¿y con 6?, ¿y con 7?, ¿y con 8?, ¿y con 9?

¿Qué sucederá con los números de tres y de cuatro cifras?

Los alumnos han trabajado previamente con criterios de divisibilidad (por 2; 5; 10) para los cuales bastaba considerar la última cifra. También trabajaron con el criterio del 4 para el cual debían considerar las dos últimas cifras. Por lo tanto, es posible que generalicen en exceso esas relaciones y crean que siempre basta con considerar cómo termina un número. A partir de esta actividad se persigue llegar a concluir que la última cifra por sí sola no nos aporta información acerca de si un número será o no divisible por 3.

El problema 16 consiste en un juego que el docente propondrá a los alumnos para que juegue toda la clase organizada en pares de alumnos.

Trabajo para el alumno

Problema 16

Tendrán 2 minutos para anotar la mayor cantidad de números de dos cifras que sean divisibles por 3. Ganan los que hayan anotado más números.

En el momento de anotar los números encontrados y comprobar quiénes ganaron, se deberá validar que efectivamente esos números sean múltiplos de 3. Para ello, se espera que los alumnos se remitan a los múltiplos de 3 ya conocidos. El docente se detendrá sobre algunos números para analizar los restos al dividir por 3 cada uno de los sumandos que resulten de su descomposición. Por ejemplo:

Para 12: ¿cuánto sobra al hacer 10 : 3? Ese 1 sobrante se puede agregar a 2 y tenemos otro grupo o "salto" de 3.

Para 21: al hacer 20: 3, sobran 2 que, al sumarse con el 1 de las unidades, forman otro grupo de 3.

Para 24: los dos que sobran al hacer 20 : 3, se suman a los 4 de las unidades y se forman 2 grupos de 3.

Para 42: al hacer 40: 3, podemos pensar que sobra 1 que se agrega a las unidades, formando un grupo de 3. Pero también puede pensarse como 4 x 10 + 2. Por cada 10 que se divide en 3 sobra 1, con lo cual si se divide por 3 cuatro veces 10, sobran 4 que, agregados a los 2 de las unidades, da como resultado 6 que se puede repartir en 3 sin que sobre nada.

Interesa aquí que el docente muestre a los alumnos cómo, a partir de sumar los restos al dividir por 3 cada una de las "partes" de la descomposición decimal del número, se suman y, en caso de ser divisibles por 3, todo el número lo es:

También se retomará el trabajo en el problema 14 sobre la afirmación que consideraba bajo qué condiciones la suma de diferentes números que eran o no eran múltiplos de 3 daba un múltiplo de 3.

Problema 17

De los problemas 12 y 13 ya sabías que el resto de 100 : 3 es 1. ¿Cómo se puede saber el resto de estos números "redondos" al dividirlos por 3 sin hacer la cuenta de dividir?

100 200 300 400 500 600 700 800 900 1.000

Es posible que los chicos crean que, como para 100 el resto es 1, todos los nudos de las centenas tienen el mismo resto al dividirse por 3. Será interesante, retomar con ellos que si 100 : 3 tiene resto 1; 200 (100 + 100) tendrá resto 1 + 1 al dividirse por 3 y así...

A partir de lo que saben para los números de tres cifras "redondos", ¿cómo podríamos hacer para buscar otros números de tres cifras que sean múltiplos de 3?

Tratando de mostrar cómo es posible saber si los números anotados son divisibles por 3, es probable que los alumnos se apoyen en múltiplos ya conocidos. Por su parte, el docente puede retomar la idea de descomponer el número para tratar de encontrar el resto. Por ejemplo, para 120:

120 = 100 + 20

Para 100, sobra 1; para 20 sobran 2; juntando ese 1 y esos 2, se forma otro grupo de 3.

Si fuera 117 = 100 + 10 + 7

Para 100, sobra 1
Para 10 sobra 1
Se juntan esos dos unos con el 7, formando 9, que es divisible por 3.

Se repreguntará por qué el análisis se centra en los restos de dividir por 3 cada uno de los sumandos de la descomposición del número en cuestión. La idea es que los alumnos se den cuenta de que se están haciendo descomposiciones de manera de "separar", por un lado, múltiplos de 3 y, por otro, "lo que sobra". Para 100, por ejemplo, tenemos en cuenta el uno que sobra porque 99 ya sabemos que es una cantidad exacta de veces 3.

Para 232:
Del 200 sobran 2 (al dividirlo por 3); del 30, nada. Los dos sobrantes del 200 se suman a las dos unidades, entonces no se forma una cantidad exacta de veces 3, por lo tanto, el número no es divisible por 3.

El docente podrá pedir a los alumnos que prueben con otros números de tres cifras. También podrá pedir que exploren si esto que están aprendiendo servirá para números de más de tres cifras.

El docente presentará a toda la clase el criterio de divisibilidad por 3. A continuación, ofrecemos una explicación posible.

En primer lugar, se puede enunciar y anotar el criterio: un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es divisible por 3. Luego pasará a explicar por qué funciona este criterio. Por ejemplo, para 324, mostrar que es posible descomponerlo en potencias de la base del siguiente modo:

100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 4

A su vez, a cada uno de esos 10 ó 100 es posible restarle 1 para convertirlos en múltiplos de 3 menos 1.

99 + 99 + 99 + 9 + 9
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4

Se sabe que los números de la primera línea son divisibles por 3 porque 99 = 3 x 33 y 9 = 3 x 3. De la primera parte ("múltiplos de 3"), entonces, podemos estar seguros de que será múltiplo de 3. Luego, ¿cuántos unos sobran? La misma cantidad que señalan las cifras del número aisladas, porque éstas indican cuántas veces se restó 1 a cada una de las potencias de la base en las cuales se descompuso el número.

En síntesis, se suman las cifras porque indican los restos al dividir por 3 cada una de las potencias de la base en las cuales se descompuso el número, y se comprueba si esa parte del número también es divisible por 3 o no.

Trabajo para el alumno

Problema 18

Escribí un número de tres cifras que sea múltiplo de 3 y otro que no lo sea.

¿Cuáles de estos números son múltiplos de 3?

853
628
78
306

Problema 19

¿Es verdad que si a un número divisible por 2 le sumás 1, obtenés un número divisible por 3?

Frente a este problema, es probable que, probando con ejemplos, los alumnos adviertan que el enunciado es falso: que encuentran múltiplos de 2 a los cuales les suman 1 y no son divisibles por 3.[2]

Problema 20

Los criterios de divisibilidad son reglas para saber si un número es divisible por otro sin necesidad de hacer la división. Revisá y anotá todos los criterios que fuimos analizando.

Problemas para revisar lo que hicimos

1) Inés cuenta de 3 en 3, Juan cuenta de 5 en 5. ¿En qué números coinciden? ¿Cuántas posibilidades hay?

2) Y si se agrega Joaquín contando de 6 en 6, ¿en qué números coincidirán los tres?

En la puesta en común se analizarán las resoluciones. La idea respecto al primer ítem es que los alumnos puedan advertir que cada tres veces 5 se tiene una cantidad exacta de veces 3, entonces cada 15 números coincidirán. Lo mismo a propósito del segundo ítem: cada 5 veces 6, se tiene una cantidad exacta de veces 5 y una cantidad exacta de veces 3. Por lo tanto, los tres chicos coincidirán en el número que dicen cada 30 números.

Se busca también que los alumnos adviertan que se puede seguir contando de este modo de manera indefinida, por lo tanto, las posibilidades son infinitas: cada 15 números para 1) y cada 30 para 2), coincidirán.

Estos diferentes "saltos" a lo largo de los números y sus coincidencias se pueden explicar también sobre la recta numérica.

[2] El criterio de divisibilidad por 9 se apoya en las mismas relaciones que el criterio de divisibilidad por 3: como el número puede descomponerse en una suma de múltiplos de 9 más 1, esos unos sumados equivalen a la suma de las cifras; es decir, las cifras indican los restos al dividir por 9 cada uno de las potencias de la base por ellas indicadas. Si el docente lo considerase, podrá explicarlo a sus alumnos.
Así, por ejemplo, 243 puede descomponerse como:
100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 99 + 1 + 99 + 1 + 9 + 1 + 9 + 1 + 9 + 1 + 9 + 1 + 3. Como 99 y 9 ya sabemos que son múltiplos de 9, sólo queda por analizar si esos "unos" forman un múltiplo de 9 o no.

Será interesante llevar a los alumnos a que expliciten las semejanzas entre este problema y el de la búsqueda de múltiplos comunes abordado al inicio de esta unidad.

Trabajo para el alumno

Problema 3

Silvana tiene una bolsa de caramelos. Los quiere repartir en paquetes, de manera que todos tengan la misma cantidad. Si pone 5 caramelos no le sobra ninguno. Si pone 7 caramelos en cada paquete tampoco le sobra ninguno. Y si pone 3 caramelos en cada paquete, le sobra 1. ¿Cuántos caramelos puede ser que tenga Silvana en la bolsa? ¿Hay una sola respuesta posible?

Este problema es complejo y seguramente presentará dificultad a los alumnos. No esperamos que todos lo hayan resuelto a la hora de discutir con el conjunto de la clase la resolución. No haber llegado a encontrar una respuesta al problema no invalida el trabajo de exploración y búsqueda sobre el problema iniciado por el alumno. Al contrario, esa exploración servirá de marco para que los alumnos puedan interpretar la información aportada por las confrontaciones entre compañeros o por el docente mismo.

Se puede sugerir que primero piensen cuál sería la respuesta si sólo se hubieran dado las dos primeras informaciones: si se ponen de a 5 y si se ponen de a 7. Allí, se advertirá que se trata de saltos regulares de a 35. A partir de entonces, se trata de buscar cuándo esos saltos regulares de a 35 son además múltiplos de 3 + 1, es decir, se pueden escribir bajo la forma ... x 3 + 1. Esto puede llevar a advertir que 70 cumple con las tres condiciones: es múltiplo de 5 y 7 y, a su vez, es el siguiente (+1) de un múltiplo de 3 (porque 23 x 3 = 69). Esas relaciones se reinvertirán trabajando sobre un problema similar.

Trabajo para el alumno

Problema 4

Se quieren armar cajas con cierta cantidad de alfajores. Si se ponen 6 alfajores en cada caja no sobra ninguno. Si se ponen 4 en cada caja tampoco sobra ninguno y si se ponen 5 alfajores en cada caja, sobra 1 ¿Cuántos alfajores puede haber si se sabe que hay entre 1.200 y 2.000?

Problema 5

Tengo una cantidad de ganchitos que, cuando los agrupo de a 4, no me sobra nada y, cuando los agrupo de a 2, me sobra 1. ¿Cuántos ganchitos puede haber?

La particularidad de este problema es que no tiene ninguna solución posible. Probablemente los alumnos prueben con algunos ejemplos pero adviertan rápidamente que si es posible ponerlos de a 4, también se pueden agrupar de a 2: con cada grupo de 4, se puede armar una cantidad exacta de grupos de 2 ganchitos. El docente apelará a vincular estas afirmaciones con las relaciones entre los múltiplos de 4 y de 2, o la idea de que todo múltiplo de 4 es par.

Podrá proponer, finalmente, que piensen otras cantidades para cada grupo de ganchitos mencionado en este problema, de manera que la solución resulte imposible como en este caso. En la puesta en común deberán justificar por qué no es posible hallar una solución para las cantidades propuestas por ellos.

Números primos y compuestos

Trabajo para el alumno

Problema 1

De a dos, piensen números que se puedan "armar" con cuatro factores diferentes de 1.

¿Se podrían desarmar en más de 4 factores? ¿Cuáles?

¿Todos los números podrían "armarse" con cuatro factores?

Brevemente, se retomará este problema para señalar que hay números que sólo pueden dividirse por sí mismos y por la unidad, ocasión en la cual se presentará la definición de números primos y compuestos.

Te presentamos dos definiciones de **número primo**:

- Un número natural es primo si tiene exactamente dos divisores.
- Un número natural es primo si es divisible sólo por sí mismo y por 1.

Un número natural distinto de cero es **compuesto** si tiene más de dos divisores.

Los números 0 y 1 no son ni primos ni compuestos:

- 1 sólo es divisible por 1.
- 0 es divisible por todos los números.

Cuestión:
¿Por qué te parece que la primera definición no aclara cuáles son esos dos divisores?

A continuación, presentamos información acerca de un modo para establecer los números primos hasta el 100, la criba de Eratóstenes. La lectura y el comentario de este apartado es opcional. Si el docente decidiera no detenerse en él, quedará como material a disposición de los alumnos.

Trabajo para el alumno

Te contamos cómo se procede para determinar los números primos hasta el 100. Si querés, probá con la cuadrícula de números que figura a continuación.

a) Se toman los números hasta el 100.
b) Se quitan todos los múltiplos de 2, excepto el 2.
c) Luego, se sacan todos los múltiplos de 3, excepto el 3.
d) Los múltiplos de 5, excepto el 5.
e) Así, se continúa recorriendo la tabla y, cada vez que se encuentra un número sin tachar, se tachan todos sus múltiplos excepto ese número.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

¿Por qué te parece que se "saltean" los múltiplos de 4? ¿Con qué otros números pasará esto?

¿Por qué de esta manera es posible asegurarse de que quedan sólo los números primos?

¿Por qué no aparece el 1?

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
91						97			

Problemas para revisar lo que hicimos

A continuación ofrecemos un conjunto de problemas destinados a volver sobre los contenidos trabajados en esta unidad. El docente decidirá cuáles abordar, cuáles hacerlos con todo el grupo, cuáles proponer a algunos alumnos de acuerdo con los aspectos sobre los cuales requieran continuar trabajando.

Trabajo para el alumno

1) A continuación te damos una lista de afirmaciones. Colocá V o F según sean verdaderas o falsas. En cada caso vas a tener que justificar tu decisión.

a) Si un número es igual a 2 x otro número natural, entonces es divisibible por dos.
b) Si un número termina en 0 es divisible por 2.
c) Si dos números son múltiplos de 4, su suma también es múltiplo de 4.
d) Si un número es múltiplo de 4, es múltiplo de 2. Entonces, si un número es múltiplo de 2, también es múltiplo de 4.
e) Si dos números son múltiplos de 3, entonces la suma de dos múltiplos de 3 también es múltiplo de 3.
f) Cuando multiplicás dos múltiplos de 4, el resultado puede no ser múltiplo de 4.
g) Si dividís dos múltiplos de 5, el resultado puede no ser múltiplo de 5.
h) Si 342 es múltiplo de 3, entonces 3.420 es múltiplo de 30.

2) En la página 32 del cuadernillo de este bimestre hiciste una lista de lo que aprendimos de divisibilidad hasta ese momento del trabajo. Revisando lo que aprendimos hasta ahora, ¿qué agregarías a esa lista?

Del mismo modo que se confeccionó el listado en la actividad mencionada, se revisarán colectivamente esas listas y se elaborará una de todo el grupo que copiarán en sus carpetas y en la cual podrán anotar cómo se encuentran frente a cada uno de esos temas, de cuáles están más seguros y sobre cuáles necesitarían seguir practicando.

3) Tenemos una bolsa con 42 caramelos y queremos ponerlos en bolsas más pequeñas de tal forma que en todas entre la misma cantidad de caramelos y no quede ninguno suelto, ¿cuántos caramelos puede tener cada bolsa? Anotá todas las posibilidades.

a) ¿Y si fueran 70 caramelos?
b) ¿Y para 96 caramelos?
c) En otra oportunidad, se armaron bolsitas con 9 caramelos y no sobró ninguno. ¿Cuántos caramelos podría tener la bolsa grande inicial? ¿Hay una única posibilidad? ¿Cuántas?
d) ¿Y si se hubieran armado bolsas con 16 caramelos?
e) En este último caso, para la misma cantidad total de caramelos, ¿se hubieran podido armar bolsitas de 8 caramelos cada una? ¿Por qué? ¿Con qué otras cantidades de caramelos se hubieran podido armar bolsitas con la certeza de que no sobraría ninguno? ¿Por qué?

4)
a) Los 54 alumnos de los dos séptimos grados de una escuela van a formar equipos para trabajar. Las maestras quieren que todos los

equipos tengan la misma cantidad de alumnos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden agrupar?
b) Los de los dos sextos grados son 48 y van a hacer lo mismo. ¿De cuántas formas diferentes se pueden agrupar?
c) Para un proyecto común trabajan 6° y 7° juntos. Quieren agruparse pero con la misma cantidad de alumnos de 6° en cada grupo, por un lado, y la misma cantidad de alumnos de 7°, por otro lado. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos (con más de un integrante) que se pueden formar? ¿Cuántos alumnos de 6° y cuántos de 7° participarán en cada grupo?

5) Se tienen 48 baldosas para cubrir un patio rectangular, ¿cuántas baldosas de ancho y de largo puede tener ese patio? ¿Cuántas posibilidades hay?

6)
a) Si tienen un recipiente, ¿cuánta agua sería necesario que contenga si habrá que llenar exactamente bidones de 6 litros y de 4 litros. ¿Hay una sola respuesta? ¿Cuántas?
b) ¿Y si los bidones fueran de 3 y de 8 litros?

7) Si en la calculadora sólo pudiera multiplicarse por 5 y por 7, ¿cómo podrían hacerse los siguientes cálculos?

127 x 35
127 x 25
127 x 49
127 x 75

8) Para cada uno de los siguientes cálculos, no vale anotar en la calculadora el segundo factor. Cómo se podrían resolver usando, en su lugar, multiplicaciones por una cifra. Si hay más de una posibilidad, anótenlas.

37 x 42 =
56 x 81 =
51 x 100 =
67 x 36 =
47 x 86 =

9) Sabiendo que 35 x 24 = 840 resolvé mentalmente y anotá cómo lo pensaste para cada caso:

840 : 24 =
840 : 35 =
840 : 7 =
840 : 12 =
840 : 5 =
840 : 6 =
840 : 48 =

El siguiente problema incluye una serie de afirmaciones para que el docente seleccione o agrupe de modo de ir trabajándolas en diferentes momentos.

10)
Para cada una de las siguientes afirmaciones, indicar si es Verdadera o Falsa justificando la decisión tomada:[3]

a) Si un número es múltiplo de otro, la división del primero por el segundo es exacta.
b) Cada número es múltiplo de sí mismo.
c) El 0 es múltiplo de todos los números.
d) Los múltiplos de un número son infinitos.
e) En una división exacta, el dividendo es múltiplo del divisor.
f) Si un número es divisible por 6, entonces es divisible por 3.
g) Si un número es divisible por 3, entonces es divisible por 6.
h) Si un número es divisible por 3 y por 5, entonces es divisible por 15.
i) Si un número es divisible por 7, entonces no es divisible por 2.
j) Si un número no es divisible por 4, entonces no es divisible por 2.
k) Si un número es divisible por 16, entonces es divisible por 8 y por 4.
l) La suma de múltiplos de un número también es múltiplo de ese número.
m) La diferencia entre múltiplos de un número también es múltiplo de ese número.
n) Si un número a es múltiplo de otro b, todos los múltiplos de a son múltiplos de b.
o) Si un número es divisor de otro, todos los divisores del primero son divisores del otro.
p) Si un número es divisor común de otros, lo es de su suma.
q) Si un número es divisor común de otros dos, lo es de la diferencia del mayor menos el menor.
r) Si un número es divisor de otro, lo es de los múltiplos de este último.

[3] A partir de una actividad extraída de Chemello, G. (coord.), Agrasar, M.; Crippa, A. y Díaz, A. (2003): *Matemática 7*, Buenos Aires, Longseller.

11) Tres empresas de micros van desde la ciudad A hacia la ciudad B, distantes 180 km una de la otra. Las tres empresas tienen distintas paradas a lo largo de la ruta: La Atlántica, cada 15 km; El Lento, cada 10 km; y La Luz, cada 18 km. Los tres parten de la terminal de micros de la ciudad A en el Kilómetro 0. ¿En qué kilómetros coinciden las tres paradas? ¿Hay una única posibilidad? ¿Cuántas? ¿Cuál es el lugar más cercano en el cual coincidirán?

12) En una biblioteca hay menos de 800 libros. Se pueden colocar exactamente en grupos de 24 o en grupos de 36, pero si se colocan en grupos de 25 sobra uno. ¿Cuántos libros hay en la biblioteca?

13) Un granjero, tras llenar una cesta con huevos, piensa: "Si los pongo de a 12, me sobran 5. Si tuviera uno más, podría envasarlos exactamente en cajas de 10". El granjero juntó casi 100 huevos. ¿Cuántos juntó exactamente?

14) Al contar las bolitas de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6, unos chicos se dan cuenta de que cada vez les quedan 2. ¿Cuántas bolitas son sabiendo que es un número entre 100 y 150?

15) Una caja contiene menos de 100 naranjas. Contándolas de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6, sobran siempre 3 naranjas. ¿Cuántas naranjas tiene la caja?

16) Dos cometas se aproximan al sol, uno cada 25 años y otro cada 60 años. Si se aproximaron juntos en 1950, ¿en qué años volverán a hacerlo?

17)
a) Escribí 3 múltiplos de cada uno de los siguientes números que sean mayores que 100:

6
13
9
4

b) Buscá los divisores de cada uno de los siguientes números:
45
100
36
96

c) Buscá los divisores comunes de:

- 15, 55 y 70
- 42 y 18

d) Buscar el mcm de los siguientes números:

- 9 y 12
- 4, 6 y 8
- 5 y 10

e) Buscar el mcd de los siguientes números:
- 4 y 6
- 225 y 125

f) ¿Cuál es el número más pequeño que se puede dividir exactamente por 5, 6 y 15?

g) Completá la cifra que falta en estos números para obtener un número divisible por 2. ¿Cuántas posibilidades hay en cada caso? Justificá tu respuesta.

25...
1..4
...37

h) Agregale una cifra a estos números para obtener números que sean divisibles por 3.

261..
...261
43..
4...3

i) ¿Y para que sean divisibles por 4?

18) Una fábrica de gaseosas envasa las botellas en *packs* de 8. Un empleado, mientras carga los *packs* en el camión, va contando la cantidad de botellas que van cargando: 8; 16; 24; etc. ¿Cuáles de los siguientes números es posible que haya dicho?

34
56
46
72
78
80

96
100
108
120

19) Se sabe que el número 3.245 no es múltiplo de 7. Lo que no se sabe es si está más cerca de un múltiplo de 7 mayor o menor que ese número.

20) El número 6.347 no es múltiplo de 3. ¿Es cierto que el múltiplo de 3 más cercano es un número menor que 6.347?

21) Estamos buscando entre qué dos múltiplos de 8 consecutivos se encuentra el resultado de dividir 798 por 8.

22) Discutir la siguiente afirmación: "Si un número no es múltiplo de 8, como máximo hay que sumarle 7 para convertirlo en múltiplo de ese número".

Unidad 2

Fracciones

A continuación se presenta un conjunto de problemas que pueden proponerse después de trabajar con el problema 5 f) (*Material para el docente*, página 65). Estos problemas apuntan a abordar la conmensurabilidad entre dos números racionales. Al mismo tiempo, este tema se entrelaza con las relaciones sobre divisibilidad y proporcionalidad abordadas y es interesante que estas relaciones se pongan de manifiesto ante los alumnos.

Trabajo para el alumno

1) Ahora el robot se desplaza con pasos más largos, ¿podrías decir de cuánto es cada paso según la unidad de la pista?

Una breve discusión colectiva retomará los aspectos trabajados en el análisis del problema 5 f). Es posible establecer que el paso es de $\frac{2}{3}$ a partir de que con 3 pasos se alcanza el número 2, es decir, 2 se encuentra dividido en 3 pasos iguales ($2 : 3 = \frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ de 3).

Trabajo para el alumno

2) Si se prolonga indefinidamente la pista, ¿en cuáles otros números enteros caerán los pasos?

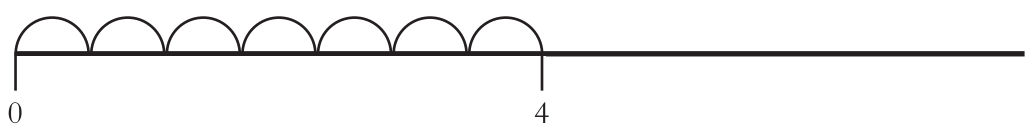
Quizá los alumnos apelen a prolongar la serie de pasos y números en los cuales irán cayendo. El docente podría sugerir construir una tabla de proporcionalidad como la siguiente:

Cantidad de pasos	3	6	9					
Número entero en el que cae	2	4	6					

Se podrá preguntar cómo avanzan la cantidad de pasos y cómo los números enteros en los cuales cae, y por qué unos avanzan de a 3 y otros de a 2. La idea de este problema apunta a destacar que siempre, cada 3 pasos, se avanzan 2 números en la pista, y vincular este problema con la búsqueda de múltiplos comunes. De hecho, en las explicaciones en el trabajo en torno de múltiplos comunes, el docente probablemente haya apelado a mostrar la relación entre múltiplos sobre la recta numérica. Esta será una ocasión para volver sobre ella.

Trabajo para el alumno

3)



Este problema es más complejo que los anteriores, por la subdivisión que supone. Pero se espera que se recurra a las relaciones construidas.

Trabajo para el alumno

4) Representá sobre una recta el primer paso de los siguientes robots. Esta vez te damos la longitud del paso de cada uno. Antes de hacerlo, fijate cuáles corresponden a la misma longitud del paso:

$\frac{1}{5}$

$\frac{7}{3}$

$\frac{6}{5}$

$\frac{8}{2}$

$\frac{2}{10}$

$\frac{4}{2}$

4

$1\ \frac{1}{5}$

$2\ \frac{2}{6}$

$\frac{12}{3}$

Escribí otras fracciones para dar las mismas longitudes de paso. ¿Cuántas hay para cada paso?

5) Un robot A da 2 pasos para ir del 3 al 6. Si está parado en el 9 y camina hacia la derecha, ¿pisará el 13?, ¿y el 15?

- Dibujá un segmento que mida como un paso del robot.

- Si el robot se para en el 6 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al "punto" en el que se detiene?

- ¿Cuánto mide el paso de este robot si se considera que la unidad es el segmento unidad de la recta?

- Otro robot, llamado B, da pasos de distinta longitud que el robot A, aunque también sus pasos tienen siempre la misma longitud. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 3 al 4.

- Si el robot B está parado en el 3 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al "punto" en el que se detiene?

- Si se colocan los dos robots en el 15 y comienzan a caminar hacia la derecha, ¿hay algún punto del trayecto en el que pisan los dos robots?

- ¿Se puede saber la relación entre los pasos de los dos robots?

6) El robot C da cuatro pasos para avanzar tres "números". Por ejemplo, para ir del 3 al 6, da 4 pasos. Imaginate que C salió del 0 y llegó hasta el 18.

El robot D da pasos más chicos que C, pero, si los dos salen de 0, D pisa en todos los puntos en los que pisó C. ¿Cuál puede ser la longitud de los pasos de D? ¿Hay más de una posibilidad? ¿Cuál es la longitud de los pasos de C? ¿Y la de los pasos de D?

7) El robot E da cuatro pasos para llegar desde el 0 hasta el 5. Si continúa caminando por la recta dando esos pasos, ¿pisa el $7\frac{1}{2}$? ¿Y el $8\frac{1}{2}$? ¿Cuánto miden los pasos de E?

8) Un robot X da 9 pasos para llegar del 0 al 2 y otro robot Y da 3 pasos para llegar del 0 al 2. ¿Es verdad que X pisa en todos los lugares en los que pisa Y? ¿Cuál es la longitud de los pasos de X? ¿Y la de los pasos de Y?

9) Representá sobre una recta numérica la longitud del paso de los siguientes robots:

$\frac{7}{4}$

$\frac{16}{7}$

$\frac{12}{3}$

$\frac{6}{4}$

10) Si tuvieras que dibujar el desplazamiento de este robot sobre una recta, ¿cuánto mediría cada paso?

Cantidad de pasos	3	6	9					
Número entero en el que cae	5	10	15					

- Este robot, ¿caerá justo sobre los siguientes números? Para aquellos números en los cuales sí caerá justo, ¿con cuántos pasos? ¿Cómo es posible saberlo sin hacer todo el recorrido?

30
45
37
25
40
48
94
100
54
105
72
500

- Para aquellos números en los cuales no caerá justo, ¿cómo es posible saber entre cuáles números enteros caerá sin hacer todo el recorrido?

- Cuando haya dado la siguiente cantidad de pasos, ¿habrá caído justo sobre un número entero? ¿Cómo es posible saberlo sin hacer todo el recorrido?

18
27
29
36
50
60
100
300

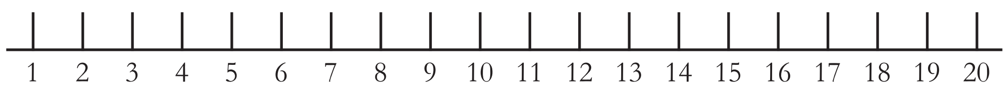
11) Completá las siguientes tablas que representan pasos regulares de diferentes robots en este juego.

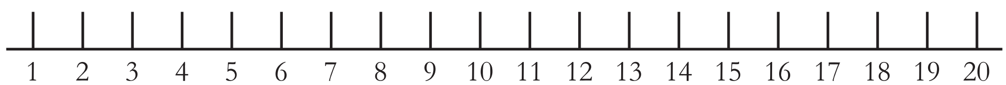
Cantidad de pasos	4	8	16	24	48			
Número entero en el que cae	22	44						

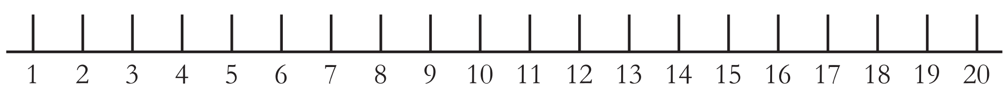
Cantidad de pasos	5	10	15	25	30	50	500	
Número entero en el que cae	7			35				

Cantidad de pasos	2	4	6	20	80	200	2.000	
Número entero en el que cae	7	14	21					

- Para cada una de ellas, ¿cuánto mide cada paso según la unidad de la pista? Representá aquí la primera parte de ese recorrido







12) Estas tablas representan los pasos de diferentes robots. ¿Son pasos regulares o no? ¿Cómo es posible darse cuenta? Para los que sí lo son, ¿cuánto mide cada paso según la unidad de la pista?

Cantidad de pasos	3	6	9					
Número entero en el que cae	5	10	15					

Cantidad de pasos	2	8	20	100				
Número entero en el que cae	7	28	70	350				

Cantidad de pasos	3	5	9	20				
Número entero en el que cae	8	9	25	48				

13) Representá sobre las siguientes rectas recorridos de robots que alcancen:

- El número 8 en 4 pasos regulares.
- El número 7 en 9 pasos regulares.
- El número 9 en 4 pasos regulares.
- El número 16 en 8 pasos regulares.

En cada caso, ¿cuánto mide cada paso según la unidad de la pista?

14) Decidí cuáles de los robots de la columna de la izquierda tienen el mismo paso que los de la derecha.

1) Alcanza el número 4 en 3 pasos regulares.	**1)** Alcanza el número 3 en 4 pasos regulares.
2) Alcanza el número 7 en 5 pasos regulares.	**2)** Alcanza el número 50 en 15 pasos regulares.
3) Alcanza el número 6 en 4 pasos regulares.	**3)** Alcanza el número 50 en 30 pasos regulares.
4) Alcanza el número 10 en 3 pasos regulares.	**4)** Alcanza el número 28 en 20 pasos regulares.
5) Alcanza el número 9 en 12 pasos regulares.	**5)** Alcanza el número 40 en 30 pasos regulares.
	6) Alcanza el número 30 en 20 pasos regulares.
	7) Alcanza el número 400 en 300 pasos regulares.
	8) Alcanza el número 3 en 2 pasos regulares.
	9) Alcanza el número 350 en 250 pasos regulares.

El docente, en una instancia colectiva posterior podrá retomar diferentes procedimientos para analizar los desplazamientos de estos robots:

- representándolos sobre rectas numéricas;
- a través de buscar múltiplos comunes a los números alcanzados y la cantidad de pasos para ese intervalo;
- a partir de relaciones establecidas sobre una tabla de proporcionalidad en la cual se representen los recorridos de cada robot: multiplicar por el mismo número ambos: al doble, el doble; diez veces .. etc. ; sumas de intervalos y cantidad de pasos correspondientes para hallar un intervalo mayor; la existencia de una constante de proporcionalidad.
- La búsqueda del valor de cada paso y el análisis de con qué multiplicaciones se pasó de uno a otro.

Trabajo para el alumno

15) A continuación, aparece una lista de robots diferentes de este juego. Ordenalos de menor a mayor según la medida de cada uno de sus pasos.

Para cada uno de los robots, proponé qué número pondrías en el punto de la recta en el que da la primera pisada (siempre considerando que salen desde el 0).

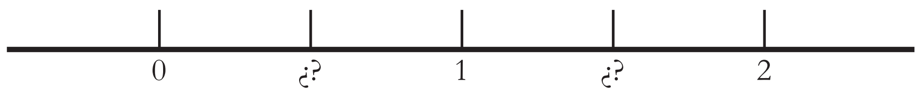
a) Alcanza 8 en 3 pasos regulares.
b) Alcanza 12 en 15 pasos regulares.
c) Alcanza 4 en 2 pasos regulares.
d) Alcanza 7 en 4 pasos regulares.
e) Alcanza 12 en 4 pasos regulares.
f) Alcanza 8 en 10 pasos regulares.
g) Alcanza 14 en 8 pasos regulares.
h) Alcanza 12 en 6 pasos regulares.
i) Alcanza 18 en 9 pasos regulares.
j) Alcanza 16 en 6 pasos regulares.

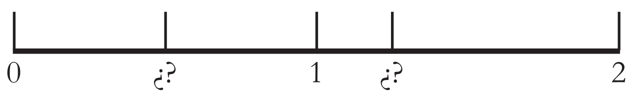
Otros problemas sobre representación de fracciones en la recta numérica

1) Se puede entregar una serie de tiritas de papel a los alumnos y una recta numérica con la unidad marcada para que deban indicar hasta dónde llega cada una de las tiritas y cómo llamarían a ese punto, es decir, cuánto mide la tirita considerando la unidad marcada sobre la recta.

2) Dada una recta con la unidad señalada y los puntos marcados (sin el número correspondiente): estas son marcas realizadas al medir una cantidad de tiritas de papel, ¿cuánto mide cada una de ellas si se considera la unidad señalada en la recta?

3) ¿Qué fracciones indican los signos en estas rectas?

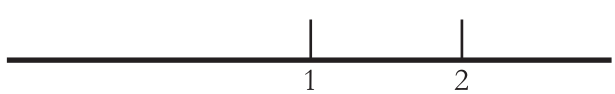




4) Colocá el 1 donde corresponda en esta recta.

5) Colocá el $\frac{1}{4}$ donde corresponda en esta recta.

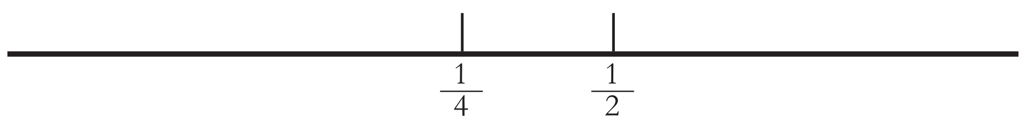
6) Colocá el $\frac{1}{2}$ y el $\frac{5}{2}$ donde corresponda en esta recta.



7) A partir de la información que aparece en la recta, indicá la ubicación del 1 y del 1 $\frac{1}{2}$.

8) A partir de la información que aparece en la recta, indicá la ubicación de $\frac{3}{2}$.

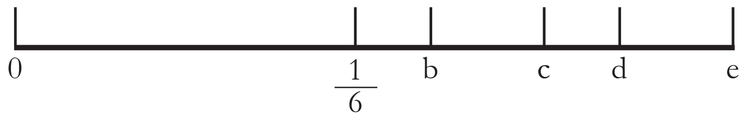
9) A partir de la información que aparece en la recta, indicá la ubicación del 0 y del 1.



10) A partir de la información que aparece en la recta, indicá la ubicación de $\frac{3}{5}$.

11) Conociendo la posición de $\frac{1}{2}$ y de $\frac{3}{5}$, indicá dónde debe colocarse $\frac{4}{5}$.

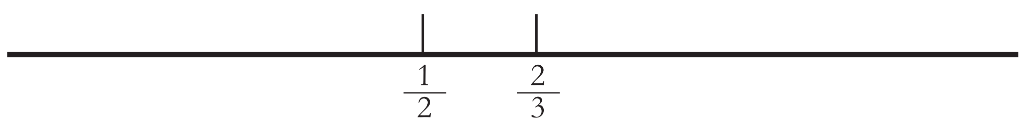
12) A partir de la información que aparece en la recta, establecé qué números corresponden a las letras que allí figuran



13) A partir de la información que aparece en la recta, indicá la ubicación del 0 y del 1.

14) A partir de la información que aparece en la recta, indicá la ubicación del 0 y del $\frac{3}{4}$.

15) A partir de la información que aparece en la recta, indicá la ubicación del 1 y del $\frac{5}{6}$.



16) A partir de la información que aparece en la recta, indicá la ubicación del 2 y del $\frac{3}{2}$.