PROGRESIONES DE LOS APRENDIZAJES

Educación Secundaria

Ciclo Básico

Matemática

Buenos Aires Ciudad

Vamos Buenos Aires

PROGRESIONES DE LOS APRENDIZAJES

Educación Secundaria

Ciclo Básico

Matemática

Progresiones de los aprendizajes : Matemática : Educación Secundaria : Ciclo Básico
Andrea Novembre ; Mauro Nicodemo ; coordinación general de Celina Armendáriz. - 1ª edición para el profesor - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa, 2020.
312 p. ; 29 x 21 cm.

ISBN 978-987-673-562-9

1. Educación Secundaria. 2. Matemática. 3. Evaluación. I. Nicodemo, Mauro II. Armendáriz, Celina, coord. III. Título.
CDD 510.12

ISBN: 978-987-673-562-9

Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa
Av. Paseo Colón 255
(C1063ACC) Ciudad Autónoma de Buenos Aires
ueicee@bue.edu.ar

Jefe de Gobierno
Horacio Rodríguez Larreta

Ministra de Educación
María Soledad Acuña

Subsecretario de Carrera Docente
Manuel Vidal

Subsecretaria de Coordinación Pedagógica y Equidad Educativa
María Lucía Feced Abal

Subsecretario de Gestión Económico Financiera y Administración de Recursos
Sebastián Tomaghelli

Subsecretario de Tecnología Educativa y Sustentabilidad
Santiago Andrés

Subsecretaria de la Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida
Eugenia Cortona

Director Ejecutivo de la Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa
Gabriel Sánchez Zinny

Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa

Coordinadora General de Evaluación Educativa
Lorena Landeo

Coordinadora del proyecto Progresiones de los aprendizajes
Celina Armendáriz (UEICEE)

Autores
Andrea Roxana Novembre
Mauro Fernando Nicodemo

Lectura crítica y discusión del material
Carolina Benito (UEICEE)
Fernando Bifano (UEICEE)
Carla Cabalcabué (GOC y UEICEE)
Alejandra Illuzzi (SCPyEE)
Federico Maciejowski (UEICEE)
Alejandro Rossetti (EM)

Equipo **UEICEE**
Coordinadora de Comunicación
Flor Jiménez Gally

Edición y corrección
Gabriela Berajá, Irene Domínguez

Colaboración
Alejandra Lanía

Diseño gráfico
Agustín Burgos, Adriana Costantino,
Magalí Vázquez

Web
Luca Fontana

Equipo **DGPLEDU**
Coordinadora de Contenidos Digitales
Silvia Saucedo

Edición y corrección
María Laura Cianciolo

Diseño gráfico
Patricia Peralta

Colaboración
Vanina Barbeito, Andrea Finocchiaro,
Ana Premuzic, Sebastián Vargas

Índice

Presentación

¿Qué saben y son capaces de hacer los estudiantes en una asignatura en cierto momento de su recorrido escolar?

¿Cómo podemos ayudarlos a avanzar en su proceso de aprendizaje apoyándonos en lo que ya saben?

¿Cómo abordar en el aula la diversidad de cada grupo, reconociendo las diferencias en los niveles de aprendizaje, y ofrecer a distintos estudiantes las oportunidades adecuadas para que continúen aprendiendo?

¿Qué hacemos con los estudiantes que están en un año y que requieren completar aprendizajes de años anteriores?

Estas y muchas otras preguntas similares atraviesan las progresiones para la enseñanza y el aprendizaje que aquí se presentan y han orientado el proceso de su elaboración. Se trata de interrogantes típicos para quienes nos dedicamos a la enseñanza y compartimos el desafío de fortalecer la calidad y la equidad en el acceso al conocimiento para todos los estudiantes.

El material propone una mirada sobre el aprendizaje que parte del reconocimiento de la heterogeneidad de la clase escolar como rasgo constitutivo de la realidad del aula, y se propone colaborar con el diseño de la enseñanza atendiendo a la singularidad de los avances que cada estudiante manifiesta.

¿Qué son las progresiones?

Se entiende por progresiones la descripción de recorridos posibles y pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos fundamentales de la trayectoria escolar. Estas descripciones se sustentan en el enfoque didáctico adoptado por el Diseño Curricular para cada área. Por lo tanto, las progresiones no representan líneas de desarrollo natural, sino que reconocen un contexto escolar situado en el marco de las definiciones propias del sistema educativo de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Sin embargo, al estar basadas en evidencia de aula, son verificables y proporcionan criterios claros y compartidos para el monitoreo de los aprendizajes con una perspectiva formativa, orientada a la toma de decisiones para la enseñanza.

Las progresiones en desarrollo corresponden a las áreas de Prácticas del Lenguaje/Lengua y Literatura y Matemática, en los niveles Primario y Secundario. La definición de las áreas atiende a su carácter básico, transversal e instrumental en el recorrido formativo de la educación obligatoria. Al interior de cada área (o asignatura en el Nivel Secundario) se establecen ejes (tomados de los respectivos diseños curriculares) que permiten organizar la descripción de aprendizajes prioritarios, con secuencia y complejidad creciente. Vale destacar que, en tal sentido, no se toman todos los contenidos del currículum, sino aquellos respecto de los cuales resulta posible, a la vez que necesario, establecer algunas pautas para la evaluación formativa.

Un aspecto contemplado en la elaboración es el progreso relativamente dispar o desparejo que las trayectorias escolares ponen frecuentemente de manifiesto aun al interior de una misma área o asignatura. Los avances en un área de conocimiento no siempre son homogéneos. Un estudiante puede progresar más rápidamente en su dominio de las operaciones en un determinado conjunto numérico que en la transición hacia el álgebra o los contenidos del campo de la geometría, por ejemplo. O bien puede desplegar estrategias lectoras muy interesantes y aún requerir más apoyo en la producción de textos. Por ello, las progresiones se han organizado asumiendo que un alumno puede avanzar con ritmo dispar en los diversos recorridos que se proponen según los ejes de cada área.

¿Cómo se relacionan las progresiones con el marco curricular?

Las progresiones ponen en relación los contenidos de enseñanza y objetivos establecidos en los documentos curriculares de la jurisdicción (*Diseño Curricular para la Escuela Primaria; Diseño Curricular. Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires; Metas de aprendizaje. Niveles Inicial, Primario y Secundario de las escuelas de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires* y *Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires*) y los aprendizajes manifestados por los estudiantes, considerando la heterogeneidad de los puntos de partida. En este sentido, como instrumento para la evaluación formativa, las progresiones resultan un complemento del marco curricular en el que se basan y dialogan con los materiales de desarrollo curricular que apuntan a fortalecer la intervención didáctica.

¿Para qué se pueden usar en la escuela las progresiones de aprendizaje?

El desarrollo del material busca contribuir a la tarea docente en lo que hace al proceso de observación y análisis del aprendizaje de los estudiantes, relevando elementos centrales a observar en cada área curricular. Ayuda a poner en diálogo las prescripciones curriculares con la realidad de los grupos para responder de manera oportuna y pertinente a las necesidades heterogéneas de aprendizaje que se identifican en el aula.

A la vez, esta mirada sobre los aprendizajes permite también a maestros y profesores establecer expectativas desafiantes y viables para cada alumno, en función de las condiciones de enseñanza generadas en el aula y en la escuela.

Es indudable que, para la configuración de mejores trayectorias escolares resulta fundamental incorporar en la escuela estrategias de trabajo y herramientas que reconozcan los distintos ritmos de aprendizaje, así como los puntos de partida de cada estudiante.

¿Cuál es la relación entre los niveles de las progresiones y los grados o años escolares?

Las progresiones se plantean por ciclo. Esta decisión fue adoptada con el propósito de alentar una mirada más amplia que el año como horizonte de intervención, contemplar los logros de los estudiantes en perspectiva y favorecer su uso para la definición de secuencias de trabajo específicas que se ajusten a las necesidades reales de aprendizaje. Al mismo tiempo, permiten plasmar la idea ya expresada de que los avances no se dan de manera "pareja" u "homogénea" en relación con las diversas áreas ni ejes de una misma área. Las progresiones deben ayudar, en este sentido, a individualizar las intervenciones en el aula y romper con la expectativa de homogeneidad en la clase escolar.

Desarrollo de las progresiones del aprendizaje

El siguiente esquema representa las progresiones del aprendizaje a desarrollar en Prácticas del Lenguaje/Lengua y Literatura y Matemática.

Comprende los niveles Primario y Secundario en una lógica de trayectoria o recorrido extenso por la escolaridad obligatoria.

Las progresiones de cada área se organizan por ejes, establecidos a partir de los respectivos diseños curriculares.

Área	Educación Primaria		Educación Secundaria	
	Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Ciclo Básico	Ciclo Orientado
Matemática	**Números y operaciones** *Sistema de numeración* *Suma y resta* *Multiplicación y división* **Espacio, formas y medida** *Espacio* *Formas geométricas* *Medida*	**Números y operaciones** *Números naturales* *Números racionales* **Geometría** **Medida** *Medidas de longitud, capacidad, peso y tiempo* *Perímetro, área y volumen*	**Números y álgebra** **Funciones y álgebra** **Geometría y medida** **Estadística y probabilidades**	**Números y álgebra** **Funciones y álgebra** **Geometría y medida** **Estadística y probabilidades**
Prácticas del Lenguaje/ Lengua y Literatura	Lectura Escritura de textos Sistema de escritura	Lectura Escritura de textos Conocimiento ortográfico Reflexión sobre la lengua	Lectura de textos literarios + Herramientas de la lengua Lectura de textos no literarios + Herramientas de la lengua Escritura de textos literarios + Herramientas de la lengua Escritura de textos no literarios + Herramientas de la lengua	Lectura de textos literarios + Herramientas de la lengua Lectura de textos no literarios + Herramientas de la lengua Escritura de textos literarios + Herramientas de la lengua Escritura de textos no literarios + Herramientas de la lengua

Este documento presenta las progresiones de aprendizaje en Matemática para el Ciclo Básico de la escuela secundaria.

Introducción

A continuación se presentan las progresiones de los aprendizajes esperados para el área de **Matemática** durante el Ciclo Básico de la escuela secundaria.

Este documento se propone aportar herramientas para planificar la enseñanza desde el reconocimiento de la diversidad de los conocimientos que van construyendo los estudiantes en Matemática a lo largo de su trayectoria educativa, y, particularmente, poniendo foco en la transición entre la escuela primaria y la secundaria, y los dos años que conforman el Ciclo Básico en este nivel. Las progresiones permiten identificar avances en los conocimientos de los estudiantes dando indicios del tipo de estrategia y práctica que se espera que desarrollen en cada nivel.

Para su elaboración se han considerado asuntos centrales de este nivel. En el Ciclo Básico de la escuela secundaria se espera desarrollar una gran diversidad de aprendizajes complejos. Por ejemplo, que los estudiantes inicien el recorrido que les permita avanzar de lo aritmético a lo algebraico, no solo en cuanto al manejo de la generalidad, sino también en construir un sentido del uso de las letras, al mismo tiempo que se trabaja sobre el dominio de las técnicas. Se complejiza asimismo el tipo de tarea esperada, por ejemplo, elaborar conjeturas y argumentar sobre su validez, validar afirmaciones verdaderas y hallar contraejemplos para las falsas tanto en el ámbito del álgebra como en el de la geometría, etcétera. Uno de los desafíos consiste, entonces, en planificar la enseñanza de modo que permita acompañar a los estudiantes en la construcción de los nuevos objetos matemáticos y las prácticas asociadas a ellos. La transición entre la escuela primaria y la secundaria es un punto de partida, teniendo en cuenta que, en ese pasaje, los contenidos que los estudiantes no hayan logrado construir en el Nivel Primario deberán constituir objeto de enseñanza en la escuela secundaria. Y aun en el caso de que sí hayan sido tratados en el Nivel Primario, es necesario proponer actividades que permitan a los estudiantes recuperarlos, reinvertirlos y resignificarlos.

Para la elaboración de las progresiones para el Ciclo Básico del Nivel Secundario se ha realizado una selección de algunos contenidos fundamentales del Diseño Curricular de la jurisdicción afianzando un criterio de continuidad con la producción curricular del área y de la Ciudad. El recorte de los contenidos que se han considerado como centrales para el desarrollo de este material no implica de ninguna manera la intención de que los demás no sean enseñados. Simplemente se comunican algunas prioridades frente a otras posibles.

Las progresiones para Matemática en el Ciclo Básico se presentan organizadas en capítulos que se corresponden con los cuatro ejes del Diseño Curricular: Números y álgebra, Funciones y álgebra, Geometría y medida, y Estadística y probabilidades.

El capítulo **Números y álgebra** comprende dos progresiones. La primera, "Información que porta un cálculo o una expresión" da cuenta de los aprendizajes correspondientes a la lectura de cálculos y expresiones y abarca tanto una entrada al trabajo algebraico a partir de la divisibilidad, como la producción de fórmulas. La segunda progresión, "Cálculos y operaciones en los conjuntos de los Números Naturales, Enteros y Racionales", incluye las estrategias de cálculo en cada conjunto así como sus propiedades. Cabe anticipar que en la primera progresión, donde se aborda la información que porta un cálculo o expresión, se ha considerado el análisis de la variación del perímetro y el área de figuras. Se trata de un contenido que se encuentra también presente en las progresiones de Geometría y medida.

El capítulo **Funciones y álgebra** incluye tres progresiones. La primera es "Aproximación a las funciones a través de gráficos cartesianos", donde el foco está puesto en las relaciones entre variables y en el desarrollo de una mirada tanto de lo puntual (el significado de un punto del gráfico) como de lo global (características generales relacionadas con la curvatura o no, el crecimiento, etc.). La segunda progresión, "Función lineal y ecuación de la recta", propone un análisis de los aprendizajes que implica diferenciar las funciones lineales de las de proporcionalidad directa, en los distintos registros de representación. Para la última progresión, "Ecuaciones e inecuaciones", se ha considerado el trabajo con ecuaciones desde un marco aritmético, algebraico y funcional.

El capítulo **Geometría y medida** comprende cinco progresiones. En "Construcción, congruencia y semejanza de triángulos" se parte de la reinversión de la definición de circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de otro para realizar las construcciones. Estas construcciones son la base para desarrollar criterios de congruencia y semejanza de triángulos. En la progresión "Construcción y congruencia de cuadriláteros" se toma la construcción de triángulos como base para construir cuadriláteros, analizar la existencia y cantidad de soluciones, y elaborar criterios de congruencia.

En la progresión "Áreas de triángulos y cuadriláteros" se propone analizar los aprendizajes de los estudiantes en torno al cálculo y a la comparación de áreas en base a propiedades geométricas. Otra progresión que se ha considerado es la de "Ángulos entre paralelas", donde se analizan las relaciones entre ángulos determinados por rectas paralelas cortadas por una transversal, basándose en los conocimientos sobre los ángulos de un paralelogramo. La última progresión que se ha considerado es la de "Teorema de Pitágoras", a propósito de la resolución de problemas que requieren reinvertir el teorema, desde aquellos de aplicación directa a otros donde se requiera descomponer una figura en otras.

Por último, el capítulo **Estadística y probabilidades** incluye progresiones para "Lectura, interpretación y producción de representaciones gráficas" y "Análisis y descripción de datos". En el primer caso se analiza la posibilidad de un estudiante de recolectar datos y producir y analizar diferentes representaciones de las variables en juego. En el segundo se pone el foco en el cálculo de diferentes medidas de tendencia central, analizando su pertinencia.

Debe advertirse que el desarrollo de cada eje es más extenso en algunos casos que en otros. Ello se debe a que hay contenidos centrales del ciclo que demandan varios años de trabajo y que no tienen presencia en la escuela primaria –por ejemplo, las funciones– y, por lo tanto, requieren de un tratamiento más prolongado y mayor detalle en la progresión de los aprendizajes esperados.

Para cada eje y subeje de contenidos se presentan diferentes niveles de progreso, que resultan necesariamente cortes arbitrarios del proceso. No se espera que los estudiantes se ubiquen precisamente en un nivel, sino que pueden estar también en tránsito de uno a otro. Las progresiones están pensadas para orientar la interpretación de sus conocimientos, pero no deben leerse los cortes como límites rígidos. Se busca que estas descripciones sirvan a la comprensión de los aprendizajes ya logrados y contribuyan a delinear recorridos posibles para la enseñanza. A partir de la planificación de estos recorridos, incluyendo actividades e intervenciones docentes, entre otras cuestiones, se espera que los estudiantes vayan evolucionando en los niveles de apropiación de los contenidos.

Asimismo, es preciso explicitar que los niveles no suponen necesariamente una correspondencia con los años o cursos que componen el Ciclo Básico; es decir, que el nivel I no siempre debe asumirse como propio de primer año. Por otra parte, según el contenido, un estudiante puede estar en distintos niveles, dado que manifiesta mayor avance, por ejemplo, al comparar áreas en base a transformaciones algebraicas e interpretación de fórmulas, y menor avance cuando se trata de compararlas en base a descomposiciones de las figuras. Por otro lado, los niveles no constituyen una secuencia fija y necesaria por la que tienen que pasar de manera graduada los alumnos. Se asume que los puntos de partida de los estudiantes, sus actitudes hacia la matemática, su vínculo con la escuela y el estudio y los puntos de llegada nunca son homogéneos en un grupo escolar, lo que implica que frente a una misma secuencia de enseñanza algunos alumnos habrán alcanzado un nivel y otros, otro diferente. En algunos casos, las situaciones que plantean los enunciados de los problemas que corresponden a los distintos niveles de un mismo contenido son las mismas y lo que cambian son las preguntas. Para otros contenidos, los problemas son los mismos, mientras que lo que cambia son las estrategias que se espera que desarrolle un estudiante en cada nivel. La intención de la inclusión de ejemplos es acompañar la lectura de las descripciones con actividades propias del aula que permiten poner en evidencia las paulatinas adquisiciones que realizan los estudiantes.

Una consideración adicional sobre los niveles: en este documento se ha incluido una columna previa al primer nivel que se identifica como “Transición entre primaria y secundaria”. Allí se incluyen aquellos conocimientos necesarios para poder avanzar en los aprendizajes específicos de secundaria. Al ser considerados de transición, es posible que los estudiantes no dispongan de todos ellos o no los recuerden. En cualquier caso, como se anticipó en párrafos anteriores, la escuela secundaria debe hacerse cargo de su enseñanza. No se trata de volver a trabajarlos como la primera vez, sino de plantear situaciones o secuencias que permitan recuperarlos. En este sentido, se recomienda la lectura de *Progresiones de los aprendizajes. Segundo ciclo. Matemática*[1], ya que las progresiones allí presentadas constituyen un punto de anclaje para pensar en la articulación entre niveles. De ese modo, las actividades planteadas para favorecer la transición y facilitar la recuperación de aquellos conocimientos construidos en la primaria podrán ser comprendidas por los estudiantes, y los conocimientos, reconocidos.

De esta forma, el material busca ser un punto de apoyo para la escuela y los profesores en la organización de propuestas de trabajo que contemplen a todos los estudiantes. A partir del diagnóstico del estado de conocimientos de los alumnos, es posible organizar agrupamientos con estudiantes de primer año y de segundo que tienen que aprender los mismos contenidos, diseñar dispositivos de reingreso para aquellos que hayan interrumpido su trayectoria escolar, pensar y explorar acciones de integración o adecuación curricular, etcétera. Se espera que estas progresiones sean herramientas que se usen en la escuela para diseñar dispositivos específicos de enseñanza asentados en aquello que "sí saben los estudiantes", más que en "lo que les falta" o "lo que no saben".

Además de las progresiones con forma de tabla, para cada eje se proponen ejemplos de actividades posibles destinadas a relevar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes. Se trata de ejemplos de problemas que permiten hacer una lectura e interpretación sobre los estados de conocimiento logrados por los estudiantes en determinado momento del proceso. Cada capítulo se completa además con la inclusión de situaciones didácticas e intervenciones docentes destinadas a enriquecer el diseño de propuestas de enseñanza que propicien avances en los aprendizajes.

[1] Ministerio de Educación e Innovación. Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa (2019). *Progresiones de los aprendizajes. Segundo ciclo. Matemática*. Buenos Aires, Argentina: GCABA. Disponible en: https://bit.ly/392NlVY [consultado el 20/12/19].

Condiciones didácticas

Se ha mencionado ya que estas progresiones no implican niveles de desarrollo espontáneo ni habilidades o capacidades que evolucionan a partir del paso del tiempo, como tampoco son el único recorrido de aprendizaje posible. Se trata de aprendizajes escolares que solamente pueden lograrse a partir de la enseñanza sistemática y organizada. En otras palabras, estos aprendizajes se producen bajo ciertas condiciones didácticas.

Entre las condiciones didácticas resulta central el rol del docente, quien selecciona, planifica y propone secuencias de problemas para el aprendizaje de los diversos contenidos y el desarrollo de prácticas. Durante las clases, los estudiantes disponen de un espacio para resolver los problemas solos o en grupos, según lo requiera la situación y en función de la planificación del docente, usando diversos recursos. El docente interactúa con los estudiantes, organiza espacios para difundir y analizar estrategias de resolución correctas e incorrectas y resultados obtenidos, explica, propone escrituras y formas de representación, favorece la identificación de relaciones y permanentemente ayuda a una progresiva toma de conciencia de aquello que espera que esté disponible para ser reutilizado en problemas siguientes. También propone registrar aquello que resulta importante retener, ayudando a que la carpeta sea una herramienta de estudio. Algunos problemas tendrán por objetivo construir nuevos conocimientos, mientras que otros contribuirán a afianzar, reutilizar o evaluar aprendizajes ya alcanzados.

Durante la enseñanza es importante propiciar espacios de debate e intercambio que beneficien a todos los estudiantes. Para que estos espacios sean productivos, se requiere que el docente registre las conclusiones y las nuevas estrategias en el pizarrón y los alumnos en sus carpetas, a fin de promover la disponibilidad de los nuevos recursos para su uso en los problemas siguientes. Se espera que en la escuela secundaria los estudiantes vayan ganando autonomía en el uso de su carpeta, que no solo debería incluir lo que el docente sugiere sino también anotaciones personales, recuadros, marcas, etcétera.

En este enfoque didáctico es central diferenciar la producción colectiva de la individual. Los estudiantes, individualmente, exploran formas de resolución de cada tipo de problema, pero es en el ámbito colectivo donde se dirimen las direcciones hacia las cuales conducir los esfuerzos. Por otro lado, es a partir de los debates sobre diferentes estrategias de resolución que los estudiantes tendrán que defender su postura, convencer a los demás –o ser convencidos–, dar razones que se apoyan en conocimientos matemáticos para las decisiones que tomaron, etcétera. Lo individual alimenta lo colectivo, y lo colectivo alimenta lo individual. Sin embargo, la resolución colectiva de un problema no necesariamente implica que un estudiante podrá luego resolver solo una situación semejante. Resulta esencial que el profesor tenga información acerca de aquellos estudiantes que no pueden avanzar para intervenir con ayudas que les permitan desarrollar alguna estrategia. Estas intervenciones necesitan ser pensadas, planificadas, porque la cantidad de información que se le da al alumno puede hacer que siga pensando o que la situación deje de ser un problema para él. En todos los casos es necesario que las ayudas partan de comprender cómo el estudiante está pensando el problema, y solo funcionan si pueden anclarse en las relaciones hechas o lo que haya producido. Las ayudas "genéricas" no siempre resultan útiles para todos. En otras situaciones, para aquellos que no logran iniciar una resolución, las intervenciones pueden resultar claves, como ayudarlos a buscar en su carpeta otro problema parecido ya resuelto, proponerles uno similar pero con menor nivel de complejidad para luego retomar el problema original, o incluso sugerirles alguna estrategia específica ("podés hacer un esquema", "¿te servirá hacer una figura de análisis?", "fijate si te conviene agrupar los números positivos y negativos para sumar más rápido", "pensá en la relación que hay entre estas variables, ¿te sirve para decidir si la temperatura es creciente?", etc.). Si bien en estos casos el estudiante recibe cierta ayuda, tiene a su cargo una porción relevante de responsabilidad. La ayuda no le resuelve el problema sino que funciona como un andamiaje para atreverse a proponer una solución o una estrategia, punto de partida para seguir produciendo.

Otra consideración merece el tratamiento de los errores que aparecen en las resoluciones de los estudiantes. Desde la perspectiva didáctica adoptada, esos errores no solo nos permiten ver qué es lo que un estudiante no sabe, sino que también nos informan qué sabe. Muchos errores tienen una lógica que es posible develar, una razón de ser que implica una cierta idea o teoría errónea que es preciso revisar. Algunos son típicos, anticipables por los docentes y producidos simultáneamente por varios alumnos y por varios grupos escolares. También hay errores menos habituales, menos estudiados, que responden a lógicas que es importante conocer. En todos los casos, cuando un error es importante, significativo, y no es una simple equivocación, merece ser analizado colectivamente para promover interacciones entre los estudiantes que ayuden a avanzar a todos. Justificar por qué una solución es incorrecta, rechazar alguna idea equivocada, identificar alertas y cuidados a considerar en el tratamiento de un tipo de problemas implica, también, un progreso en los conocimientos.

¿Qué observar para recabar información sobre los aprendizajes de los estudiantes?

En el trabajo cotidiano en el aula, observar el desempeño de los estudiantes mientras resuelven los problemas que se les plantean y analizar el tipo de intervenciones y preguntas que hacen, los comentarios o explicaciones que pueden dar de su trabajo, las validaciones que producen, son indicadores para conocer qué saben. Sin embargo, en la escuela secundaria no siempre resulta fácil obtener información sobre todos los estudiantes durante los momentos de intercambio, por lo que se hace necesario también plantear momentos específicos de trabajo individual o evaluaciones formativas para mirar más detenidamente la producción de cada uno. Esas instancias permiten reconocer qué es lo que pueden hacer solos y realizar interpretaciones sobre cuál es el estado de sus conocimientos respecto de cierto contenido. Esta información es central para poder determinar cómo continuar la tarea de enseñanza con el grupo y, además, planificar intervenciones particulares con algunos estudiantes que así lo necesiten. En el desarrollo del material, para cada uno de los ejes establecidos se incluyen ejemplos de problemas que podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos de los alumnos. Se trata de situaciones que permiten diagnosticar lo que han logrado aprender sobre algunos contenidos de enseñanza.

Es necesario que para el diseño de las evaluaciones se considere qué contenidos y tipos de tareas han sido objeto de enseñanza. Las actividades elegidas para evaluar deben implicar tareas y complejidad similares a las realizadas en clase. Es importante señalar que, en el trabajo en Matemática, no solo se ponen a disposición de los estudiantes principios, conceptos e información propios del área, sino también, y principalmente, *formas de trabajo*, *tipos de prácticas*. Para los alumnos, el sentido de los conceptos está dado por el tipo de prácticas que se despliegan a propósito de ese concepto matemático. Por ejemplo, si se trabajó con funciones lineales en problemas que apuntan a la *lectura de un gráfico*, no sería adecuado presentar por primera vez en una evaluación un problema en el que se deba *producir un gráfico de una función lineal a partir de ciertos datos*, porque implica, para los alumnos, encarar una tarea muy diferente y nueva. Los aprendizajes involucrados en la lectura de un gráfico no necesariamente alcanzan para producirlo a partir de ciertos datos. Para poder hacer una interpretación de lo que sabe un estudiante a partir de sus producciones, es necesario solicitarle que muestre su resolución, que registre de alguna manera el procedimiento llevado a cabo para la solución de cada problema y que dé cuenta de por qué tomó cada decisión. Solamente así se tendrá la oportunidad de analizar las estrategias usadas y detectar las cuestiones centrales sobre las que hay que seguir trabajando. En ese sentido, es necesario volver a subrayar que el desempeño de cada alumno dependerá, entre otras cuestiones, de su punto de partida y de la enseñanza sistemática que haya recibido.

Números y álgebra

En el inicio de la escuela secundaria, el trabajo en torno al eje Números y álgebra cumple un rol central para delimitar las continuidades y rupturas en el pasaje de las prácticas aritméticas a las algebraicas. Las prácticas aritméticas, desarrolladas a lo largo de toda la escolaridad primaria, serán un punto de apoyo en el inicio del trabajo algebraico. Partiendo de esta idea es que esta progresión incluye tareas y problemas de diversos tipos. Por ejemplo, se plantean situaciones en las que no se trata de resolver un cálculo sino de leer cierta información que ellos portan o anticipar el signo y estimar su resultado. En el trabajo con expresiones que involucran variables, se presentan problemas en donde la respuesta es independiente del valor de la variable, y otros en los que sí depende de ese valor. Otro tipo de problema presentado está vinculado a las fórmulas para contar, donde la tarea puede variar desde calcular el paso de un proceso en el que se cumple cierta regularidad hasta producir y validar una fórmula que permita calcular un paso cualquiera del proceso o determinar la equivalencia entre distintas fórmulas.

Para estas progresiones se han considerado dos subejes:

- Información que porta un cálculo o una expresión
- Cálculos y operaciones en los conjuntos de los Números Naturales, Enteros y Racionales

Información que porta un cálculo o una expresión

Históricamente, la escuela primaria estaba asociada a la aritmética y la secundaria al álgebra, al uso de letras. En la actualidad, desde el Diseño Curricular se plantea para el Ciclo Básico un trabajo en torno a prácticas algebraicas que pueden desarrollarse tanto con números como con variables. En la transición, los estudiantes deben encontrar los límites de lo aritmético, recurriendo a la aritmética como punto de apoyo. La entrada al mundo algebraico implica rechazar muchos significados y prácticas elaboradas a lo largo de toda la vida escolar. Se trata de desarrollar nuevas estrategias, que son muy diferentes a las utilizadas en el trabajo aritmético. Se produce así un conflicto y una ruptura: por un lado, es necesario renunciar a esas prácticas pero, por el otro, hay que basarse en ellas. Todas las técnicas algebraicas se asientan sobre propiedades de las operaciones, generalizándolas. Es por eso que su dominio se transforma en una condición necesaria: sin un dominio de las operaciones no es posible generalizar y dar sustento a las técnicas algebraicas.

Una de las nuevas prácticas a adquirir por los estudiantes implica la transformación de expresiones con el objetivo de expresar y/u obtener información "nueva". Es decir, ser consciente de que, dada una expresión, es posible transformarla en otra equivalente de la cual se pueda leer información que no estaba explícita en la original, y luego ser capaz de realizar la transformación. Si bien en problemas que requieren de transformaciones muchas veces se utilizan expresiones numéricas, el tipo de razonamiento es algebraico. Las transformaciones de las escrituras resultan necesarias para visibilizar y leer información que en la escritura inicial no era legible. Es decir que las transformaciones se constituyen como una herramienta: no se transforman las expresiones a pedido del docente, sino porque resulta necesario para resolver un problema.

Otra diferencia vinculada al cambio en el tipo de prácticas reside en que, en el marco aritmético, las relaciones no son relevantes, se ocultan en el resultado de la cuenta. En el marco algebraico, en cambio, se "leen" las relaciones que brinda el cálculo o se lo transforma para identificar otras. Por supuesto, la posibilidad de realizar esta lectura requiere de conocimientos por parte del sujeto. Asimismo, es el conocimiento el que permite anticipar si una transformación logrará mostrar nuevas relaciones. Por ejemplo, a lo largo de este apartado se presentan problemas en donde la transformación de una escritura en otra equivalente permite decidir acerca de la divisibilidad o no de un número por otro, o el resto de una división, pero accediendo a razones que los criterios de divisibilidad ocultan.

También se han considerado dentro de este subeje algunos problemas vinculados a la variación de perímetros y áreas. Si bien corresponden al marco geométrico, algunas situaciones pueden resolverse a partir de fórmulas que pueden ser leídas y transformadas para interpretar una relación. Es el caso, por ejemplo, donde se pide analizar cómo varían el área y el perímetro de un rectángulo en el que la medida de un par de lados paralelos se duplica y la resolución se hace a partir de las fórmulas, leyendo relaciones.

Por último, se incluye aquí el tratamiento de fórmulas para contar. El trabajo con este tipo de problemas brinda, por lo menos, dos posibilidades de tratamiento algebraico. Por un lado, las fórmulas para contar dan sentido al trabajo con variables y, por otro lado, son propicias para detenerse en la lectura de la información que portan. "Leer" una fórmula de este tipo requiere, por ejemplo, analizar la estrategia de conteo de los elementos que componen las figuras y la consideración de la regularidad, para vincularlos con las distintas "partes" de la fórmula. Otro aspecto del trabajo algebraico que se pone en juego es el de la generalización. Se trata, en este caso, de generalizar regularidades y validarlas. La posibilidad de producir distintas fórmulas para contar lo mismo permite trabajar sobre su equivalencia y el significado que esto tiene: dos expresiones son equivalentes si son iguales para cualquier valor de la variable.

Información que porta un cálculo o una expresión[2]

Transición entre primaria y secundaria	Ciclo Básico Nivel I
Analiza afirmaciones relativas a las nociones de múltiplo y divisor en situaciones particulares y argumenta sobre su validez, poniendo en juego las propiedades de la multiplicación y la división. Explora el análisis de afirmaciones generales relativas a las nociones de múltiplo y divisor y argumenta sobre su validez. Analiza las informaciones que provee la escritura de un cálculo de multiplicación para decidir si un número es múltiplo o divisor de otro. Pone en juego descomposiciones multiplicativas y las relaciones entre múltiplo y divisor para fundamentar. Analiza la información que provee la escritura de un cálculo que involucra diferentes operaciones para decidir si un número es divisor de otro. Utiliza los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 10 para anticipar el resto de una división. Analiza y fundamenta los criterios de divisibilidad por 2, 4, 8, 5 y 10.	Determina si el resultado de un cálculo es múltiplo de un número cuando ese número y/o un múltiplo de él se encuentran escritos explícitamente en el cálculo, sin realizar transformaciones, y fundamentando con lenguaje coloquial. Por ejemplo, afirma que el resultado del cálculo $14 \cdot 5 + 7$ es múltiplo de 7 porque $14 \cdot 5$ y 7 son múltiplos de 7. Determina cuál es el resto de dividir el resultado de un cálculo por un número cuando el divisor y/o un múltiplo de este se encuentran escritos explícitamente en el cálculo, sin realizar transformaciones y fundamentando con lenguaje coloquial. Por ejemplo, afirma que el resto de dividir el resultado de $14 \cdot 5 + 12$ por 14 es 12 porque $14 \cdot 5$ es múltiplo de 14, y, al sumarse 12, el resultado se pasa 12 unidades de un múltiplo de 14.

[2] En esta grilla las variables representan números enteros.

- Determinar si el resultado de un cálculo es múltiplo de un número o cuál es el resto de dividirlo por ese número
- Determinar si el resultado de una expresión que incluye variables es múltiplo de un número o cuál es el resto de dividirlo por ese número
- Estudio de la variación del perímetro y del área de figuras
- Fórmulas para contar

Ciclo Básico

Nivel II

Determina si el resultado de un cálculo es múltiplo de un número o cuál es el resto de dividirlo por ese número. Reconoce la necesidad de que para fundamentar su afirmación, el divisor debe mostrarse de forma explícita y realiza transformaciones para lograrlo.

Por ejemplo, para hallar el resto de dividir

$$14 \cdot 5 + 15 \text{ por } 7$$

reescribe el cálculo de manera que el 7 se muestre de forma explícita:

$$14 \cdot 5 + 15 = 7 \cdot 2 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 1$$

Luego afirma que el resto es 1 porque los dos primeros términos forman un múltiplo de 7 y el resultado se pasa una unidad de un múltiplo de 7.

Pone en juego la propiedad que afirma que: si b es múltiplo de a, entonces todo múltiplo de b también es múltiplo de a. Lo expresa oralmente o por escrito de manera coloquial para un caso particular o de manera general.

Por ejemplo, para hallar el resto de dividir

$$14 \cdot 5 + 15 \text{ por } 7$$

reescribe el cálculo

$$14 \cdot 5 + 15 = 14 \cdot 5 + 14 + 1$$

y afirma que 14 es un múltiplo de 7, por lo que $14 \cdot 5 + 14$ también lo será. Luego, el resto de dividir el número por 7 será 1 porque el resultado se pasa 1 de un múltiplo de 7.

Nivel III

Determina si el resultado de un cálculo es múltiplo de un número cuando el divisor o un múltiplo de él no se encuentran escritos explícitamente, lo que requiere realizar transformaciones del cálculo original.

Por ejemplo, determina que $6 \cdot 35$ es múltiplo de 14 reescribiendo el cálculo como

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 14 \cdot 3 \cdot 5$$

para obtener el factor 14 y mostrarlo de manera explícita.

Determina cuál es el resto de dividir el resultado de un cálculo por un número aunque el divisor o un múltiplo de este no se encuentren escritos explícitamente, lo que requiere realizar transformaciones del cálculo original.

Por ejemplo, reescribe $27 \cdot 16 + 22$ como

$$3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8 + 18 + 4 = 18 \cdot 3 \cdot 8 + 18 + 4$$

para determinar y mostrar que se trata de un número que se pasa 4 unidades de un múltiplo de 18, por lo que su resto al ser dividido por 18 es 4.

Determina si el resultado de un producto que incluye variables es múltiplo de un número cuando la respuesta no depende del valor de la variable y el número aparece escrito de manera explícita.

Por ejemplo, afirma que el resultado de la expresión $7n$ será múltiplo de 7 para cualquier valor de la variable porque el número puede expresarse como el producto entre 7 y un número entero.

Determina si el resultado de un producto que incluye variables es múltiplo de un número cuando la respuesta no depende del valor de la variable y aparece un múltiplo del número escrito de manera explícita.

Por ejemplo, afirma que el resultado de la expresión $18n$ es múltiplo de 9 para cualquier valor de la variable porque 18 es múltiplo de 9.

Nivel II	Nivel III
Determina si el resultado de un cálculo que incluye variables es múltiplo de un número cuando la respuesta no depende del valor de la variable. Por ejemplo, afirma que el resultado de la expresión $14n+7$ será múltiplo de 7 para cualquier valor de la variable porque tanto $14n$ como 7 lo son. Determina cuál es el resto de dividir el resultado de un cálculo que incluye variables por un número si la respuesta no depende del valor de la variable. Por ejemplo, afirma que el resultado de la expresión $18n+7$ tiene resto 7 al dividirlo por 9 para cualquier valor de la variable porque $18n$ es múltiplo de 9, y por lo tanto, el resultado se pasa 7 unidades de un múltiplo de 9.	Determina si el resultado de un cálculo que incluye variables es múltiplo de un número en situaciones en donde la respuesta depende del valor de la variable, describiendo las soluciones mediante lenguaje coloquial. Por ejemplo, afirma que el resultado de la expresión $5n+2$ no siempre es múltiplo de 2 y que para serlo, n debe ser múltiplo de 2, ya que solo así $5n$ sería múltiplo de 2 y, al sumarle 2, seguiría siendo múltiplo de 2. Determina si el resultado de un cálculo que incluye variables es par o impar en situaciones en donde la respuesta depende del valor de la variable, describiendo las soluciones mediante lenguaje coloquial. Por ejemplo, afirma que, para que el resultado de la expresión $3n+5$ sea múltiplo de 2, n debe ser impar, ya que solo así $3n$ sería impar y, al sumarle 5, se obtiene un número par. Por otro lado, si n es par, también lo será $3n$, por lo que la suma $3n+5$ será impar. Determina y expresa dominios de validez mediante expresiones algebraicas. Por ejemplo, para expresar los valores de n para los cuales el resultado de $3(n-1)$ es múltiplo de 4, escribe la expresión $n=4k+1$ y la interpreta como el conjunto de todos los números que “se pasan” 1 de un múltiplo de 4.

Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico* Nivel I
Explora la variación del área de una figura en función de la variación de sus lados, bases o alturas.	

Ciclo Básico

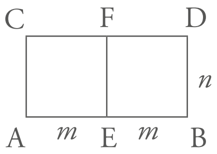
Nivel II

Produce e interpreta las fórmulas que dan cuenta del perímetro y/o el área en figuras genéricas[3] sobre la base de dibujos dados y establece relaciones entre ellas.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

¿Es cierto que el área del rectángulo ABDC es el doble de la del rectángulo AEFC?

¿Y el perímetro?



Expresa las áreas de los rectángulos AEFC y ABDC como mn y $2 \cdot m \cdot n$ y los perímetros como $4m + 2n$ y $2m + 2n$ respectivamente, y determina, a partir de la lectura de las fórmulas, que un área es el doble de la otra, mientras que los perímetros no se duplican.

Produce e interpreta fórmulas para comparar perímetros y/o áreas de figuras genéricas.

Por ejemplo, para resolver el problema:

¿Es cierto que si a un rectángulo se le duplica la medida de su altura y la medida de su base se mantiene igual, su área se duplica?

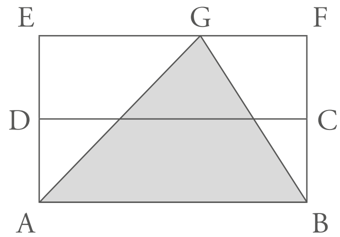
Produce fórmulas como $b \cdot a$ y $b \cdot 2 \cdot a$ para luego interpretar la segunda expresión como el doble de la primera.

Nivel III

Valida afirmaciones por medio de transformaciones algebraicas e interpretación de fórmulas, en situaciones que implican la comparación de áreas.

Por ejemplo, para resolver problemas como el que se muestra a continuación:

En la figura, ABFE es un rectángulo, D y C son puntos medios de los segmentos AE y BF, respectivamente, y G pertenece al segmento EF.



¿Es cierto que el área del rectángulo ABCD es igual al área del triángulo ABG?

El estudiante marca un punto H sobre el segmento AB de manera que $\overline{GH}$ sea la altura del triángulo y realiza lo siguiente:

Área del triángulo AGB[4] =

$$\frac{|AB|\cdot|GH|}{2} = \frac{|AB|\cdot|BF|}{2} = \frac{|AB|\cdot|BC|\cdot 2}{2}$$

$$= |AB|\cdot|BC| = \text{Área del rectángulo ABCD}$$

---

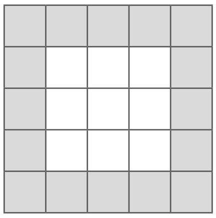
[3] Se entiende aquí por *figuras genéricas* aquellas en las que no se brindan medidas.

[4] Si bien en el ejemplo se han utilizado las notaciones convencionales para las medidas de los segmentos, es posible que los estudiantes utilicen otras que no sean totalmente correctas. Si no hay dudas respecto de qué representan, no resulta un problema, debido a que el foco de la actividad está puesto en la validación.

Calcula el paso n de un proceso que cumple una cierta regularidad para un valor específico de n sin realizar un conteo.

Por ejemplo, para resolver el problema:

El siguiente dibujo es un cuadrado formado por cuadraditos y tiene sombreado solamente el borde:



- ¿Cuántos cuadraditos hay sombreados en la figura?
- Calcular el número de cuadraditos sombreados en un cuadrado de 37 cuadraditos de lado.

Halla una forma de realizar el conteo que generaliza, como

$37 \cdot 4 - 4$

$36 \cdot 4$

o

$37 \cdot 2 + 35 \cdot 2$

aunque no explicita la regla general.

Nivel II	Nivel III

Produce una fórmula que calcula el paso n de un proceso que cumple una cierta regularidad.

Por ejemplo, para la secuencia:

Posición 1 *Posición 2* *Posición 3*

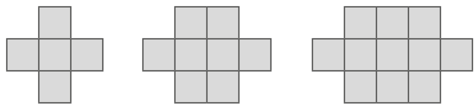
Escribe una fórmula que permite calcular la cantidad de puntos para la posición n.

Valida la equivalencia entre fórmulas apelando al contexto y/o a transformaciones algebraicas.

Por ejemplo, para el problema:

Consideren la siguiente secuencia:

Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*



Ramiro usa la fórmula $C = 3n + 2$ para hallar la cantidad de cuadraditos que forman la figura n. Lautaro usa la fórmula

$$C = 5 + 3(n - 1)$$

Analizá si es posible que los dos tengan razón.

Utiliza propiedades de las operaciones para mostrar la equivalencia:

$$5 + 3(n - 1) = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

O bien se apoya en diferentes maneras de contar los cuadraditos:

» La cantidad de cuadraditos en la parte central es tres por la cantidad de columnas, que coincide con el número de la figura. A ese resultado se le suman los dos cuadraditos de los costados.

» La primera figura está formada por 5 cuadraditos. A medida que se avanza a la figura siguiente se le agrega una columna de 3 cuadraditos. La cantidad de columnas que se agregan es siempre una menos que la posición.

Cálculos y operaciones en los conjuntos de los Números Naturales, Enteros y Racionales

Para el armado de la progresión en este subeje se ha considerado el trabajo con los números enteros y racionales, entendiendo que también incluyen los números naturales. El foco de la propuesta no está puesto en la habilidad para operar –aunque se considera que el dominio de las técnicas operatorias es necesario– sino en otras cuestiones como el cálculo mental, la anticipación del signo del resultado de un cálculo, y saber si el resultado de un cálculo será mayor o menor que los números intervinientes. Es decir, sobre la construcción de herramientas de control.

El cálculo mental, tal como es entendido en el Diseño Curricular, consiste en un conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido para obtener resultados exactos o aproximados. Es necesario, entonces, analizar cada caso en particular y buscar el modo más conveniente para operar. No hay reglas a seguir, cada caso es singular. En este sentido, resolver cálculos mentalmente es una verdadera actividad de resolución de problemas, donde es necesario elegir la estrategia de resolución más conveniente entre las disponibles.

En cuanto al trabajo con los números racionales, interesa explicitar aquellas rupturas respecto de los enteros y de los naturales. Para eso, en estas progresiones se abordan la densidad, el orden, la relación entre una expresión fraccionaria y una decimal para el mismo número, y la discusión acerca de cuándo un número racional admite una expresión decimal finita o periódica.

También se incluye el trabajo con potencias de exponente natural, entero o racional, no solo para el cálculo sino para el análisis de dominios de validez y la anticipación de resultados.

Cálculos y operaciones en los conjuntos de los Números Naturales, Enteros y Racionales

Transición entre primaria y secundaria

Identifica y usa adecuadamente las propiedades distributiva y asociativa para la resolución de cálculos de multiplicación.

Resuelve cálculos mentales de división descomponiendo convenientemente el dividendo o el divisor.

Resuelve cálculos mentales de división o reconoce la equivalencia entre cálculos y explicita las propiedades de la división puestas en juego.

Resuelve cálculos horizontales teniendo en cuenta la jerarquía entre las operaciones implicadas.

Ciclo Básico

Nivel I

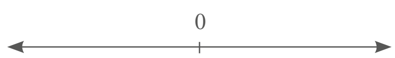
Resuelve problemas que implican la interpretación y el uso de números enteros a partir de diferentes contextos y la resta de números naturales.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

> Un día de invierno, antes de salir de su casa, Lucía se fijó la temperatura y era de 2 °C. Al regresar a su casa se volvió a fijar y la temperatura había descendido 5 °C. ¿Cuál era la temperatura en el momento en que volvió a la casa?

O bien:

> Un programa ubica números en una recta numérica. Si se ingresa el número –1000 ¿En qué zona de la recta debe ubicar el resultado? ¿A qué distancia del 0?



- Operaciones de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números enteros
- Operaciones de sumas, restas multiplicaciones y divisiones con números racionales
- Operaciones de potenciación y radicación con números enteros
- Operaciones de potenciación y radicación con números enteros y racionales
- Densidad y orden de los números racionales
- Relación entre escritura fraccionaria y escritura decimal

Ciclo Básico

Nivel II

Resuelve operaciones con números enteros, en diferentes contextos y/o en la recta numérica.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

A principio de mes, el saldo de la cuenta bancaria de Martín era de –\$1.000. Si a fin de mes el saldo era de \$2.000, ¿qué operaciones pudo haber hecho durante el transcurso del mes?

Decidí cuál o cuáles de estos cálculos te permiten calcular el saldo de la cuenta de Martín a fin de mes y, en los casos adecuados, explicá cuál sería el significado de cada uno de los números y de las operaciones.

» $-1000 + 3000$

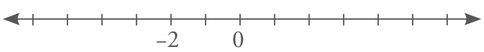
» $-1000 + 2000 + 1000$

» $-1000 - 1000$

» $1000 + 1000$

O bien:

Ubicá en la recta numérica el resultado de $2 \cdot (-2)$ y de $(-3) \cdot (-2)$ sin hacer la cuenta. Explicá cómo lo pensaste.



La fila continúa en página 37.

Nivel III

Estima el resultado de un cálculo con números enteros sobre la base del análisis de los números implicados.

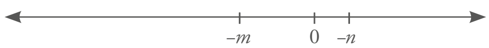
Por ejemplo:

En el cálculo $(-2) - 3 - (-2) + 1$, determina, sin hacer la cuenta, que al eliminar -3 el resultado será mayor porque "se deja de restar 3"; y que si se eliminara $-(-2)$ el resultado sería menor "porque restar un número negativo es equivalente a sumar uno positivo del mismo valor absoluto".

Y resuelve problemas como los siguientes:

En una multiplicación entre 100 números, 35 números son negativos y el resto positivos. ¿Cuál es el signo del resultado?

Ubicá en la recta numérica el resultado de $(-m) \cdot 2$ y el de $(-n) \cdot 2$.



Determina el dominio de validez de relaciones de orden y distancias a partir de la lectura de expresiones algebraicas.

Por ejemplo, resuelve problemas como estos:

Indicá en una recta numérica todos los números enteros m que cumplen que $-m > 8$.

Encontrá todos los valores enteros de m que cumplen que $|m - 2| > 5$.

Suma y resta fracciones con cualquier denominador.

Multiplica fracciones entre sí.

Resuelve cálculos en los que se multiplican fracciones cuyo producto es 1, reconociendo que se trata de encontrar la fracción inversa.

Divide cualquier fracción por un número entero usando procedimientos diversos.

Resuelve mentalmente cálculos en los que se multiplican fracciones cuyo producto es un número entero, reconociendo que se trata de encontrar un "múltiplo" de la fracción inversa.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

> Completá sobre la línea de puntos de manera que la igualdad sea verdadera y explicá cómo lo pensaste.
>
> $$\frac{3}{7} \cdot \ldots = 2$$

Completa con la fracción $\frac{14}{3}$ y explica que si completara con la fracción inversa $\frac{7}{3}$ el resultado sería 1 y, por lo tanto, para que el resultado sea 2 debe completar con el doble.

Ciclo Básico	
Nivel II	**Nivel III**

Continúa la fila de página 35.

Determina el dominio de validez de relaciones de orden y distancias.

Por ejemplo, resuelve problemas como estos:

Indicá en una recta numérica todos los números enteros que sean menores que -2.

Encontrá todos los números enteros que se encuentren a distancia 7 del -1.

Reconoce, que dados dos números racionales distintos de cero, siempre es posible pasar de uno a otro a través de la multiplicación de uno de ellos por un tercer número racional. Utiliza este conocimiento para resolver cálculos en los que se multiplican fracciones cuyo producto es una fracción.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

Si es posible, completá sobre la línea de puntos de manera que la igualdad sea verdadera. Si no es posible, explicá por qué.

$$\frac{3}{7} \cdot \ldots = \frac{4}{5}$$

Reconoce las condiciones para las cuales el producto entre un número natural y una fracción es mayor o menor que el número entero.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

Respondé sin resolver los cálculos. ¿Es cierto que el resultado de $4 \cdot \frac{3}{2}$ es mayor que 4? ¿Y el resultado de $4 \cdot \frac{3}{5}$?

Reconoce las condiciones para las cuales la multiplicación entre fracciones da como resultado un producto que es mayor o menor que cada uno de sus factores.

Por ejemplo, resuelve problemas como estos:

Sin hacer la cuenta, decidí si es cierto que el resultado de $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{2}$. ¿Y mayor que $\frac{4}{3}$?

¿Para qué valores de n, $4 \cdot \frac{n}{5}$ es mayor que 4?

Transición entre primaria y secundaria	Ciclo Básico – Nivel I
Resuelve problemas de tipo recursivo utilizando la potenciación.	Resuelve cálculos que incluyen potencias de base entera y exponente natural. Anticipa si una potencia es menor o mayor que la base. Por ejemplo, resuelve problemas como este: Sin hacer las cuentas, compará los siguientes números: a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ y $\frac{1}{2}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^7$ y $\frac{5}{4}$ c) $\left(\frac{5}{4}\right)^7$ y 1
	Resuelve cálculos que incluyen potencias de base entera y exponente entero. Por ejemplo, resuelve problemas como este: Compará los siguientes resultados: 3^{-2} y $(-3)^{-2}$

Nivel II	Nivel III
Determina el dominio de validez en raíces de argumento entero e índice natural. Por ejemplo, explicita que no es posible calcular la raíz cuadrada de un número negativo porque el resultado de elevar un número al cuadrado es siempre positivo, sea ese número positivo o negativo. Anticipa el signo de una potencia de base entera y exponente natural analizando el signo de la base y la paridad del exponente. Por ejemplo, resuelve los siguientes problemas: ¿Qué signo tiene el resultado de $(-5)^{102}$? Compará los siguientes números y explicá cómo lo pensaste: a) $(-3)^{234}$ y $(-3)^{431}$ b) $(-7)^{315}$ y -7^{315} c) $(-7)^{214}$ y -7^{214}	Determina el dominio de validez de potencias de base entera o racional y exponente natural en situaciones en las cuales se ponen en juego relaciones de orden y equivalencias entre cálculos. Por ejemplo, resuelve problemas como estos: a) ¿Qué valores puede tomar n para que $(-3)^n > -3$? b) ¿Qué valores puede tomar n para que $(-3)^n = 3^n$? a) ¿Qué valores puede tomar n para que $\left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{1}{2}$? b) ¿Qué valores puede tomar n para que $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{2}$? c) ¿Qué valores puede tomar n para que $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$?
Resuelve cálculos que incluyen potencias de base racional y exponente entero. Resuelve cálculos que incluyen potencias de base entera y exponente racional, mediante la transformación de los exponentes como combinaciones de exponentes enteros y raíces, y viceversa. Por ejemplo, establece que $(9)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{9})^3$	Aplica propiedades de la potencia para obtener resultados exactos de cálculos y lo realiza. Por ejemplo, de la siguiente manera: $2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ Determina el dominio de validez de potencias de base entera o racional y exponente entero en situaciones en las cuales se ponen en juego relaciones de orden y equivalencias entre cálculos. Por ejemplo, resuelve el siguiente problema: ¿Qué valores puede tomar n para que $\left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{1}{2}$? ¿Qué valores puede tomar n para que $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{2}$? ¿Qué valores puede tomar n para que $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$?

Intercala una fracción entre otras fracciones dadas.

Por ejemplo:

Las fracciones $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{12}{8}$ están ordenadas de menor a mayor, ¿dónde ubicarías $\frac{1}{2}$? ¿Y $1\frac{3}{8}$?

Resuelve problemas que implican considerar la densidad del conjunto de números racionales, como, por ejemplo, situaciones que implican encontrar fracciones entre otras dos fracciones dadas.

Compara fracciones entre sí, eligiendo diferentes estrategias según las fracciones dadas.

Determina la ubicación de números en una recta numérica en la que se ha señalado la ubicación de dos fracciones.

Elige una unidad conveniente para representar fracciones en una recta numérica.

Encuentra todas las fracciones de un denominador dado que se encuentran entre dos números enteros.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

Hallá todas las fracciones de denominador 5 que se encuentran entre el 7 y el 8. ¿Cuántas son?

Compara y ordena fracciones.

Identifica los números enteros que se encuentran entre dos fracciones dadas.

Ciclo Básico

Nivel II

Anticipa la cantidad de fracciones de un denominador dado que se encuentran entre dos números enteros.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

> Sin hacer cuentas, indicá cuántas fracciones de denominador 17 hay entre 20 y 21.

Encuentra todas las fracciones de un denominador dado, *d*, que se encuentran entre dos fracciones cuyo denominador es *d*, o un múltiplo o divisor de *d*.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

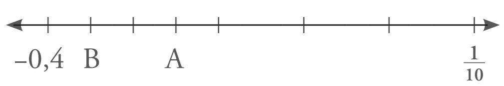
> Hallá todas las fracciones de denominador 4 que se encuentran entre $\frac{7}{2}$ y $\frac{29}{4}$. ¿Cuántas son?

Establece que, como $\frac{7}{2} = \frac{14}{4}$, se trata de todas las fracciones que están entre $\frac{14}{4}$ y $\frac{29}{4}$: $\frac{15}{4}$; $\frac{16}{4}$; …; $\frac{28}{4}$. Luego afirma que en total son 14 fracciones.

Determina la ubicación de números en una recta numérica en la que se ha señalado la ubicación de dos números expresados como fracción o decimal.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

> ¿Qué números representan A y B en esta recta?



Nivel III

Encuentra y cuenta todas las fracciones de un denominador dado, *d*, que se encuentran entre dos fracciones cuyo denominador no es ni *d* ni es múltiplo ni divisor de *d*.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

> ¿Cuántas fracciones con denominador 15 se encuentran entre $-\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{7}$?

Determina el dominio de validez para numeradores y denominadores en situaciones que involucran determinar el orden de fracciones.

Por ejemplo, resuelve problemas como estos:

> ¿Para qué valores enteros de n, $\frac{1}{n}$ es menor que $\frac{1}{10}$?

> ¿Para qué valores naturales de n y de m, $\frac{n}{m}$ es mayor que 1?

> ¿Para qué valores enteros de n y naturales de m, $\frac{n}{m}$ es menor que –1?

Compone y descompone números decimales usando sumas de fracciones decimales.

Compara y ordena expresiones fraccionarias y decimales.

Reconoce que el cociente entre numerador y denominador de una fracción puede expresarse como un número decimal.

Reconoce cuáles son las fracciones que no se pueden expresar como una fracción decimal. Por ejemplo, reconoce que $\frac{1}{3}$ no puede expresarse con una fracción equivalente con denominador que sea potencia de 10, ya que ninguna potencia de 10 es múltiplo de 3.

Explora las expresiones decimales periódicas, establece relaciones con las fracciones que no pueden expresarse como fracción decimal, y verifica que, cuando se divide numerador por denominador, se obtiene un cociente periódico.

Determina la ubicación de números decimales y fracciones decimales en una recta numérica.

Resuelve problemas que exigen analizar la densidad en el conjunto de los Números Racionales.

Resuelve cálculos de suma y resta que combinan números decimales y fracciones decimales o fracciones equivalentes a fracciones decimales.

Reconoce que algunas fracciones pueden expresarse como fracción decimal y, por lo tanto, tienen una expresión decimal finita, mientras que otras tienen expresiones decimales periódicas.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

Decidí si las siguientes fracciones admiten una escritura decimal finita o periódica:

a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{7}{3}$

Ciclo Básico

Nivel II	Nivel III
Escribe todas las fracciones en su expresión decimal, inclusive las que poseen escritura decimal periódica. Por ejemplo: $\frac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3}$	Reconoce si el desarrollo decimal de una fracción es finito o periódico sin hacer la división y poniendo en juego diversos criterios y propiedades. Por ejemplo, resuelve problemas como este: Sin hacer la cuenta, determiná si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Explicá cómo lo pensaste. » Para cualquier fracción es posible hallar otra equivalente cuyo denominador sea una potencia de 10. » La fracción $\frac{21}{24}$ tiene un desarrollo decimal periódico porque el 24 contiene un 3 en su desarrollo como producto de factores primos. Anticipa la cantidad de cifras decimales de la expresión decimal de una fracción sin hacer la división. Por ejemplo, en el siguiente problema: Sin hacer la división, indicá cuántas cifras después de la coma tendrá la expresión decimal de cada una de las siguientes fracciones: a) $\frac{7}{4}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{27}{40}$ d) $\frac{8}{3}$ e) $\frac{128}{125}$ f) $\frac{27}{15}$ Busca fracciones equivalentes a las dadas cuyo denominador sea una potencia de 10, para así saber la cantidad de dígitos que tendrá el número después de la coma. Por ejemplo, como $\frac{27}{15} = \frac{9}{5} = \frac{18}{10}$, entonces $\frac{27}{15}$ tiene un solo número después de la coma.

Actividades para relevar los aprendizajes

Como se señaló en la introducción de este documento, se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos de los estudiantes en relación con el eje Números y álgebra. Parte de esta información puede recabarse durante el trabajo en el aula, a partir de observar a los alumnos mientras resuelven problemas, de analizar sus intervenciones y preguntas durante las instancias colectivas y las explicaciones que pueden dar de su trabajo. Sin embargo, resulta necesario también disponer de datos acerca de las producciones de los estudiantes en situaciones de trabajo individual que permitan analizar más detalladamente la producción de cada uno. Las situaciones propuestas a continuación responden a este propósito.

Información que porta un cálculo o una expresión

Situación 1. Múltiplos y divisores

El problema que se presenta a continuación tiene por objetivo evaluar si el estudiante puede poner en juego las relaciones entre múltiplos y divisores.

Sabiendo que $48 \cdot 26 = 1248$, indicá si los siguientes números son divisores de 1248 sin hacer cuentas de dividir.

a) 26 b) 13 c) 4

A partir de la situación se pretende evaluar si el estudiante logra realizar lecturas a partir del cálculo de un producto. En el caso del ítem a), al estar explícito el factor 26, el alumno tendrá que relacionar cada uno de los factores con divisores de 1248. Para los ítems b) y c), al no estar escritos de manera explícita los factores, se espera que los estudiantes puedan poner en juego que cualquier divisor de uno de los factores también será divisor del producto. Esta propiedad puede estar disponible de manera implícita o explícita.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

- » Intenta resolver la división $1248 : 26$ para determinar su resto, sin vincularla con el producto que se da como dato. Si bien no responde a la consigna de resolver sin hacer divisiones, se trata de un estudiante que reconoce que un número es divisor de otro si el resto de la división es 0.
- » Afirma que 26 es divisor de 1248 porque “como $48 \cdot 26 = 1248$, entonces $1248 : 26 = 48$”. Aunque la respuesta es correcta, la explicación no es suficiente. Al estudiante le falta aclarar que puede afirmar que 26 es divisor de 1248 porque el resto de la división es 0, porque 26 entra exactamente 48 veces en 1248.
- » 26 es divisor de 1248 porque 1248 es múltiplo de 26 debido a que puede escribirse como el producto de 26 por un número entero, 48. También es posible que el alumno produzca razonamientos similares, por ejemplo, “como $48 \cdot 26 = 1248$, entonces $1248 : 26 = 48$ y el resto es 0”.

Para el ítem b) se puede observar si el estudiante:

- » Intenta resolver la división $1248 : 13$ para determinar su resto, sin vincularla con el producto que se da como dato. Si bien no responde a la consigna de resolver sin hacer divisiones, se trata de un estudiante que reconoce que un número es divisor de otro si el resto de la división es 0.
- » Afirma que 13 es divisor de 1248 porque 26 lo es y 13 es la mitad de 26. El estudiante, en este caso, explicita una propiedad que no necesita validar por considerarla evidente.
- » Transforma el cálculo en $48 \cdot 26 = 48 \cdot 2 \cdot 13 = 1248$, y luego señala que 13 es divisor de 1248 porque es uno de los factores en la descomposición.

Para el ítem c) se puede observar si el estudiante:

- » Intenta resolver la división $1248 : 4$ para determinar su resto, sin vincularla con el producto que se da como dato. Si bien no responde a la consigna de resolver sin hacer divisiones, se trata de un estudiante que reconoce que un número es divisor de otro si el resto de la división es 0.
- » Afirma que 4 es divisor de 1248 porque 48 lo es y 48 puede escribirse como $4 \cdot 12$. El estudiante, en este caso, explicita una propiedad que no necesita validar por considerarla evidente.
- » Transforma el cálculo en $48 \cdot 26 = 4 \cdot 12 \cdot 26 = 1248$, y luego señala que 4 es divisor de 1248 porque es uno de los factores en la descomposición.

Situación 2. Múltiplos y divisores

A partir de las siguientes situaciones se intenta evaluar si el estudiante puede leer la información que porta un cálculo.

Sin hacer cuentas de dividir, indicá:

a) Si $16 \cdot 18 \cdot 27 + 32$ es divisible por 4.

b) Cuál es el resto de dividir a $63 \cdot 8 + 4$ por 6.

Explicá cómo pensaste cada situación.

En el ítem a) la tarea propuesta consiste en realizar una lectura, que puede ser directa[5] o no, que requiere reconocer que la suma de dos múltiplos de 4 es múltiplo de 4. Si el estudiante no dispone del conocimiento de que cualquier producto en el cual uno de sus factores es múltiplo de 4 es divisible por 4, entonces necesitará transformar la escritura del cálculo de modo que el factor 4 esté explícito en el primer sumando.

En el ítem b), la lectura no puede hacerse de manera directa, por lo cual resulta necesario transformar el cálculo en otro del cual pueda leerse el resto de la división por 6.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

- » Necesita hallar el resultado del cálculo para luego usar un criterio de divisibilidad. Es decir, encontrar que $16 \cdot 18 \cdot 27 + 32 = 7808$ y afirmar que el resultado es divisible por 4 porque sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4. Este tipo de resolución, si bien es correcta, responde a una lógica más aritmética que algebraica.
- » Puede responder a partir de realizar una transformación del cálculo, dando razones que expliquen su respuesta. Por ejemplo, reescribiendo el cálculo como $16 \cdot 18 \cdot 27 + 32 = 4 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 27 + 4 \cdot 8$ y afirmar que cada término es múltiplo de 4 por ser el producto entre cuatro y un número natural. Luego, puede deducir que el resultado será múltiplo de 4 por ser la suma de dos múltiplos de 4.
- » Puede responder sin hacer ningún cálculo, dando razones que expliquen su respuesta. Se espera que los alumnos puedan afirmar que tanto $16 \cdot 18 \cdot 27$ como 32 son múltiplos de 4, por lo cual su suma también lo será.

[5] Llamamos *lectura directa* a la que puede hacerse sin necesidad de transformar la expresión.

Para el ítem b) se puede observar si el estudiante:

» Necesita hallar el resultado de $63 \cdot 8 + 4$ para luego intentar encuadrarlo entre dos múltiplos sucesivos de 6. En este caso, como $63 \cdot 8 + 4 = 508$, que se encuentra entre $504 = 84 \cdot 6$ y $510 = 85 \cdot 6$, el resto de la división es 4, que corresponde a la cantidad de unidades que 508 se pasa de 504. En este tipo de resolución no se pone en juego la lectura de la información que porta el cálculo, por lo que se trata de una estrategia más vinculada a lo aritmético.

» Intenta transformar el cálculo para que quede expresado como la suma entre un múltiplo de 6 y un número menor que 6. En este caso se pueden plantear al menos dos situaciones para analizar:

› El alumno apela a la descomposición en factores del primer sumando pero no puede avanzar en la resolución. Por ejemplo, si un alumno escribe

$$63 \cdot 8 + 4 = 9 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2$$

es posible que no haya comprendido el porqué de la necesidad de transformar la escritura. También es probable que, luego de hacer esta transformación, no logre identificar la manera de reagrupar el cálculo de modo que uno de los factores del primer sumando sea 6.

› El alumno descompone el primer sumando en factores y logra reescribirlo como un múltiplo de 6. Por ejemplo,

$$63 \cdot 8 + 4 = 3 \cdot 21 \cdot 2 \cdot 4 + 4 = 6 \cdot 21 \cdot 4 + 4$$

de donde puede leer que ese resultado supera en 4 unidades a un múltiplo de 6, por lo que el resto de dividirlo por 6 es 4.

Situación 3. Múltiplos y divisores. Variables

El siguiente problema permite evaluar si los alumnos son capaces de hallar el resto de una división para un cálculo en el que intervienen variables. Se proponen tres casos diferentes.

Si n es un número natural, hallá el resto de dividir a cada una de las siguientes expresiones por 3 sin resolver divisiones:

a) $3n + 2$ b) $18n + 1$ c) $9n + 11$

El primero de los ítems puede resolverse a partir de una lectura directa, en el segundo es necesario poner en juego que un múltiplo de 3 es divisible por 3, mientras que en el tercer caso, el término que suma es mayor que 3, por lo que será necesario transformarlo para poder leer cuál es el resto.

A la hora de intentar resolver estos problemas, es muy posible que algún estudiante diga que no puede encontrar el resto porque no conoce el valor de n. En este caso el docente puede sugerirle que pruebe reemplazando n por distintos números naturales. De esta manera, el alumno podrá ingresar al problema y tendrá la posibilidad de avanzar en su comprensión de la situación.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Reemplaza n por uno o más valores, hace el cálculo para luego dividir por 3 y hallar el resto. Si bien la consigna pide no resolver la división, es probable que varios estudiantes lo hagan. En estos casos el docente podrá intervenir para recordarles la restricción que plantea el problema, para que el alumno intente avanzar hacia otra estrategia de resolución. En caso de que el estudiante no logre hallar una estrategia que permita resolver el problema, el docente podrá proponerle que analice el resto de dividir $3n$ por 3, para luego analizar qué sucede con el resto al sumar de a una unidad.

» Considera varios valores consecutivos de n e intenta hallar alguna regularidad en cuanto al resto de la división por 3. Por ejemplo, obtiene los números 5, 8, 11, 14, etc. y ve que todos tienen resto 2 al dividirlos por 3. Puede hacerlo resolviendo las divisiones o analizando que cada uno de los números es un múltiplo de 3 más 2. Luego generaliza esa propiedad para todos los valores de n, sin validarla. Esta resolución marca un salto cualitativo respecto de la anterior. Las exploraciones son controladas por el estudiante, que decide probar con números consecutivos para analizar si existe algún tipo de regularidad en los resultados que obtiene.

- Interpreta que $3n$ es un múltiplo de 3, por lo que la expresión representa un número que es dos unidades mayor que un múltiplo de 3. Luego, el resto al dividirlo por 3 es 2.

Para el ítem b) se puede observar si:

- Reemplaza a n por distintos valores, hace el cálculo para luego dividir por 3 y hallar el resto. Si bien la consigna pide no resolver la división, es probable que varios estudiantes lo hagan. En estos casos el docente podrá intervenir para recordarles la restricción que plantea el problema.
- Considera varios valores consecutivos de n e intenta hallar alguna regularidad en cuanto al resto de la división por 3. Por ejemplo, obtiene los números 19, 37, 55, 73, etc., ve que todos tienen resto 1 al dividirlos por 3 y generaliza esa propiedad para todos los valores de n sin validarla.
- Interpreta que $18n$ es múltiplo de 3 porque $18n = 3 \cdot 6n$ (o bien lo valida afirmando que como 18 es múltiplo de 3, cualquier múltiplo de 18 también lo será), por lo que la expresión representa un número que es 1 unidad más grande que un múltiplo de 3 y, en consecuencia, el resto, al dividirlo por 3, es 1.

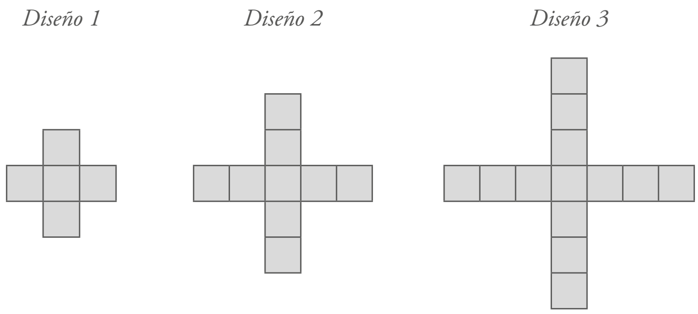
Para el ítem c) se puede observar si:

- Reemplaza a n por uno o más valores, hace el cálculo para luego dividir por 3 y hallar el resto.
- Considera varios valores consecutivos de n e intenta hallar alguna regularidad en cuanto al resto de la división por 3. Por ejemplo, obtiene los números 20, 29, 38, 47, 56, etc., ve que todos tienen resto 2 al dividirlos por 3 y generaliza esa propiedad para todos los valores de n sin validarla.
- Interpreta que $9n$ es múltiplo de 3 porque $9n = 3 \cdot 3n$ (o bien lo valida afirmando que como 9 es múltiplo de 3, cualquier múltiplo de 9 también lo será) y luego afirma que 11 tiene resto 2 al ser dividido por 3 (sin explicarlo o escribiendo $11 = 9 + 2$). Luego, la expresión representa un número que es dos unidades más grandes que un múltiplo de 3, por lo que el resto al dividirlo por 3 es 2.

Situación 4. Fórmulas para contar

El siguiente problema permite evaluar si los estudiantes son capaces de hallar una regularidad y, sobre esa base, formular una manera general de contar.

Una secuencia está formada por diseños hechos con cuadraditos. Los tres primeros son los siguientes:



a) Encontrá la cantidad de cuadraditos que hay en el diseño número 356.

b) ¿Hay algún diseño que tenga 2850 cuadraditos?

c) Encontrá un diseño que tenga una cantidad par de cuadraditos.

En este problema, si bien no se pide de manera explícita una fórmula que permita saber la cantidad de cuadraditos en función del número del diseño, los números involucrados hacen que sea necesario encontrar una manera general de contarlos.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Dibuja más diseños e intenta hallar algún tipo de regularidad entre la cantidad de cuadraditos que tiene cada uno.

» Se da cuenta de que la cantidad de cuadraditos va aumentando de 4 en 4, aun si no logra determinar cómo utilizar este dato para hallar la cantidad de cuadraditos para el diseño número 356. También es posible que produzca una fórmula recursiva, del estilo cuadraditos = cuadraditos del diseño anterior + 4.

» Relata una manera general de hallar la cantidad de cuadraditos a partir de analizar cómo varían los dibujos entre un diseño y otro. Por ejemplo, podría afirmar: “El primer diseño tiene 5 cuadraditos y se van agregando 4 en ‘las puntas’ cada vez. Como al primero no se le agregan 4, la cantidad de 4 es uno menos que el número del diseño.” A partir de esto puede escribir al cálculo $5 + 4 \cdot 355 = 1425$. También puede pensar que cada diseño se obtiene de 1 cuadradito más 4 puntas, que en el primer diseño tiene 1 cuadradito cada una, 2 en el segundo y así sucesivamente. Luego, en el diseño 356 habrá $1 + 356 \cdot 4 = 1425$ cuadraditos.

- Intenta producir una fórmula para la cantidad de cuadraditos en función del número del diseño –correcta o incorrecta– y reemplaza en ella el valor de la variable por 356.

Para el ítem b) se puede observar si:

- Responde que el número de diseño es 712, el doble de 356. En este caso, el alumno supone que hay una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de cuadraditos y el número de diseño: al doble de cantidad de cuadraditos (2850 es el doble de 1425) corresponde el doble del número de diseño (712 es el doble de 356). Es habitual que los estudiantes supongan que si dos variables crecen al mismo tiempo, entonces existe entre ellas una relación de proporcionalidad directa, sin verificar si efectivamente es así. Este problema puede ser una buena ocasión para discutirlo con la clase.
- Prueba por ensayo y error, y encuentra que para el diseño 712 hay 2849 cuadraditos, mientras que para el diseño 713 hay 2853 cuadraditos. A partir de allí puede deducir que ningún diseño tendrá 2850 cuadraditos.
- Halla una fórmula para determinar la cantidad de cuadraditos en función del número de diseño y plantea una ecuación, por ejemplo, $5 + 4(n - 1) = 2850$ o $4n + 1 = 2850$. Luego determina que esa ecuación no tiene solución.

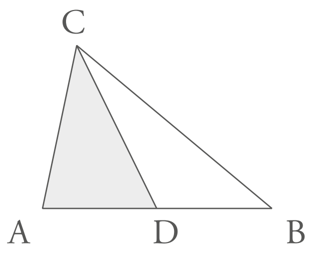
Para el ítem c) se puede observar si:

- Responde que no es posible a partir de haber encontrado algunos valores para la cantidad de cuadraditos pero no da razones para su respuesta.
- Responde que no es posible a partir del análisis de los valores que se obtienen de forma recursiva: el primer diseño tiene 5 cuadraditos, que es un número impar, y los demás se obtienen sumando cuatro cuadraditos, que es un número par, por lo que la cantidad de cuadraditos será siempre impar.
- Lee la información que porta la fórmula e interpreta que $5 + 4(n - 1)$ y $4n + 1$ representan la suma entre un número par y uno impar, por lo que el resultado siempre será impar.

Situación 5. Variación de perímetros y áreas

El siguiente problema permite evaluar si los estudiantes analizan las figuras y sus relaciones de manera general y si son capaces de modelizar la situación mediante el uso de fórmulas.

El punto D es el punto medio del segmento AB. Sin medir, encontrá la relación entre las áreas de los triángulos ABC y ADC.



Se puede observar si el estudiante:

- » Mide la base y la altura de cada triángulo y halla sus áreas aproximadas. Luego compara los resultados obtenidos en términos de mayor o menor.
- » Responde que el área del triángulo ADC es la mitad del área del triángulo ABC porque su base mide la mitad, sin validar su afirmación ni referirse a las alturas de ambos triángulos. Es posible que este estudiante dé la respuesta correcta en base a un razonamiento incorrecto.
- » Escribe las fórmulas de las áreas para cada uno de los triángulos sin relacionar las medidas de las dos bases. Por ejemplo, escribe Área ABC $= \frac{b \cdot h}{2}$ y Área ADC $= \frac{b \cdot h}{2}$ o Área ADC $= \frac{b_1 \cdot h}{2}$, y da o no la respuesta correcta. El alumno que elige esta estrategia no logra expresar la relación entre las bases, lo cual le permitiría leer que un área es la mitad o el doble de la otra. Las fórmulas planteadas no permiten resolver el problema.
- » Responde de manera correcta e intenta validar de manera coloquial afirmando que si en un producto uno de los números se reduce a la mitad, entonces su resultado también será la mitad. Este razonamiento implica el uso de la fórmula, aunque sea de manera implícita. El estudiante reconoce que en ambos casos se está multiplicando la base por la altura y que uno de los valores no cambia, mientras que el otro se reduce a la mitad. Eso hace que un área sea la mitad de la otra.
- » Escribe las fórmulas de las áreas para cada uno de los triángulos relacionando las medidas de las dos bases. Por ejemplo, escribe

$$\text{Área ABC} = \frac{b \cdot h}{2} \text{ y Área ADC} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right) \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

para mostrar que el área del triángulo ADC es la mitad del área del triángulo ABC. Esta estrategia hace uso de la fórmula y la relación entre las bases. El estudiante opera sobre la fórmula para mostrar y leer la relación entre las áreas.

Situación 1. Cálculos con números enteros

El siguiente problema permite evaluar si los estudiantes son capaces de utilizar las operaciones y las nociones de orden y distancia en los números enteros para resolver situaciones en contextos extramatemáticos.

> Un submarino estaba a –248 metros respecto del nivel del mar. Ahora está a –48 metros respecto del nivel del mar. ¿Subió o bajó? ¿Cuántos metros?

Se puede observar si el estudiante:

» Identifica, sin hacer cálculos, que la diferencia es de 200 m, sin decir si el submarino subió o bajó.

» Da la respuesta correcta a cada una de las preguntas sin mostrar cálculos.

» Escribe alguna de las restas –248 – 48; –248 – (–48); –48 – 248 o –48 – (–248) y escribe el resultado correcto, aunque no se corresponda con el resultado del cálculo que escribió. Es posible que el alumno que plantea un cálculo incorrecto reconozca que el problema se resuelve restando, pero no sepa en qué orden realizar la resta o cómo hallar su resultado.

» Escribe un cálculo correcto y lo utiliza para dar las respuestas al problema, interpretando la diferencia positiva como un indicador de que el submarino subió.

» Da la respuesta correcta al problema, explicándola de manera coloquial. Por ejemplo, afirma que –48 m está más cerca de la superficie que –248 m, por lo que el submarino subió. Y como de –248 m a –48 m hay 200 m, entonces el submarino subió 200 m.

Situación 2. Dominio de validez para relaciones de orden

A partir de las siguientes situaciones se intenta evaluar de qué manera un estudiante establece un conjunto solución e interpreta expresiones que incluyen una condición.

Encontrá todos los números enteros p que verifiquen cada una de las siguientes condiciones. Explicá cómo pensaste cada ítem.

a) $p + (-2) < -4$ b) $(-4) \cdot p > 12$

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Ensaya diferentes valores para p y determina algunas de las soluciones posibles, pero no logra aún encontrarlas todas.

» Ensaya de manera controlada[6] diferentes valores para p y determina el conjunto solución.

» Relata que, para que la suma dé -4, p debería valer -2, por lo que, para que la suma sea menor que -4, el valor de p debe ser menor que -2. Este razonamiento puede ir acompañado de un gráfico en una recta numérica.

Para el ítem b) se puede observar si:

» Se da cuenta de que el valor de p tiene que ser negativo para que el producto sea positivo.

» Se da cuenta de que el valor de p tiene que ser negativo para que el producto sea positivo y además explica que tiene que ser menor que -3.

» Logra encontrar algunas soluciones posibles a partir de ensayos con distintos valores para p.

» Interpreta la inecuación en términos de opuestos: si el opuesto de $4p$ es mayor que 12, entonces $4p$ tiene que ser menor que -12, y eso ocurre cuando p es menor que -3.

[6] Una *exploración controlada* responde a una estrategia de búsqueda de regularidades o soluciones, donde a partir de un resultado, el estudiante decide con qué otro valor le conviene probar.

Situación 3. Potencias de base entera

Mediante el siguiente problema es posible evaluar el tipo de generalización que realiza el estudiante al interpretar expresiones que incluyen una condición: generaliza de manera abusiva a partir del trabajo con los números naturales, considera la totalidad del conjunto de los números enteros sin tener en cuenta casos particulares o considera distintos sub-conjuntos particulares dentro de los números enteros para estudiar los alcances de la generalización.

Si n es un número entero:

a) ¿Para qué valores de n se cumple que $n^5 < n$?

b) ¿Para qué valores de n se cumple que $n^6 < n$?

c) ¿Para qué valores de n se cumple que $n^6 > n$?

Explicá cómo pensaste cada ítem.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Responde "nunca" porque el resultado de elevar un número a la quinta es siempre mayor que el número. Puede apoyarse en haber probado con algunos números positivos o en lo que conoce de su experiencia en el trabajo con ellos.

» Prueba con algunos valores de n positivos y negativos y da una solución con una cantidad finita de elementos. Esta resolución marca un avance respecto de la estrategia anterior, debido a que considerar ensayos con números negativos muestra que el alumno no considera solamente a los números naturales y que no se fía de su experiencia de trabajo con ellos.

» Analiza por separado qué sucede cuando n es positivo, cero o negativo y explica que cuando n es negativo, n^5 también es negativo y su valor absoluto es mayor que el valor absoluto de n. Por eso, la solución son todos los números negativos.

Para el ítem b) se puede observar si:

» Responde "nunca" porque el resultado de elevar un número a la sexta es siempre mayor que el número. Puede apoyarse en haber probado con algunos números positivos o en lo que conoce de su experiencia en el trabajo con ellos.

» Prueba con algunos valores de n positivos y negativos y responde que no hay solución.

» Analiza por separado qué sucede cuando n es positivo, cero o negativo y explica que n^6 es siempre mayor que n porque su valor absoluto es siempre mayor que el valor absoluto de n y además es positivo, ya que el exponente es par. Por eso, no hay solución. Es posible que algunos alumnos analicen los casos de $n = 0$ y/o $n = 1$, para los cuales ambas expresiones son iguales.

Para el ítem c) se puede observar si:

» Prueba con algunos valores enteros de n y responde que la solución son todos los números.

» Responde que la solución son todos los números enteros por ser el caso opuesto del planteado en la parte b).

» Analiza casos “cruciales” y determina que la desigualdad no es verdadera cuando $n = 0$ o $n = 1$, pero sí para el resto de los números enteros. Por eso, la solución son todos los números enteros excepto 0 y 1.

Situación 4. Operaciones con fracciones

El siguiente problema permite evaluar si el estudiante considera los números racionales como un conjunto numérico donde siempre es posible pasar de un número (distinto de cero) a otro por medio de una multiplicación y las estrategias de cálculo que dispone para encontrarlo.

a) Escribí 5 multiplicaciones que den 7.

b) Buscá un número que multiplicado por $\frac{2}{3}$ dé $\frac{7}{8}$.

Explicá cómo pensaste cada ítem.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Solo logra escribir multiplicaciones entre números enteros: $1 \cdot 7$, $(-1) \cdot (-7)$. En ese caso puede ocurrir que el alumno no considere la posibilidad de utilizar fracciones, sino que trabaje en el dominio de los números enteros.

» Puede encontrar al menos una multiplicación que involucre un número racional, por ejemplo $49 \cdot \frac{1}{7}$. Eso supone un indicio de que el estudiante considera a los racionales como el conjunto sobre el que se trabaja, aunque no logre encontrar otros cálculos equivalentes.

» Logra encontrar 5 multiplicaciones, partiendo de una de ellas y buscando cálculos equivalentes. Por ejemplo, si parte de $49 \cdot \frac{1}{7}$, podrá construir los demás productos multiplicando o dividiendo al 49 y al 7 por el mismo número (distinto de 0).

Para el ítem b) se puede observar si:

» Afirma que no es posible porque 7 no es múltiplo de 2 ni 8 es múltiplo de 3.

» Logra encontrar la fracción buscada a partir de resolver la división entre $\frac{7}{8}$ y $\frac{2}{3}$. Esta respuesta supone que el alumno reconoce que la división es la operación inversa de la multiplicación y que su resultado será el número buscado. Por otro lado, este estudiante no pone en duda que es posible pasar multiplicativamente de una fracción a cualquier otra.

» Utiliza estrategias de cálculo mental para, a partir de encontrar el factor que hace que el producto sea 1, luego multiplicar por otro factor para obtener el resultado deseado. Por ejemplo, busca primero la fracción que multiplicada por $\frac{2}{3}$ dé 1 y luego multiplica por $\frac{7}{8}$:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \text{ y } \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{8}, \text{ es decir que } \frac{2}{3} \cdot \frac{21}{16} = \frac{7}{8}.$$

Quien utiliza estrategias de cálculo mental muestra –al mismo tiempo que da sentido al procedimiento usado– por qué el número hallado es la solución, lo que no ocurre al usar algoritmos sin comprenderlos.

Situación 5. Equivalencia de fracciones[7]

La situación propone encontrar fracciones equivalentes que cumplan con alguna condición con el objetivo de evaluar las distintas estrategias que posee el estudiante para hallarla o para fundamentar que no es posible.

Encontrá una fracción equivalente a $\frac{7}{8}$.

a) Con denominador 5.

b) Cuyo denominador sea una potencia cualquiera de 10.

Explicá cómo pensaste cada ítem.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Afirma que no es posible porque 8 no es múltiplo de 5.

» Afirma que no es posible encontrar la fracción buscada porque, como para encontrar fracciones equivalentes se puede multiplicar o dividir numerador y denominador por el mismo número (no nulo), a 8 habría que multiplicarlo por $\frac{5}{8}$ para que dé 5. Pero al hacer lo mismo en el numerador, al multiplicar 7 por $\frac{5}{8}$ el resultado no es un número entero.

Para el ítem b) se puede observar si:

» Ensaya multiplicaciones por 8 intentando buscar alguna que dé por resultado una potencia de 10. Es posible que el alumno no logre encontrarla, aunque reconozca qué es lo que tiene que hacer para hallarla.

» Ensaya multiplicaciones por 8 controladas, ajustando el número por el cual multiplicar en función del resultado obtenido y el buscado, para obtener un resultado que sea potencia de 10. Luego multiplica el numerador por el mismo número que multiplicó al denominador y logra dar con una fracción equivalente a la pedida.

» Reconoce que el denominador no puede ser ni 10 ni 100 porque no son múltiplos de 8. Decide que 1000 sí lo es, apelando a la descomposición multiplicativa de $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ y analizando que para obtener una potencia de 10 es necesario multiplicar por $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. De esa manera logra encontrar la fracción equivalente correcta.

[7] Ministerio de Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección de Currícula y Enseñanza. (2006). *Matemática. Números racionales*. Aportes para la enseñanza. Nivel Medio. Disponible en: https://bit.ly/36j6fF7 [consultado el 20/12/2019].

Situación 6. Fracciones en la recta numérica

El siguiente problema permite evaluar cuáles son las relaciones entre fracciones que el estudiante es capaz de representar en la recta numérica.

Dada la siguiente recta numérica, representá los números -1, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$. Explicá cómo decidiste la ubicación de cada uno.

Se puede observar si el estudiante:

- Ubica los números sin respetar el orden entre ellos ni la escala.
- Ubica los números en orden pero sin respetar la escala, es decir, el -1 a la izquierda del 0, $\frac{2}{3}$ entre 0 y $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{2}$ a la derecha de $\frac{5}{6}$. Se trata de un alumno que puede comparar de alguna manera los tres números a representar y $\frac{5}{6}$, ya a partir de relaciones entre sextos, tercios y medios o hallando expresiones decimales, pero no sabe cómo utilizar la escala.
- Determina –de manera explícita o no– la ubicación de $\frac{1}{6}$, a partir de lo cual logra representar 1 y/o -1. Se trata esta de la relación más inmediata que el problema requiere poner en juego. A partir de esto, es posible que el estudiante pueda hallar otras relaciones que le permitan ubicar las demás fracciones:
  - que $\frac{1}{3}$ es el doble de $\frac{1}{6}$ y que $\frac{2}{3}$ es el doble de $\frac{1}{3}$, o que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$;
  - que $\frac{1}{2}$ es el triple de $\frac{1}{6}$ o que $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, y que $\frac{3}{2}$ es el triple de $\frac{1}{2}$ o que $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$.

Situación 7. Fracciones y decimales en la recta numérica

El siguiente problema permite evaluar cuáles son las relaciones entre números racionales escritos en forma fraccionaria y en forma decimal que el estudiante es capaz de reconocer y cuáles de estas es capaz de representar en la recta numérica.

En la siguiente recta están marcados los números 0 y $\frac{1}{3}$. Ubicá el número 0,75 y explicá cómo determinaste su posición.

Se puede observar si el estudiante:

- » Busca una expresión fraccionaria para 0,75 pero no puede avanzar. Se trata de un alumno que reconoce la necesidad de que ambos números estén representados de la misma manera para poder ubicarlos en la recta, aunque no logra determinar cómo hacerlo. Probablemente se deba a que no logra hallar alguna relación entre las fracciones que le aporte datos acerca de su ubicación.
- » Busca una expresión decimal para $\frac{1}{3}$ e intenta ubicar 0,75. Este alumno probablemente se sienta más cómodo representando decimales que fracciones. Sin embargo, si elige un desarrollo decimal finito para $\frac{1}{3}$, por ejemplo 0,3, su representación en la recta y la de 0,75 serán aproximadas. Pone en juego la noción de escala, aunque no sea precisa.
- » Encuentra una expresión fraccionaria para 0,75. Apoyándose en la ubicación de $\frac{1}{3}$, ubica el 1 en la recta para luego encontrar $\frac{1}{4}$, y a partir de ahí, $\frac{3}{4}$.
- » Encuentra una expresión fraccionaria para 0,75. A partir de la ubicación de $\frac{1}{3}$, ubica $\frac{1}{2}$ en la recta, estableciendo que $\frac{1}{6}$ es la mitad de $\frac{1}{3}$ y que $\frac{3}{6}$ es equivalente a $\frac{1}{2}$. Luego ubica $\frac{1}{4}$, a partir de considerar que es la mitad de $\frac{1}{2}$, y a partir de ahí, $\frac{3}{4}$. Esta última resolución requiere del uso de relaciones de mitad entre fracciones, sin necesidad de recurrir al 1 como referencia.

Situación 8. Números racionales en la recta numérica

La siguiente situación propone dos números ubicados en una recta numérica cuyos valores no se conocen. La tarea consiste en ubicar en la recta numérica distintos números que están relacionados como partes, múltiplos, opuestos y el resultado de operar con ellos. El problema permite evaluar si el estudiante es capaz de ubicar estos números a partir de las relaciones, sin apoyarse en valores concretos.

En la siguiente recta numérica se ubicaron el 0 y los números p y q.

Ubicá en la recta los números $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{2}$, $\frac{q}{3}$, $2p$, $-q$, $\frac{p}{2}+q$, $\frac{q}{3}-p$. Explicá, en cada caso, cómo definiste cada ubicación.

Se puede observar si el estudiante:

» Asigna valores convenientes a p y a q, halla cada uno de los números a representar y los ubica correctamente. En este caso, la explicación será el resultado de cada uno de los cálculos. Esta estrategia puede complicarse si los valores elegidos para p y para q no dan resultados que puedan representarse fácilmente en la recta.

» Logra representar aquellos que involucran a uno solo de los números, pero no los dos últimos que implican operar con ellos. Se espera que el alumno pueda explicar que dividió la distancia de 0 a p en 4 partes o en 2, según el número, y que representó a $-q$ como simétrico de q con respecto a 0.

» Representa correctamente todos los números y brinda explicaciones correctas. Para los dos últimos cálculos, es posible que afirme que sumar un número positivo implica correrse hacia la derecha en la recta, mientras que restar un número positivo requiere correrse hacia la izquierda.

Funciones y álgebra

En el Diseño Curricular de la Ciudad de Autónoma Buenos Aires se proponen diversas entradas al álgebra. Por ejemplo, en el eje Números y álgebra la mirada se centra en el manejo de expresiones algebraicas para conjeturar y validar propiedades de los números y sobre la producción de fórmulas en el conjunto de los Números Naturales. En el eje Funciones y álgebra se plantea, en cambio, el trabajo con expresiones algebraicas a partir del estudio de las funciones. Una de las tareas sugeridas consiste en analizar globalmente gráficos de funciones y la relación con su fórmula. El álgebra se presenta así de manera transversal a ambos ejes, cuestión que estas progresiones intentan reflejar.

Para estas progresiones se han considerado tres subejes:

- Aproximación a las funciones a través de gráficos cartesianos
- Función lineal y ecuación de la recta
- Ecuaciones e inecuaciones

Aproximación a las funciones a través de gráficos cartesianos

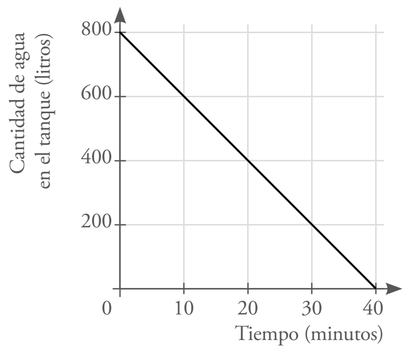
La entrada a las funciones que se plantea en el Diseño Curricular se basa en el análisis y en la producción de gráficos cartesianos, y no en una perspectiva conjuntista. En un comienzo, el foco está puesto en comprender que se trata de una relación entre variables, de modo que un cambio en una de ellas produce un cambio en la otra. El propósito es que los estudiantes desarrollen una mirada tanto de lo puntual (una interpretación punto a punto del gráfico) como de lo global (características generales relacionadas con la curvatura o no, el crecimiento, etc.), según resulte conveniente.

Aproximación a las funciones a través de gráficos cartesianos

Transición entre primaria y secundaria	Ciclo Básico Nivel I
Resuelve problemas de proporcionalidad directa cuyos datos se presentan a través de un gráfico en un sistema de coordenadas.[8] Resuelve problemas de variación uniforme cuyos datos se presentan a través de un gráfico en un sistema de coordenadas.	Lee información que se encuentra explícita en un gráfico en problemas situados en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

Un tanque que está lleno comienza a vaciarse. El siguiente gráfico representa la cantidad de agua que le queda al tanque en función del tiempo que transcurre desde que comienza a vaciarse.



¿Cuál es la capacidad máxima que posee el tanque?

¿Cuánto tarda en vaciarse el tanque?

El alumno lee datos que corresponden a puntos que aparecen explícitamente en el gráfico, lo que implica interpretar el significado de las coordenadas de los puntos en función de la situación planteada.

[8] Si bien estos problemas están en el Diseño Curricular para 6º y 7º, no siempre llegan a trabajarse en la escuela primaria. A pesar de eso, constituyen una base importante sobre la cual apoyarse para iniciar el trabajo con funciones.

- Lectura de información que se encuentra en gráficos
- Análisis de la variación de una variable en función de otra variable
- Relación entre una tabla de valores, el gráfico cartesiano y una situación

Ciclo Básico

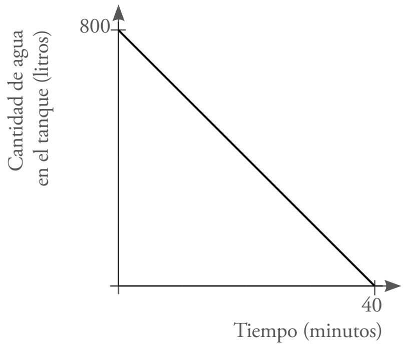
Nivel II	Nivel III

Nivel II

Estima valores no explícitos de las variables cuya relación está representada a través de un gráfico en problemas situados en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, para resolver este problema:

El siguiente gráfico representa la cantidad de litros de agua que posee un tanque en función del tiempo, en minutos, que transcurre desde que comienza a vaciarse.



¿Qué cantidad de agua posee el tanque a los 10 minutos de haber comenzado a vaciarse?

¿Cuánto tiempo pasó hasta que al tanque le quedaron 200 litros?

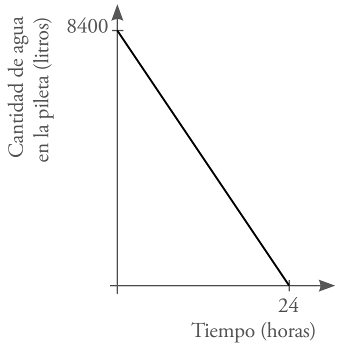
El estudiante, mirando el gráfico, identifica puntos que pertenecen a este, estableciendo una escala en cada eje y estima los valores de las variables.

Nivel III

Calcula valores exactos de las variables que no se encuentran de manera explícita en un gráfico a partir de información que sí se encuentra explícita en problemas situados en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, para resolver el problema:

El siguiente gráfico representa la cantidad de agua que hay en una pileta de natación en función del tiempo que transcurre desde que comienza a vaciarse.



¿Qué cantidad de agua hay en la pileta a las 8 horas de haber comenzado a vaciarse?

¿Cuánto tiempo pasó hasta que a la pileta le quedaron 2800 litros?

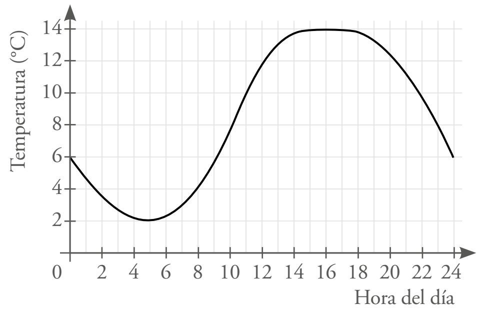
El estudiante responde las preguntas de manera exacta a partir de determinar que el tanque se vacía a razón de 350 litros por hora y luego de realizar cálculos:

$8400 - 8 \cdot 350 = 5600$

$8400 - 16 \cdot 350 = 2800$

Analiza la variación de una variable en función de otra en términos de si es creciente, decreciente o constante en problemas situados en contextos extramatemáticos.

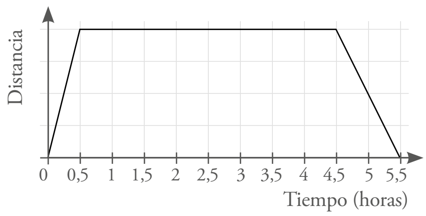
Por ejemplo, a partir del siguiente gráfico puede establecer en qué momentos la temperatura aumenta, disminuye o se mantiene constante, sobre la base de identificar si la curva "sube", "baja" o "queda igual" a medida que transcurre el tiempo.



Compara distintas variaciones de una de las variables en función de otra, en situaciones en las que la variación de una de las variables es constante en problemas situados en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, al resolver este problema:

El siguiente gráfico representa la distancia de Pedro a su casa en función del tiempo transcurrido desde que salió para ir a la escuela.



¿Cuánto tiempo estuvo en la escuela?

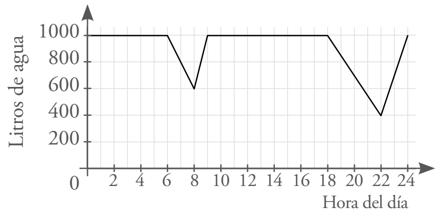
¿Es cierto que el camino de regreso a su casa lo hizo más rápido que el camino de ida a la escuela?

El estudiante establece que Pedro recorrió más rápido el camino de ida porque tardó menos tiempo y que tanto a la ida como a la vuelta recorrió la misma distancia (la variación de la variable "distancia" es la misma en los dos tramos).

Compara distintas variaciones de una de las variables en función de la otra en problemas situados en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

El siguiente gráfico describe la cantidad de agua que contiene el tanque de una casa en los distintos horarios de un día.



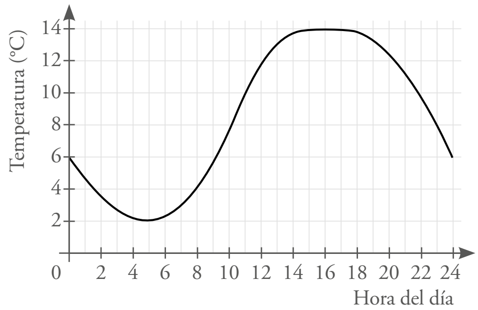
a) Identificá en qué momentos se está vaciando el tanque. ¿Cuándo se vacía más rápido?

b) Identificá en qué momentos se está llenando el tanque. ¿Cuándo se llena más rápido?

El alumno afirma que el tanque se vacía más rápido entre las 6 y las 8 que entre las 18 y las 22. Justifica teniendo en cuenta que si bien entre las 6 y las 8 se consume menor cantidad de agua, si se siguiera consumiendo al mismo ritmo durante cuatro horas, se consumirían 800 litros, que son 200 litros más que los 600 que se consumen entre las 18 y las 22.

Establece relaciones entre tablas de valores y gráficos cartesianos a partir de la lectura de información explícita que se encuentra en los gráficos.

Por ejemplo, a partir del siguiente gráfico puede completar la tabla.



Hora del día	0	5	8	11	15	17	22	24
Temperatura								

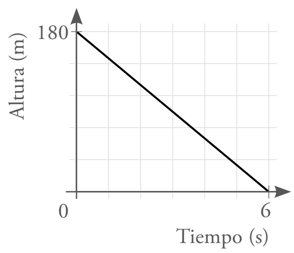
Establece relaciones entre tablas de valores y gráficos cartesianos a partir de la lectura de información no explícita que se encuentra en los gráficos.

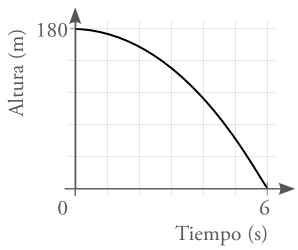
Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

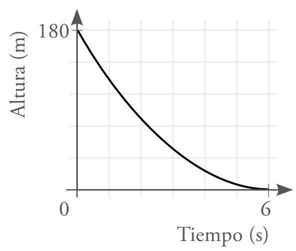
Una piedra se deja caer desde la terraza de un edificio de 180 metros de alto. La siguiente tabla muestra distintas alturas de la piedra en función del tiempo, en su recorrido hasta llegar al piso.

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6
Altura (metros)	180	175	160	135	100	55	0

¿Cuál o cuáles de estos gráficos pueden representar la situación?







El estudiante decide qué gráfico puede corresponder con la situación a partir de comparar los valores de la tabla con estimaciones realizadas sobre el gráfico.

Construye un gráfico cartesiano y/o una tabla de valores a partir de la información brindada por una tabla o por la descripción de una situación.

Por ejemplo, al resolver este problema:

Se sabe que los valores de una variable y se obtienen sumándole 5 unidades a los valores de otra variable x.

a) Completá la tabla que representa algunos valores de la relación entre x e y.

x	–2	0		4		15
y			8		15	

b) En un sistema de ejes cartesianos, realizá un gráfico que represente la relación entre ambas variables.

El alumno completa la tabla a partir de la situación descrita y luego realiza el gráfico sobre la base de los valores completados en la tabla y los de la situación.

Función lineal y ecuación de la recta

Los estudiantes tienen un largo recorrido de trabajo con relaciones de proporcionalidad directa en la escuela primaria, a partir tanto de tablas como de gráficos. En la escuela secundaria se trata de recuperar ese trabajo y tomarlo como un conocimiento de base para ampliar la mirada hacia procesos de variación uniforme. Con ese propósito se sugiere trabajar con problemas que lleven a diferenciar las funciones lineales de las de proporcionalidad directa, en los distintos registros de representación.

Función lineal y ecuación de la recta

Transición entre primaria y secundaria	Ciclo Básico Nivel I
Resuelve problemas de varios pasos, con las cuatro operaciones y diferentes modos de presentar la información: tablas, enunciados, cuadros de doble entrada, facturas, etcétera.	Halla imágenes mediante el empleo de cálculos en problemas que describen procesos de variación uniforme situados en contextos extramatemáticos. Por ejemplo, para resolver el siguiente problema: Al inicio de un experimento, una sustancia tenía una temperatura de 15 °C. Durante el transcurso del experimento se hizo descender su temperatura de manera constante a razón de 3 °C por minuto. Si el experimento duró 7 minutos, ¿cuál fue la temperatura final que alcanzó la sustancia? El alumno calcula primero cuánto desciende la temperatura haciendo $3 \cdot 7 = 21$. Luego le resta ese resultado a la temperatura inicial: $15 - 21 = -6$.

- Fórmulas para describir procesos de variación uniforme
- Gráficos de funciones lineales
- Coordinación entre una fórmula, una tabla y su gráfico
- Ecuación de la recta

Ciclo Básico

Nivel II

Halla preimágenes mediante el empleo de cálculos en problemas que describen procesos de variación uniforme situados en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

> Al inicio de un experimento, una sustancia tenía una temperatura de 15 °C. Durante el transcurso del experimento se hizo descender su temperatura de manera constante a razón de 3 °C por minuto, para alcanzar, finalmente, una temperatura de –6 °C. ¿Cuánto tiempo duró el experimento?

El estudiante calcula primero cuánto descendió la temperatura haciendo $15 + 6 = 21$. Luego realiza una división para calcular cuánto tiempo transcurrió: $21 : 3 = 7$.

Nivel III

Halla preimágenes mediante el planteo y la resolución de ecuaciones en problemas que describen procesos de variación uniforme situados en contextos intra- y extramatemáticos.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

> Al inicio de un experimento, una sustancia tenía una temperatura de 15 °C. Durante el transcurso del experimento se hizo descender su temperatura de manera constante a razón de 3 °C por minuto, para alcanzar, finalmente, una temperatura de –6 °C. ¿Cuánto tiempo duró el experimento?

El alumno plantea $15 - 3 \cdot M = -6$. Luego resuelve la ecuación, ya sea probando y estimando valores de M o con algún método de despeje.

O bien, para resolver la siguiente situación:

> $f(x) = 2x + 1$ es la fórmula de una función lineal. Completá la tabla de valores relacionados de las variables.

x	1		2,5		10
$f(x)$		4		12	

El estudiante completa la segunda columna de la tabla planteando y resolviendo la ecuación $4 = 2x + 1$.

Resuelve problemas de proporcionalidad directa y explicita las propiedades de la proporcionalidad que se ponen en juego en su resolución.

Resuelve problemas de escalas y porcentaje.

Utiliza fórmulas dadas para hallar imágenes, en problemas que describen procesos de variación uniforme situados en contextos intra- y extra-matemáticos.

Por ejemplo, al resolver este problema:

Un tanque comienza a llenarse por medio de una bomba. La siguiente fórmula permite calcular la cantidad de agua (medida en litros) que posee el tanque en función del tiempo (medido en minutos) de funcionamiento de la bomba:

$$A = 200 + 20 \cdot t$$

¿Qué cantidad de agua habrá dentro del tanque 10 minutos después de haberse encendido la bomba?

O bien, en la siguiente situación:

$f(x) = 2x + 1$ es la fórmula de una función lineal. Completá la tabla con los valores relacionados de las variables.

x	1	2	2,5	5	10
$f(x)$					

El estudiante reemplaza la variable independiente por los valores y realiza los cálculos para hallar las imágenes.

Ciclo Básico

Nivel II	Nivel III

Identifica qué fórmula permite modelizar un proceso de variación uniforme en situaciones extramatemáticas.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

Al inicio de un experimento, una sustancia tenía una temperatura de 21 °C. Durante el transcurso se hizo descender su temperatura de manera constante a razón de 3 °C por minuto. ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas permite/n calcular la temperatura de la sustancia en función del tiempo transcurrido desde que comenzó el experimento? T representa la temperatura de la sustancia medida en °C, y M, el tiempo medido en minutos.

$T = 21 - 3 \cdot M$	$T = 3 - M + 21$
$T = 3 \cdot M - 21$	$T = -3 \cdot M + 21$

El estudiante interpreta los datos para determinar que la variación de temperatura es de 3 °C por minuto y que, como disminuye, ese valor debe restarse a la temperatura inicial.

Produce fórmulas que permiten modelizar procesos de variación uniforme en situaciones extramatemáticas en las cuales la constante de proporcionalidad de la variación y el valor inicial vienen dados.

Por ejemplo, a partir del siguiente problema el alumno produce la fórmula

$$T = 21 - 3 \cdot M.$$

Al inicio de un experimento, una sustancia tenía una temperatura de 21 °C. Durante el transcurso se hizo descender su temperatura de manera constante a razón de 3 °C por minuto. Escribí una fórmula que permita calcular la temperatura de la sustancia en función del tiempo transcurrido desde que comenzó el experimento.

Produce fórmulas que permiten modelizar procesos de variación uniforme en situaciones extramatemáticas en las cuales es necesario hallar la constante de proporcionalidad de la variación y/o el valor inicial.

Por ejemplo, a partir del siguiente problema, el estudiante produce la fórmula $P = 20 + 80 \cdot t$.

Un automóvil se desplaza a velocidad constante por una ruta. Se sabe que luego de una hora de haber partido se encuentra en el kilómetro 100 de la ruta y luego de tres horas de haber partido se encuentra en el kilómetro 260.

Escribí una fórmula que permita calcular la posición del automóvil en función del tiempo transcurrido desde la partida.

Decide si una situación en la que se relacionan dos magnitudes es o no de proporcionalidad directa y explica por qué, apelando a sus propiedades.

Reconoce que los procesos de variación uniforme no necesariamente representan relaciones de proporcionalidad, identificando que lo proporcional es la variación.

Por ejemplo, al resolver este problema:

Un automóvil se desplaza a velocidad constante por una ruta. A las 12 del mediodía se encuentra en el kilómetro 100 de la ruta y a las 13 h en el kilómetro 210. ¿Es cierto que a las 14 h se encontrará en el kilómetro 420?

El alumno establece que no es cierto que a las 14 h el auto se encontrará en el km 420 porque, si bien a esa hora habrá transcurrido el doble de tiempo que el transcurrido entre las 12 y las 13 h, lo que se duplica no es la posición, sino el recorrido. Es decir que en lugar de haber recorrido 110 km, se habrá desplazado el doble de 110, 220 km, y se encontrará en el km 320.

Nivel II	Nivel III

Nivel II

Calcula la constante de proporcionalidad de la variación y el valor inicial, en situaciones extramatemáticas que refieren a procesos de variación uniforme.

Por ejemplo, al resolver este problema:

> Un automóvil se desplaza a velocidad constante por una ruta. A las 12 del mediodía se encuentra en el kilómetro 100 de la ruta y a las 14 h en el kilómetro 320. ¿A qué velocidad se desplaza el auto? Si se sabe que comenzó su recorrido a las 11:30, ¿desde qué kilómetro de la ruta partió?

El estudiante calcula primero la variación de la posición $(320 - 100 = 220)$ y del tiempo (2 horas), y luego realiza una división para calcular la velocidad: $220 : 2 = 110$. Con esta información calcula que si en una hora el auto recorre 110 km, en media recorre 55 km. Como 11:30 es media hora menos que las 12, entonces el auto estará 55 km antes del km 100 de la ruta: en el km 45. Es decir que partió del km 45 de la ruta.

Nivel III

Reconoce e interpreta el significado de los valores de los parámetros de una fórmula de variación uniforme en términos de un problema extramatemático.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

> Un tanque comenzó a llenarse por medio de una bomba. La siguiente fórmula permite calcular la cantidad de agua A (medida en litros) vertida en el tanque en función del tiempo t (medido en minutos) de funcionamiento de la bomba: $A = 200 + 20 \cdot t$
>
> ¿Qué cantidad de agua había dentro del tanque cuando se encendió la bomba? ¿Cuántos litros de agua por minuto entraban al tanque mientras estuvo encendida la bomba?

El estudiante interpreta a partir de la lectura de la fórmula que 200 es la cantidad de litros de agua que posee el tanque cuando se prende la bomba porque es el resultado cuando $t = 0$. También que 20 son los litros por minuto que entran porque a medida que se le suma una unidad a t, el resultado va aumentando de a 20 litros.

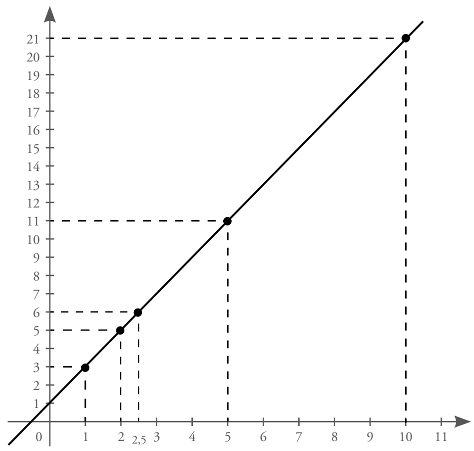
Produce gráficos de funciones lineales ubicando puntos en el plano cartesiano a partir de valores relacionados de las variables.

Por ejemplo, para resolver este problema:

$f(x) = 2x + 1$ es la fórmula de una función lineal. Completá la tabla con los valores relacionados de las variables y realizá un gráfico que represente a la función.

x	$f(x)$
1	
2	
2,5	
5	
10	

El alumno realiza un gráfico como este:



Identifica si un punto dado como par ordenado pertenece al gráfico de una función lineal dada.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Indicá si los puntos A = (0 ; 1), B = (3 ; 10), C = (–2 ; –7) y D = (–2 ; –5) pertenecen al gráfico de la función $f(x) = 3x + 1$.

El alumno reemplaza los valores de las variables y corrobora o no que la igualdad sea verdadera. O bien reemplaza el valor de la primera coordenada para ver si su imagen coincide con la segunda coordenada. También puede graficar la función y analizar si los puntos dados pertenecen o no a su gráfico.

Nivel II	Nivel III

Produce gráficos de funciones lineales a partir de su fórmula: halla valores relacionados de las variables, ubica esos valores como puntos en el plano y traza la recta que es el gráfico de la función.

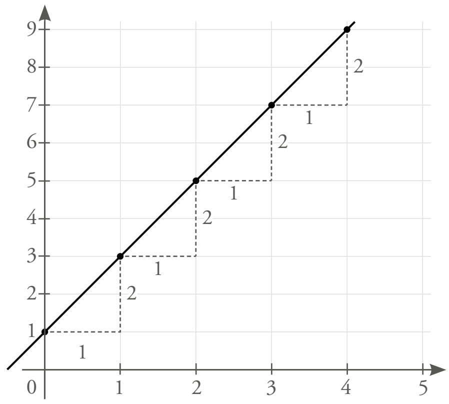
Por ejemplo, ante la siguiente situación:

Realizá el gráfico de la función lineal representada por la fórmula $f(x) = 2x + 1$.

El alumno confecciona una tabla de valores con dos o más puntos, luego los representa en un sistema de ejes cartesianos y por último traza la recta.

Produce gráficos de funciones lineales ubicando la ordenada al origen y otros puntos sobre la base de la variación que indica la pendiente.

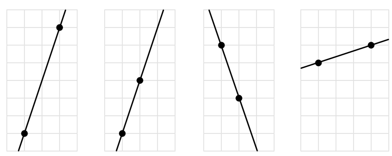
Por ejemplo, a partir de la fórmula $f(x) = 2x + 1$ ubica en un sistema de ejes cartesianos, los puntos $(0;1)$, $(1;3)$ y $(2;5)$, analizando que la constante de proporcionalidad de la variación indica que la variable dependiente aumenta 2 unidades por cada una unidad que varía la variable independiente.



Reconoce e interpreta la relación entre los valores de los parámetros de la fórmula de una función lineal y su gráfico.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

Indicá cuál puede ser el gráfico de la función determinada por la fórmula $f(x) = ax + b$ sabiendo que $a = 3$. Y que en todos los gráficos la cuadrícula tiene una escala de una unidad por una unidad.



Identifica la correspondencia entre la ecuación de la recta y su gráfico a partir del análisis de las relaciones entre la ordenada al origen y la intersección con el eje de ordenadas, y la pendiente con su inclinación.

Por ejemplo, al resolver este problema:

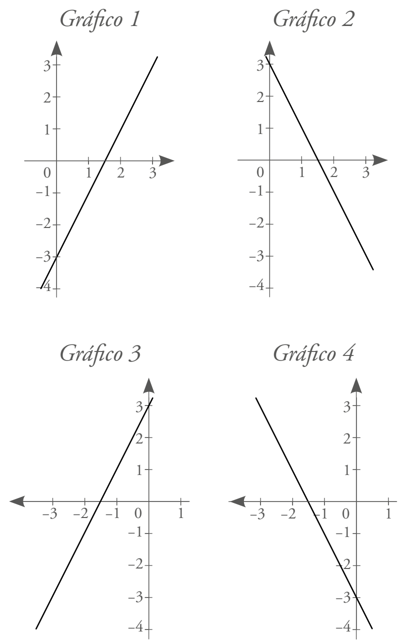
Indicá cuál es la ecuación de cada una de las rectas.

Ecuación 1: $y = 2x + 3$

Ecuación 2: $y = -2x + 3$

Ecuación 3: $y = 2x - 3$

Ecuación 4: $y = -2x - 3$



El estudiante identifica que las primeras dos ecuaciones corresponden a los gráficos 2 y 3, pues su ordenada al origen es 3, al igual que el valor del eje de ordenadas en el cual la recta lo interseca. Luego reconoce que la primera ecuación debe corresponder al segundo gráfico, pues su pendiente es positiva y la recta corresponde a una función creciente.

Halla ecuaciones de rectas a partir de tener como datos la pendiente y un punto que pertenece a ellas.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

Hallá la ecuación de la recta cuya pendiente es -2 y contiene al punto $(-2\,;-1)$.

El alumno construye la ecuación

$$y = -2x + b$$

y plantea y resuelve la ecuación

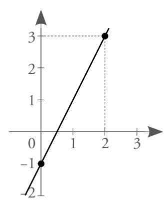
$$-1 = -2 \cdot (-2) + b$$

para hallar el valor de la ordenada al origen.

Halla ecuaciones de rectas dadas por un gráfico que muestra su intersección con el eje de ordenadas y otro punto que pertenece a ella.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

Hallá la ecuación de la siguiente recta.



El estudiante identifica a -1 como la ordenada al origen porque es el valor de la segunda coordenada del punto de intersección entre la recta y el eje de ordenadas.

Luego calcula que la pendiente es 2 analizando las variaciones de ambas variables: la variable y varía 4 unidades cada 2 unidades que varía la variable x, por lo tanto la variable y varía 2 unidades por cada una unidad que varía la variable x. Finalmente escribe la fórmula $y = 2x - 1$. También podría plantear y resolver la ecuación $3 = m \cdot 2 - 1$ para hallar el valor de la pendiente.

Halla ecuaciones de rectas a partir de tener como datos dos puntos que pertenecen a ellas.

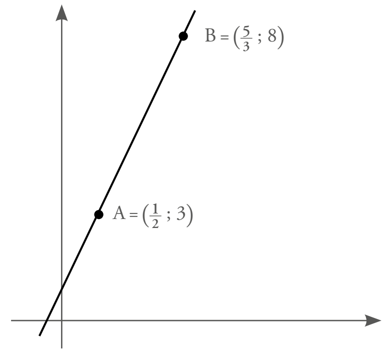
Por ejemplo, para resolver este problema:

Hallá la ecuación de la recta que contiene a los puntos

$$A = \left(\tfrac{1}{2}\,;3\right) \text{ y } B = \left(\tfrac{5}{3}\,;8\right)$$

O bien, en la siguiente situación:

Hallá la ecuación de la siguiente recta.



El estudiante obtiene el valor de la pendiente como el cociente de las variaciones de las variables:

$$m = \frac{8-3}{\frac{5}{3}-\frac{1}{2}}$$

Luego, plantea y resuelve la ecuación

$$3 = \frac{30}{7} \cdot \frac{1}{2} + b$$

para hallar el valor de la ordenada al origen.

Ecuaciones e inecuaciones

El trabajo sobre ecuaciones se desarrolla en dos sentidos, de manera simultánea y dialéctica. Por un lado, con relación a una entrada conceptual del objeto y, por otro, con respecto al dominio creciente de diversas técnicas. En un primer momento se espera que los alumnos comiencen a entender a la ecuación como una función proposicional. Trabajar a partir de la idea de conjunto solución como el conjunto de valores que hacen verdadera la igualdad permite desde un inicio abordar ecuaciones que poseen solución única, varias soluciones, infinitas soluciones o que no poseen solución. Para estos casos, el álgebra es un apoyo central, y se utiliza para transformar una ecuación en otra equivalente de donde puedan leerse las soluciones.

Las funciones constituyen otro marco fértil para el trabajo con ecuaciones e inecuaciones. La interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones abona a la construcción de sentido de estos objetos matemáticos, y los conforma como una herramienta de modelización. Por un lado, a través de un análisis en un registro gráfico ligado al marco funcional se puede establecer, por ejemplo, la cantidad de soluciones de una ecuación. Por el otro, las ecuaciones y su resolución algebraica permiten modelizar y resolver problemas relacionados a funciones. Por ejemplo, problemas relacionados con la intersección de gráficos de funciones.

Resulta importante señalar que hay varios contenidos y tareas referidos a las funciones lineales y sus gráficos que se pueden considerar de manera análoga para las rectas y sus ecuaciones. A los fines de la progresión, se ha decidido considerar problemas referidos a situaciones intramatemáticas con funciones lineales y sus gráficos.

Ecuaciones e inecuaciones

Transición entre primaria y secundaria	Ciclo Básico Nivel I
Identifica y usa adecuadamente las propiedades distributiva y asociativa para la resolución de cálculos de multiplicación. Realiza cálculos mentales de división o reconoce la equivalencia entre cálculos y explicita las propiedades de la división puestas en juego. Resuelve cálculos combinados teniendo en cuenta la jerarquía entre las operaciones implicadas.	Resuelve ecuaciones del tipo $x + a = b$ $x - a = b$ $a \cdot x = b$ (con $a \neq 0$) $x : a = b$ (con $a \neq 0$) $a : x = b$ apelando a operaciones inversas. Por ejemplo, para resolver la ecuación $3 \cdot x = 252$, el alumno utiliza las operaciones aritméticas inversas, lo que supone una interpretación de la letra como incógnita y del signo igual como indicador de un resultado. En este caso concluye que la solución es 84 porque, como el resultado de multiplicar a 3 por un número da 252, ese número tiene que ser $252 : 3 = 84$.

- Resolución algebraica de ecuaciones
- Relación entre la solución algebraica y la gráfica de una ecuación o inecuación
- Problemas que se modelizan con ecuaciones o inecuaciones lineales con una variable

Ciclo Básico	
Nivel II	**Nivel III**
Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot x + b = c$ (con $a \neq 0$) a través de ensayos y ajustes. Por ejemplo, para la ecuación $3x + 1 = -5$, el estudiante obtiene la solución a través de ensayos y reajustes en función de los resultados. Prueba primero con $x = -1$ y no obtiene -5: $3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$ Como el resultado obtenido (-2) es mayor que el buscado, prueba con un valor de x menor: -2. $3 \cdot (-2) + 1 = -6 + 1 = -5$ Este tipo de resolución supone una interpretación de la letra como incógnita y del signo igual como indicador de un resultado.	Resuelve ecuaciones con solución única del tipo $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ (con a y c no simultáneamente nulos) a través de transformaciones algebraicas. Por ejemplo, para resolver la ecuación $3x + 1 = 2x + 4$, el estudiante utiliza transformaciones algebraicas, interpretando el signo igual como una equivalencia, lo que le permite verificar la solución. En este caso, obtiene la solución 3 y verifica que sea correcta: $3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$ $2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10$

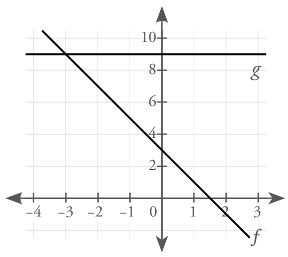
Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico* Nivel I

Ciclo Básico	
Nivel II	**Nivel III**
Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot x + b = c$ (con $a \neq 0$) a partir de analizar la estructura del cálculo. Por ejemplo, para resolver la ecuación $3x + 1 = 7$, el alumno analiza la estructura de la expresión $a \cdot x + b$ y deduce cuál debe ser el valor de x para que el resultado sea c. En este caso, concluye que $3 \cdot x$ debe ser igual a 6, porque al resultado de $3x$ se le suma 1 y da 7. Luego, como $3 \cdot x$ tiene que dar 6, x es igual a 2. Este tipo de estrategia supone una interpretación de la letra como incógnita y del signo igual como indicador de un resultado.	Resuelve ecuaciones sin solución o con infinitas soluciones. Por ejemplo, resuelve la ecuación $3x + 1 = 3x + 2$ deduciendo que el conjunto solución es vacío a partir de analizar que en las expresiones de ambos miembros el resultado de $3x$ es el mismo para cualquier valor de x, pero que como en la expresión del miembro izquierdo se le suma 1 y en la del derecho se le suma 2, ambos resultados nunca serán el mismo. Para resolver la ecuación $2x - 1 = 2\left(-\frac{1}{2} + x\right)$ el estudiante realiza transformaciones algebraicas y obtiene la ecuación $0 \cdot x = 0$, equivalente a la original. Luego deduce que cualquier valor de x satisface la igualdad dado que al multiplicar 0 por cualquier número el resultado será 0. En ambos casos, el estudiante deduce el conjunto solución haciendo transformaciones y/o un análisis de las expresiones que se encuentran en ambos miembros. Este tipo de estrategia supone una interpretación de la letra como variable.

Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot x + b = c$ (con $a \neq 0$) a partir del análisis del gráfico de la función $f(x) = a \cdot x + b$.

Por ejemplo, al resolver este problema:

En este sistema de coordenadas se han representado las gráficas de las funciones $f(x) = -2x + 3$ y $g(x) = 9$. A partir del gráfico, hallá la solución de la ecuación $-2x + 3 = 9$.



El alumno reconoce que el punto (–3 ; 9) pertenece a la gráfica de ambas funciones. Luego afirma que la solución es –3 porque tiene la misma imagen a través de cada una de las funciones.

Nivel II

Resuelve gráficamente ecuaciones o inecuaciones del tipo $a \cdot x + b = c$ o $a \cdot x + b < c$[9] (con a y c no simultáneamente nulos) a partir del análisis de las gráficas de las funciones $f(x) = a \cdot x + b$ y $g(x) = c$.

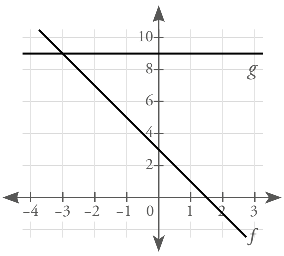
Por ejemplo, ante la situación:

> Resolvé gráficamente la ecuación
>
> $$-2x + 3 = 9$$

El estudiante decide qué funciones graficar e interpreta la solución como la primera coordenada del punto de intersección entre ellas.

O bien, para resolver el siguiente problema:

> En el siguiente sistema de coordenadas se han representado las gráficas de las funciones $f(x) = -2x + 3$ y $g(x) = 9$. A partir del gráfico, hallá la solución de la inecuación $-2x + 3 < 9$.



El alumno reconoce que el punto $(-3\,;9)$ pertenece a la gráfica de ambas funciones. Luego afirma que el conjunto solución son todos los números mayores que -3 porque las imágenes de esos valores a través de la función f son menores que 9. Esto sucede porque la función f es decreciente, por lo que ese tramo del gráfico está por debajo de la recta $y = 9$.

La fila continúa en página 93.

Nivel III

Resuelve gráficamente ecuaciones del tipo

$$a \cdot x + b = c \cdot x + d \quad \text{o}$$

inecuaciones del tipo

$$a \cdot x + b \ < \ c \cdot x + d$$

(donde $f(x) = a \cdot x + b$ y $g(x) = c \cdot x + d$).

Decide qué funciones graficar y analiza los gráficos correspondientes para obtener el conjunto solución.

Por ejemplo, ante la siguiente situación:

> Resolvé gráficamente la inecuación
>
> $$3x - 2 \ < \ 2x + 1$$

El estudiante decide graficar las funciones $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 2x + 1$. Reconoce que el punto de intersección, $(3\,;7)$, pertenece a ambos gráficos. Luego afirma que el conjunto solución son todos los valores de x menores que 3, ya que, para esos valores de la variable independiente, el gráfico de f está "por debajo" del de g. Esto implica que las imágenes de esos valores a través de la función f serán menores que los que se obtienen a través de la función g, en todos esos casos.

---

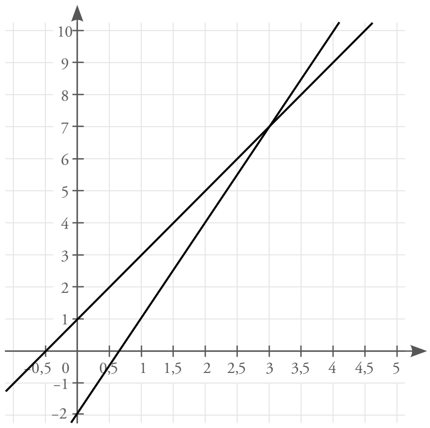
[9] Con el fin de facilitar la lectura y sin pérdida de generalidad, en todos los indicadores de aprendizaje y en los problemas que incluyen inecuaciones, se consideran desigualdades con el uso del signo "<". En todos los casos se podrían expresar inecuaciones análogas utilizando los signos ">", "≤" y "≥".

Continúa la fila de página 91.

Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ (donde $f(x) = a \cdot x + b$ y $g(x) = c \cdot x + d$) a partir del análisis de los gráficos de las funciones.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

A continuación se representan las funciones $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 2x + 1$ en un sistema de coordenadas. A partir del gráfico, hallá la solución de la ecuación $3x - 2 = 2x + 1$.

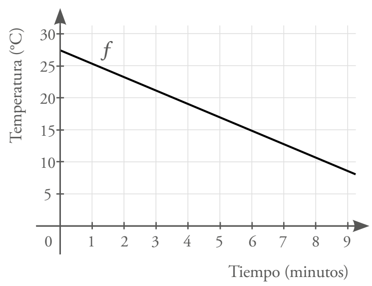


El alumno reconoce que para el punto de intersección entre los gráficos se verifica que $f(x) = g(x)$. Es decir que el punto $(3 ; 7)$ pertenece al gráfico de ambas funciones. Luego afirma que la solución es 3 porque si se realiza el cálculo de ambas fórmulas con ese valor en x, el resultado será 7 en ambos casos.

Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot x + b = c$ (con $a \neq 0$) a partir del análisis del gráfico de la función $f(x) = a \cdot x + b$, en problemas en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, a partir del problema:

La fórmula $f(x) = -2x + 27$ permite calcular la temperatura de una sustancia en función del tiempo (medido en minutos) que transcurre desde que comenzó un experimento. A continuación se presenta el gráfico de la función.



¿En qué momento la temperatura de la sustancia fue de 20 °C?

El estudiante estima que el punto (3,5 ; 20) pertenece al gráfico de la función. Luego afirma que el momento en que la temperatura de la sustancia fue de 20 °C es 3 minutos y medio porque su imagen a través de la función es 20, ya que $-2 \cdot 3{,}5 + 27 = 20$.

Ciclo Básico	
Nivel II	**Nivel III**
Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot x + b = c$ (con $a \neq 0$), en problemas en contextos extramatemáticos. Por ejemplo, para resolver el problema: La fórmula $f(x) = -2x + 27$ permite calcular la temperatura de una sustancia en función del tiempo (medido en minutos) que transcurre desde que comenzó un experimento. ¿En qué momento la sustancia estuvo a 20 °C? El alumno plantea y resuelve la ecuación $-2x + 27 = 20$.	

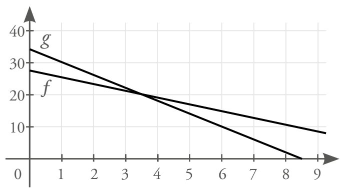
Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico* Nivel I

Ciclo Básico	
Nivel II	**Nivel III**

Nivel II

Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ (donde $f(x) = a \cdot x + b$ y $g(x) = c \cdot x + d$) a partir del análisis de los gráficos de las funciones, en problemas en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, a partir del problema:

> Las fórmulas
>
> $$f(x) = -2x + 27$$
>
> y
>
> $$g(x) = -4x + 34$$
>
> permiten calcular la temperatura de dos sustancias en función del tiempo (medido en minutos) que transcurre desde que comenzó un experimento. A continuación se presenta el gráfico de ambas funciones.
>
> 
>
>
> ¿En qué momento la temperatura de ambas sustancias fue la misma?

El alumno estima que el punto (3,5 ; 20) pertenece al gráfico de ambas funciones. Luego afirma que el momento en que la temperatura de ambas sustancias fue la misma es 3 minutos y medio, porque su imagen a través de ambas funciones es 20:

$$-2 \cdot 3{,}5 + 27 = 20$$

$$-4 \cdot 3{,}5 + 34 = 20$$

Nivel III

Plantea y resuelve ecuaciones con solución única del tipo $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ (con a y c no simultáneamente nulos), en problemas en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, para resolver el problema:

> Las fórmulas
>
> $$f(x) = -2x + 27$$
>
> y
>
> $$g(x) = -4x + 34$$
>
> permiten calcular la temperatura de dos sustancias en función del tiempo (medido en minutos) que transcurre desde que comenzó un experimento.
>
> ¿En qué momento la temperatura de ambas sustancias fue la misma?

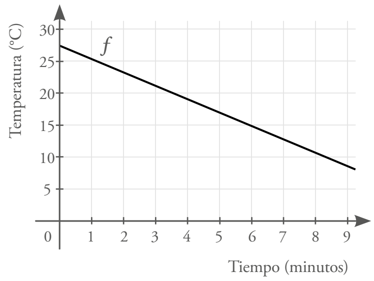
El alumno plantea y resuelve la ecuación $-2x + 27 = -4x + 34$.

Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico* Nivel I

Nivel II

Resuelve gráficamente inecuaciones del tipo $a \cdot x + b < c$ (con $a \neq 0$) a partir del análisis del gráfico de la función $f(x) = a \cdot x + b$, en problemas en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, a partir del problema:

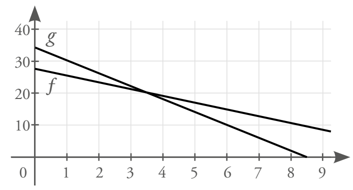
> La fórmula $f(x) = -2x + 27$ permite calcular la temperatura de una sustancia en función del tiempo (medido en minutos) que transcurre desde que comenzó un experimento. A continuación se presenta el gráfico de la función.
>
> 
>
>
> ¿En qué intervalo la temperatura de la sustancia fue mayor a 20 °C?

El alumno estima que el punto (3,5 ; 20) pertenece al gráfico de la función y lo verifica realizando la cuenta $-2 \cdot 3{,}5 + 27 = 20$. Luego afirma que el intervalo en el que la temperatura de la sustancia fue mayor a 20 °C es desde 0 hasta 3 minutos y medio, porque las imágenes de esos valores a través de la función f son mayores que 20. Esto sucede porque la función f es decreciente, por lo que ese tramo del gráfico está por encima de la recta $y = 20$.

Nivel III

Resuelve gráficamente inecuaciones del tipo $a \cdot x + b < c \cdot x + d$ (donde $f(x) = a \cdot x + b$ y $g(x) = c \cdot x + d$), en problemas en contextos extramatemáticos.

Por ejemplo, a partir del problema:

> Las fórmulas $f(x) = -2x + 27$ y $g(x) = -4x + 34$ permiten calcular la temperatura de dos sustancias, A y B (respectivamente), en función del tiempo (medido en minutos) que transcurre desde que comenzó un experimento. A continuación se presenta el gráfico de ambas funciones.
>
> 
>
>
> ¿En qué intervalo la temperatura de la sustancia B fue mayor que la temperatura de la sustancia A?

El alumno estima que el punto (3,5 ; 20) pertenece al gráfico de ambas funciones y lo verifica realizando las cuentas:

$$-2 \cdot 3{,}5 + 27 = 20$$

$$-4 \cdot 3{,}5 + 34 = 20$$

Luego afirma que el intervalo en el que la temperatura de la sustancia B fue mayor que la de la sustancia A es desde 0 hasta 3 minutos y medio, porque las imágenes de esos valores a través de la función g son mayores que las imágenes de esos valores a través de la función f. Esto sucede porque en ese tramo el gráfico de la función g está por encima del gráfico de la función f.

Actividades para relevar los aprendizajes

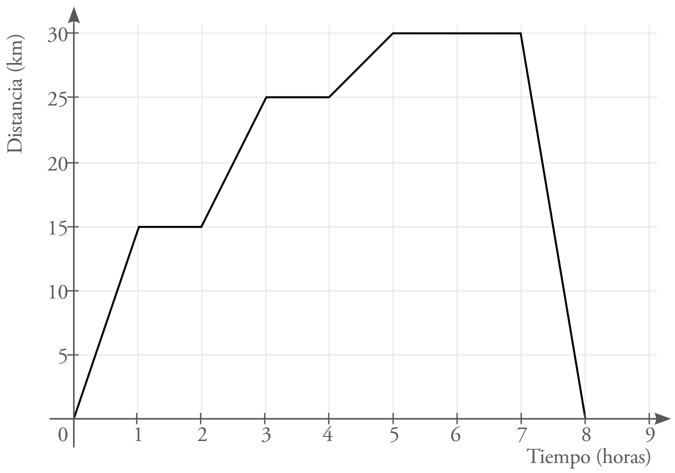
Como se señaló en la introducción de este documento, se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos de los estudiantes en relación con el eje Funciones y álgebra.

Aproximación a las funciones a través de gráficos cartesianos

Situación 1. Lectura de información que se encuentra en gráficos

A partir de esta situación se intenta evaluar si el estudiante puede interpretar la información que brinda un gráfico y traducirla en términos del contexto planteado.

Lautaro hace el reparto para una mueblería. El siguiente gráfico muestra a qué distancia se encontraba de la mueblería durante el tiempo que duró el reparto.



a) ¿A qué distancia de la mueblería se encontraba Lautaro a la hora de haber salido?

b) ¿Cuántas veces estuvo parado? ¿Durante cuánto tiempo?

c) ¿Cuándo se movió a mayor velocidad?

d) ¿Qué distancia recorrió en total?

e) Explicá cómo pensaste la respuesta a cada una de las preguntas.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Identifica al punto (1;15) marcándolo en el gráfico o escribiendo sus coordenadas, pero sin dar la respuesta al problema.

» Identifica al punto (1;15) y reconoce que su segunda coordenada representa la distancia a la mueblería. En este caso, el alumno puede interpretar ambas coordenadas en función del contexto del problema.

Para el ítem b) se puede observar si:

» Considera que estuvo parado al iniciar y terminar el recorrido. Esta respuesta supone una interpretación del contexto, pero no se basa en la información dada por el gráfico.

» Afirma que estuvo parado 3 veces, aunque no indica durante cuánto tiempo. El alumno, en este caso, logra identificar los tramos horizontales del gráfico con los momentos en los que no varió la distancia a la mueblería.

» Responde que estuvo parado 3 veces, durante 4 horas en total. También puede indicar cuánto tiempo estuvo detenido en cada tramo, sin sumarlos. Estas respuestas incluyen una interpretación de los valores de la variable independiente como representantes del tiempo transcurrido. El alumno halla los intervalos de valores para x correspondientes a cada uno de los segmentos horizontales del gráfico y determina las duraciones, para luego sumarlas.

Para el ítem c) se puede observar si:

» Responde que no es posible saber la velocidad porque el gráfico representa la distancia a la mueblería.

» Calcula las velocidades de alguno de los tramos, aunque no las expresa como tales. Por ejemplo, puede decir que durante la primera hora recorrió 15 km, que durante la hora 2 y la 3 recorrió 10 km. Es posible que no considere el tramo entre las horas 7 y 8 por ser decreciente.

» Compara visualmente las pendientes de los segmentos donde la función es creciente y afirma que la mayor velocidad fue durante la primera hora. En este caso, el alumno reconoce que la velocidad es la pendiente de cada segmento y no necesita hacer los cálculos para determinar cuál es mayor. Esto es posible cuando la diferencia es lo suficientemente grande como para visualizarla. En cambio, no identifica el segmento decreciente como una posibilidad.

- Calcula las velocidades o compara visualmente las pendientes de los 4 segmentos donde la función no es constante y afirma que la mayor velocidad fue durante la hora 7 y la 8. En este caso, el alumno reconoce que la velocidad puede ser positiva o negativa, según si el vehículo se aleja o se acerca a la mueblería.

Para el ítem d) se puede observar si:

- Calcula la distancia recorrida en cada tramo, sin considerar el camino de regreso. Por ejemplo, calcula $15 + 10 + 5 = 30$ y responde que recorrió 30 km. En este caso, el alumno no reconoce que la suma de las distancias parciales se corresponde con la distancia máxima recorrida.
- Considera que la distancia recorrida corresponde a la máxima distancia, 30 km. Si bien se trata de una respuesta incorrecta, el alumno identifica a partir del gráfico que el vehículo alcanzó una distancia máxima respecto de la mueblería de 30 km, aunque no considera la distancia recorrida en el trayecto de vuelta.
- Calcula la distancia recorrida en cada tramo, incluido el camino de regreso. Por ejemplo, calcula $15 + 10 + 5 + 30 = 60$ y responde que recorrió 60 km.
- Considera que la distancia recorrida corresponde al doble de la máxima distancia, $2 \cdot 30$ km = 60 km. El alumno identifica a partir del gráfico que el vehículo alcanzó una distancia máxima, respecto de la mueblería, de 30 km, y que volvió a recorrer esa distancia al volver.

  Si bien tanto esta solución como la anterior son correctas, la última muestra un dominio del contenido más sofisticado. Se trata de un estudiante que puede leer directamente la distancia recorrida a la ida y a la vuelta, reconociendo, además, que son iguales.

Situación 2. Relación entre tablas de valores y gráficos cartesianos

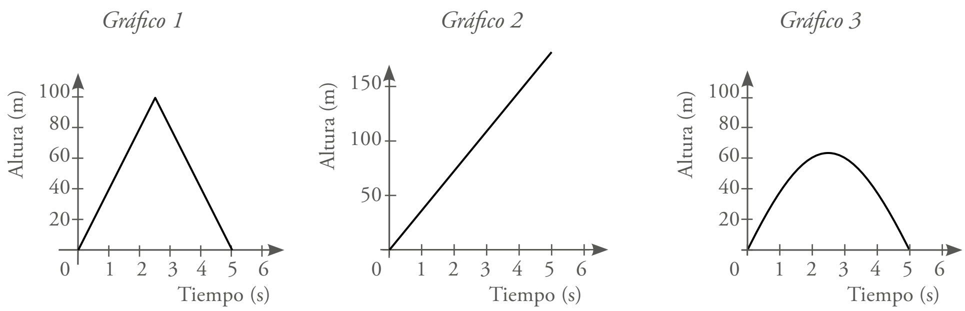
El siguiente problema requiere poner en relación el contexto del problema con la información dada a partir de una tabla de valores, y la coordinación de esas relaciones para elegir el gráfico que las representa.

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba. La altura de la pelota (h, en metros) en función del tiempo (t, en segundos) desde que se lanza hasta que toca el piso responde a la fórmula $h = 10t\,(5 - t)$.

En la siguiente tabla se muestran algunos valores del tiempo y las alturas correspondientes:

$t\,(s)$	0	1	2
$h\,(m)$	0	40	60

Determiná cuál de los siguientes gráficos puede representar la altura de la pelota en función del tiempo. Explicá cómo lo pensaste.



Para el estudiante que selecciona el Gráfico 1 puede observarse si:

» Verifica que el gráfico contiene a los dos primeros puntos de la tabla y no corrobora que contenga al tercer punto. A pesar del error, el alumno puede interpretar los datos dados como coordenadas de puntos en el gráfico. Luego utiliza el contexto para decidir que la pelota sube hasta alcanzar su altura máxima y luego desciende de la misma manera. Como el gráfico tiene dos tramos de variación uniforme, es posible que el alumno explicite que, mientras la pelota sube, a más tiempo, mayor es la altura y, cuando baja, a más tiempo, menor es la altura.

Para el estudiante que selecciona el Gráfico 2 puede observarse si:

» Verifica que el gráfico contiene a los dos primeros puntos de la tabla y no corrobora que contenga al tercer punto. A pesar del error, el alumno puede interpretar los datos dados como coordenadas de puntos en el gráfico. Sin embargo, es posible que esté considerando el gráfico de la distancia recorrida y no el de la altura: la distancia siempre crece en este contexto, mientras que la altura no. También supone que la altura varía de manera proporcional al tiempo, lo cual no es correcto. Los puntos de la tabla sirven para refutar esa suposición: entre $t = 0$ y $t = 1$, la altura aumenta 40 m, mientras que entre $t = 1$ y $t = 2$, aumenta 20 m. Como en la misma cantidad de tiempo la altura no aumenta lo mismo, entonces no se trata de una relación de proporcionalidad.

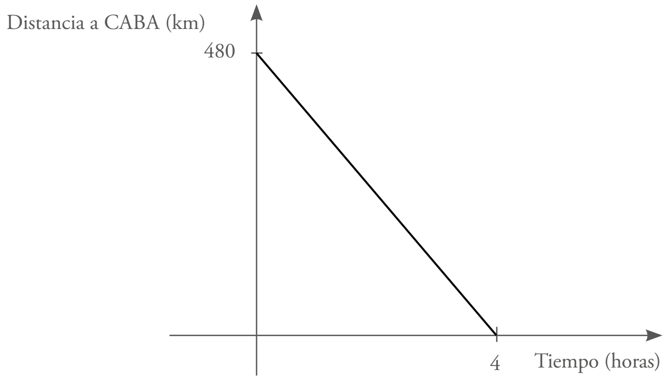
Para el estudiante que selecciona el Gráfico 3 puede observarse si:

» Verifica que el gráfico contiene a los 3 puntos de la tabla. A partir del análisis del contexto, la fórmula o la variación de los puntos, concluye que la relación entre la altura y el tiempo no es de proporcionalidad, por lo que el gráfico no puede estar formado por segmentos de recta.

Situación 1. Análisis y producción de gráficos de variación uniforme en situaciones extramatemáticas

El siguiente problema permite evaluar el modo en que el estudiante utiliza la información que brinda el gráfico, pudiendo tratarse de estimaciones a partir del análisis del dibujo o por medio de la utilización de cálculos y/o fórmulas para hallar los valores exactos.

Ramiro viaja en auto desde Federación, Entre Ríos, hacia la Ciudad de Buenos Aires. El siguiente gráfico muestra la distancia a la que se encuentra Ramiro de la Ciudad de Buenos Aires desde el momento en que inició su viaje.



a) Determiná a qué distancia de la Ciudad de Buenos Aires estaba Ramiro a las 3 horas de haber salido de Federación.

b) Facundo sale en auto desde Federación hacia a Buenos Aires en el mismo momento que Ramiro, pero viaja a menor velocidad. Hacé un gráfico posible que represente la distancia a la que se encuentra Facundo de la Ciudad de Buenos Aires desde el momento en que inició su viaje.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Responde de manera aproximada a partir de construir una escala en cada uno de los ejes.

» Halla la pendiente de la recta o su valor absoluto, ya sea a través del cociente $\frac{480}{4} = 120$ o $-\frac{480}{4} = -120$ para luego determinar la distancia como el resultado de $480 - 3 \cdot 120 = 120$ km. También es posible que, a partir del valor de la velocidad hallado, escriba la fórmula de la función, $f(x) = 480 - 120x$ para luego calcular la imagen de 3. En este caso, el alumno pone en juego sus conocimientos sobre función lineal y su pendiente.

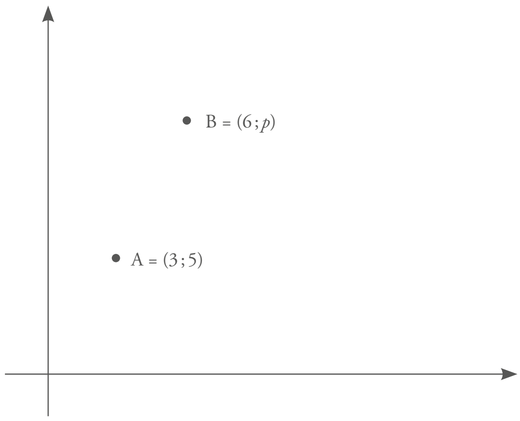
Para el ítem b) se puede observar si el estudiante:

- Le asigna a la velocidad un valor menor que 120 y grafica la función lineal correspondiente, sin tener en cuenta que la ordenada al origen tiene que ser 480.
- Le asigna a la velocidad un valor menor que 120, construye la fórmula de la función teniendo en cuenta que la ordenada al origen tiene que ser 480 y realiza la gráfica.
- Tiene en cuenta que la ordenada al origen tiene que ser 480 y que la intersección del gráfico con el eje x debe ser un valor cualquiera mayor que 4. Se basa en el hecho de que si la velocidad es menor, entonces tardará más tiempo en recorrer la misma distancia. Esta resolución muestra que el estudiante interpreta que no es necesario asignar un valor a la velocidad y que no hay una única respuesta posible.

Situación 2. Interpretación del significado de los valores de los parámetros de la fórmula de una función lineal

El problema que se propone a continuación tiene por objetivo que se ponga en juego la noción de pendiente como la variación de los valores de la variable dependiente por cada unidad que aumenta la variable independiente.

Los dos puntos que se muestran en el gráfico siguiente pertenecen a una recta de pendiente 2.

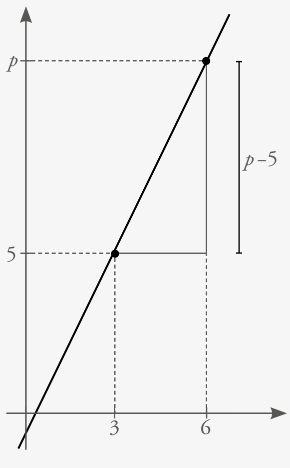


Hallá el valor de p, mostrando cómo pensaste.

Para este problema se puede observar si el estudiante:

» Intenta establecer una escala en el eje y a partir de la ubicación del 5 y dividiendo el intervalo entre 0 y 5 en cinco partes iguales. De esa manera, podrá hallar aproximadamente el valor de p. Esta resolución no pone en juego el concepto de función lineal ni el de pendiente.

» Grafica la recta y determina un triángulo rectángulo usando los dos puntos dados:



A partir de allí, escribe la fórmula de la pendiente para hallar el valor de p: $\frac{p-5}{3} = 2$. Resolviendo la ecuación, obtiene que $p = 11$.

Esta resolución marca un avance respecto de la anterior, debido a que utiliza la ecuación de la recta y su pendiente, además de tratarse de una estrategia que permite obtener el valor exacto de p. Se basa en una fórmula para calcular la pendiente aunque no en su sentido de variación de y por cada unidad que aumenta x.

» Reconoce que si la pendiente de la recta es 2, entonces el valor de y aumenta 2 unidades por cada unidad que aumenta x. El valor de la abscisa del punto B es 3 unidades más que la del punto A, por lo tanto, para pasar de 5 al valor de p es necesario aumentar 3 veces 2 unidades. Es decir que $p = 5 + 3 \cdot 2 = 11$.

Situación 1. Determinar si un valor es o no solución de una ecuación

El siguiente problema tiene el propósito de poner en juego que un valor de la variable es solución de una ecuación si, al reemplazarlo, se obtiene una igualdad verdadera. Si la igualdad es falsa, entonces no es solución de la ecuación.

Indicá cuál o cuáles de los siguientes valores son solución de la ecuación

$$x^3 - \frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$$

Explicá cómo te diste cuenta.

a) 1

b) -1

c) $\frac{1}{2}$

d) 0

Se puede observar si el estudiante:

- » Intenta resolver la ecuación algebraicamente para obtener alguna solución. Quienes usan esta estrategia generalmente consideran que solo es posible obtener las soluciones de una ecuación si se la resuelve a través de despejes o aplicando la propiedad uniforme.

  Como esta ecuación no resulta simple de resolver, es esperable que cometan errores algebraicos. Sin embargo pueden llegar a obtener alguna de las soluciones a partir de una resolución errónea.

- » Intenta resolver la ecuación algebraicamente de manera correcta y, frente a la imposibilidad de hallar una solución, no continúa. Por ejemplo, algunos alumnos pueden hacer:

$$x^3 - \frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$$

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{x}{2} = 0$$

$$x^3 - x = 0$$

  Esta resolución marca un avance respecto de la anterior porque, por un lado, no hay errores en los pasos desarrollados. Por el otro, la no continuidad de la resolución muestra un reconocimiento de aquello que se desconoce.

- » Sustituye los valores propuestos, hace los cálculos –correcta o incorrectamente– y selecciona como solución aquellos que hacen que la expresión se convierta en una igualdad verdadera. En este caso, el alumno puede reconocer si un valor es solución de una ecuación sin necesidad de resolverla. Esto implica un conocimiento más avanzado acerca de qué es una solución.

Situación 2. Problemas que implican la resolución de inecuaciones lineales

El problema propuesto no admite una única respuesta, ya que una u otra empresa resultará más conveniente según los kilómetros que se necesiten recorrer. Su resolución requiere de la construcción de dos fórmulas, para luego graficarlas y compararlas.

> Una empresa de ventas por internet hace los envíos al interior con dos empresas de transportes diferentes. La empresa El Veloz cobra $3,5 por kilómetro más un seguro adicional fijo de $250. La empresa De la Cruz, ofrece un servicio por $4,5 por kilómetro más un seguro adicional fijo de $120.
>
> ¿Qué empresa le conviene elegir para hacer un envío? Justificá tu respuesta.

Se puede observar si el estudiante:

» Prueba con distintos valores para la distancia y calcula los precios. Luego da respuestas puntuales, del estilo: si la distancia es de 100 km, conviene la empresa De la Cruz; si la distancia es de 200 km, conviene la empresa El Veloz.

» Realiza ensayos controlados, ajustando los valores de prueba en función de los precios obtenidos. Por ejemplo:

Kilómetros	El Veloz	De la Cruz	Conviene…
100	600	570	De la Cruz
150	775	795	El Veloz
140	740	750	El Veloz
130	705	705	Es lo mismo
10	285	165	De la Cruz
300	1300	1470	El Veloz

En este ejemplo, el alumno comprueba que cambia la empresa que conviene, luego halla la cantidad de kilómetros para la que los precios coinciden y prueba con algunos valores “lejanos” para verificar su hipótesis.

» Produce dos fórmulas para representar el precio de cada empresa en función de los kilómetros recorridos, pero no continúa por no saber qué hacer con ellas. Esta resolución resulta interesante y muestra la dificultad que plantea el problema. No implica resolver una ecuación ni una inecuación, sino describir en qué casos los precios coinciden y cuándo uno es menor que otro.

- Produce dos fórmulas correctas para representar el precio de cada empresa en función de los kilómetros recorridos, las grafica pero no logra interpretar la información que brinda el gráfico.
- Produce dos fórmulas correctas para representar el precio de cada empresa en función de los kilómetros recorridos, las grafica y logra interpretar la información que brinda el gráfico para dar la respuesta correcta.

La tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las funciones

La introducción de la tecnología ha afectado tanto a la matemática académica como a la escolar. Su uso en el ámbito académico cambió la naturaleza de muchos de los problemas y de las resoluciones posibles que ya eran parte de la disciplina, así como introdujo nuevos problemas y resolvió otros. El conjunto de problemas escolares y las estrategias didácticas también se han modificado.

En la actualidad se dispone de una amplia variedad de programas graficadores y de otros que realizan manipulaciones algebraicas. Algunos, además de realizarlas, muestran cada paso de la resolución, explicitando las propiedades puestas en juego. Muchos de estos programas están disponibles para teléfonos celulares, lo que hace que su uso resulte accesible. El desafío para la enseñanza es decidir cómo utilizar estas herramientas para potenciar los aprendizajes de los alumnos.

Aunque no se desarrollará una progresión para el uso de tecnología, se mostrará, a continuación, un ejemplo del uso que se le podría dar en la escuela.

> La fórmula de la función f es $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. La gráfica de la función g es una recta que pasa por los puntos $A = \left(\frac{1}{2}; 0\right)$ y $B = \left(-1; \frac{3}{4}\right)$. Hallá todos los valores de x para los que se cumple que $f(x) > g(x)$.

Este problema, que implica la resolución de una inecuación, está planteado en un marco funcional. A pesar de eso, es posible elaborar estrategias de resolución en otros marcos.

Ingresando la fórmula de la función f en la barra de entrada de GeoGebra se obtiene su representación gráfica. A su vez, luego de ingresar los puntos A y B, el programa permite graficar la función g.

Gráfico 1

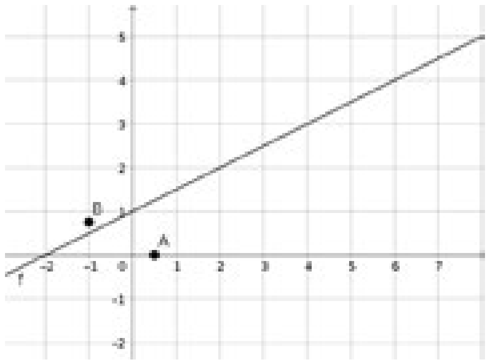
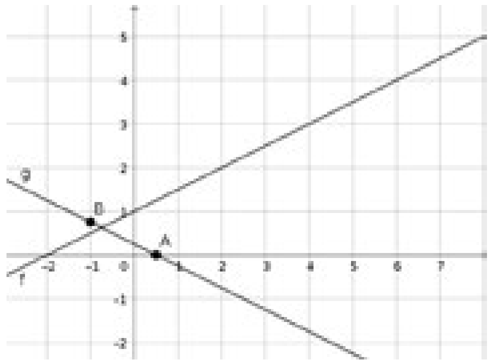
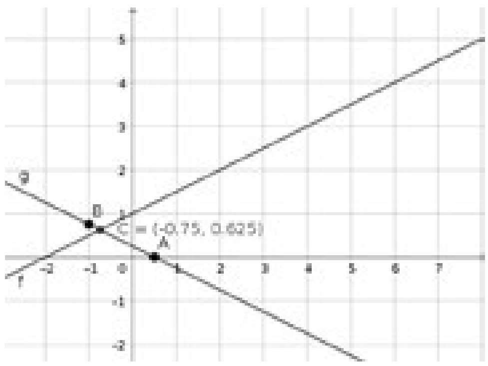


Gráfico 2



Con el mismo programa se puede hallar el punto de intersección entre las gráficas, que es donde cambia la posición relativa entre las rectas:

Gráfico 3



En este caso, la primera coordenada del punto de intersección es un número decimal finito y de pocas cifras, lo que hace que pueda leerse su valor exacto. Para hallar la solución, los estudiantes deben poner en juego que cuando $f(x) > g(x)$, la gráfica de f está por encima de la gráfica de g. De esa manera, pueden determinar que la solución es el intervalo $(-0{,}75\ ;+\infty)$. Resulta interesante notar que esta resolución no requiere hallar la fórmula de la función g.

Pero podría suceder también que la primera coordenada del punto de intersección no fuese un número que pueda leerse completo de la pantalla. En ese caso podría encontrarse su valor exacto resolviendo una ecuación y usando el gráfico para decidir cuál es el conjunto solución, o bien resolviendo una inecuación. En ambos casos se requiere de la fórmula de la función g.

Por medio de la resolución de una ecuación:

$$\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Para $x = -\frac{3}{4}$, las gráficas de f y g coinciden. Como la gráfica de f está por encima de la de g para valores de x mayores que $-\frac{3}{4}$, entonces la solución es $x > -\frac{3}{4}$.

Por medio de la resolución de una inecuación:

$$\frac{1}{2}x + 1 > -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$x > -\frac{3}{4}$$

La resolución de la inecuación permite hallar el conjunto solución sin apoyarse en el marco funcional utilizando los gráficos de las funciones.

La posibilidad de resolver un mismo problema en más de un registro (gráfico y algebraico) posibilita el control del sentido de lo que se hace, al mismo tiempo que amplía la mirada sobre ese objeto matemático. Bajo esta consideración, cabe aclarar que no es por la posibilidad de visualizar que se propone el uso de tecnología. La tarea que se propone requiere mucho más que la percepción. La interpretación de las imágenes se apoya en la utilización de conocimientos matemáticos. Y es tarea de la enseñanza trabajar sobre cómo coordinar aquello que se ve con aquello que se sabe.

Geometría y medida

El eje Geometría y medida es un campo apropiado para que los estudiantes ingresen en el terreno de las argumentaciones deductivas. Para ello se propone un trabajo en torno a construcciones, muchas de las cuales se apoyan en el uso de circunferencias entendidas como el conjunto de puntos que equidistan de otro. Esta definición da sentido a construcciones que, en ocasiones, se hacen de manera mecánica. Por otra parte, las construcciones serán también la base para elaborar criterios de congruencia y de semejanza de triángulos. Se busca que las actividades impliquen la puesta en juego de propiedades, tanto para anticipar y establecer la necesidad de ciertos resultados, como también para elaborar nuevas propiedades, relaciones y conceptos.

Los problemas de estudio y comparación de áreas de figuras tienen la particularidad de poder ser considerados desde un marco algebraico, que se ha incluido en las progresiones para el eje Números y álgebra, y desde el geométrico. En un caso se trata de producir fórmulas, transformarlas y leer la información que portan, mientras que en el otro se requiere poner en juego propiedades de las figuras en cuestión. Resulta importante que los alumnos puedan trabajar desde ambos marcos para enriquecer sus conocimientos. Por consiguiente, se espera que en el aula el trabajo se presente de manera articulada.

Por último, cabe señalar que el teorema de Pitágoras es considerado aquí como una herramienta de modelización para problemas que involucran hallar medidas de lados en triángulos rectángulos.

Los subejes que se han considerado para estas progresiones son los siguientes:

- Construcción, congruencia y semejanza de triángulos
- Construcción y congruencia de cuadriláteros
- Áreas de triángulos y cuadriláteros
- Ángulos entre paralelas
- Teorema de Pitágoras

Construcción, congruencia y semejanza de triángulos

Las primeras construcciones que se proponen suponen la puesta en juego de la definición de circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de otro, requisito necesario para entenderlas y justificarlas.

Es a partir de las construcciones que se sugiere desarrollar criterios de congruencia de triángulos. Se trata de relacionar los datos dados con la cantidad de soluciones posibles. En aquellos casos en que el conjunto de datos solo permitan construir un triángulo, se tratará de un criterio. Es decir, si por ejemplo, luego del trabajo con diversos problemas se concluye que con las medidas de 3 lados es posible construir un único triángulo, entonces dos triángulos que comparten las medidas de sus lados necesariamente tienen que ser congruentes. De manera análoga, las construcciones también serán el medio para elaborar criterios de semejanza de triángulos.

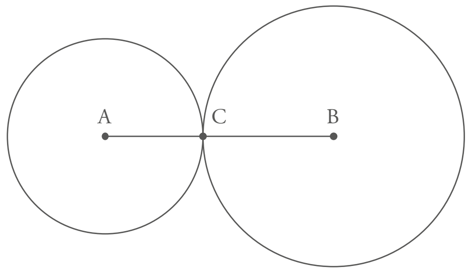
Construcción, congruencia y semejanza de triángulos

Transición entre primaria y secundaria	Ciclo Básico – Nivel I
Usa las nociones de radio, diámetro y centro de la circunferencia para encontrar puntos que equidistan de otros. Encuentra puntos que cumplen dos condiciones: estar a una distancia de un punto y al mismo tiempo a una distancia de otro punto. Resuelve problemas que implican reconocer que los lados de un triángulo son radios de circunferencias. Resuelve problemas que implican poner en juego la desigualdad triangular.	Establece la posibilidad de construcción de un triángulo dadas las medidas de dos o tres de sus elementos, utilizando la noción de circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de otro y/o la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Por ejemplo, a partir del problema:

> ¿Es posible construir un triángulo con estos datos? Si creés que sí, construilo. Si creés que no, explicá por qué.
>
> $|\overline{AB}| = 7$ cm, $|\overline{BC}| = 4$ cm y $|\overline{AC}| = 3$ cm

El alumno determina que la construcción no es posible porque la intersección entre las circunferencias está sobre el segmento y, por lo tanto, el punto C está alineado con A y con B.



O bien, a partir de la situación:

> ¿Es posible construir un triángulo con estos datos? Si creés que sí, construilo. Si creés que no, explicá por qué.
>
> $|\hat{P}| = 50°$, $|\hat{Q}| = 30°$ y $|\hat{R}| = 80°$

El alumno determina que no es posible la construcción porque la suma de la medida de los tres ángulos no es 180°.

- Análisis de la posibilidad de construcción de un triángulo a partir de un conjunto de datos
- Análisis de la cantidad de triángulos diferentes que se pueden construir a partir de un conjunto de datos
- Desigualdad triangular
- Suma de ángulos interiores de un triángulo
- Criterios de congruencia de triángulos

Ciclo Básico

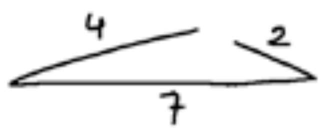
Nivel II	Nivel III
Establece y fundamenta la posibilidad de construcción de un triángulo dadas las medidas de los tres lados, utilizando la desigualdad triangular.	Establece el rango de medidas que puede tener el lado de un triángulo a partir de la medida de sus otros dos lados, utilizando la desigualdad triangular.

Nivel II

Por ejemplo, a partir del problema:

> Sin usar regla ni compás, indicá si es posible construir un triángulo con estos datos. Fundamentá tu respuesta.
>
> $|\overline{AB}| = 7$ cm, $|\overline{BC}| = 4$ cm y $|\overline{AC}| = 2$ cm

El alumno establece que la construcción no es posible porque en todo triángulo la suma de la medida de dos de sus lados es mayor que la medida del lado restante. Podría acompañar su fundamentación con un dibujo a mano alzada como el siguiente, argumentando que el triángulo "no se llega a cerrar, aunque bajes los lados".



Nivel III

Por ejemplo, a partir del problema:

> Alejandro construyó la figura que se describe en el siguiente instructivo:
>
> » Trazá un segmento AB de 7 cm de longitud. Con centro en A, trazá una circunferencia de 6 cm de radio.
>
> » Marcá sobre la circunferencia un punto C que no se encuentre alineado con los puntos A y B.
>
> » Dibujá un triángulo con vértices en A, B y C.
>
> Indicá, sin medir, cuál es la longitud que puede tener cada uno de los lados del triángulo construido por Alejandro.

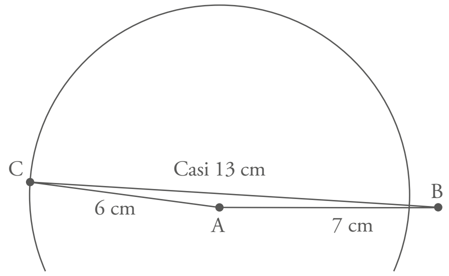
El ejemplo continúa en página 121.

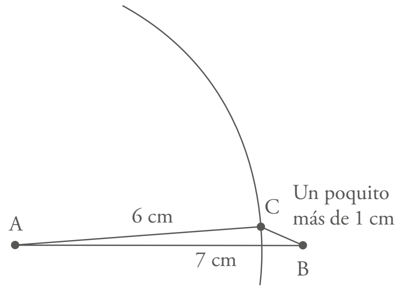
Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico* Nivel I

Continúa el ejemplo de página 119.

El alumno indica que las medidas de los lados AB y AC van a ser siempre 7 cm y 6 cm, respectivamente. La primera porque es el dato que se da para construir el segmento y la segunda porque el lado AC es siempre el radio de la circunferencia. Con respecto al lado BC, apela a la desigualdad triangular para indicar que su medida debe ser menor que 13 cm, ya que debe ser menor que la suma de los otros dos lados. A su vez, establece que debe ser mayor que 1 cm, porque también debe ser mayor que la resta de los otros dos lados.

Podría realizar su fundamentación con apoyo en distintas construcciones.





Construye triángulos a partir de diferentes informaciones.	

Nivel II

Determina y fundamenta la unicidad de construcciones de triángulos dadas las medidas de dos o tres de sus elementos, realizando y analizando una o varias construcciones.

Por ejemplo, a partir del problema:

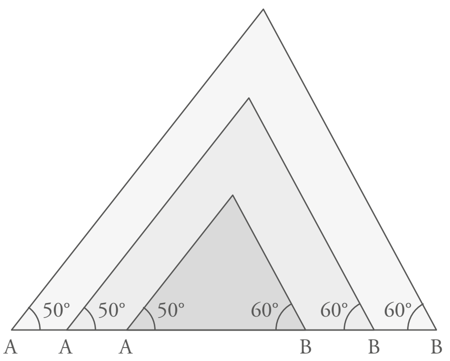
¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir con estos datos?

$$|\hat{A}| = 50°, \ |\hat{B}| = 60°$$

¿Y si se agrega el dato de que

$$|\overline{AB}| = 7 \text{ cm}?$$

El alumno establece que se pueden construir infinitos triángulos distintos, porque los puntos A y B, que son los vértices de los ángulos dados y del triángulo, se pueden construir a cualquier distancia uno del otro. En cambio, si se agrega el dato de que el lado AB mide 6 cm, solamente se puede construir uno.



Nivel III

Determina y fundamenta la unicidad de construcciones de triángulos dados tres de sus elementos de los que no se conoce la medida, realizando y analizando una o varias construcciones.

Por ejemplo, al resolver este problema:

En cada caso, determiná si se puede construir un único triángulo con los datos ofrecidos.

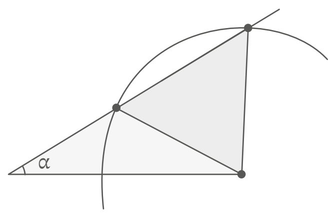
a) La medida de los tres lados.

b) La medida de dos lados y un ángulo que no es el comprendido entre ellos.

c) La medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

d) La medida de los tres ángulos.

El alumno fundamenta que en el caso del ítem b) la construcción no es única exhibiendo dos construcciones particulares que cumplen con las condiciones descritas. Construye dos triángulos que comparten uno de sus ángulos y uno de sus lados y que tienen otro lado de igual medida (por ejemplo, a partir del radio de una circunferencia), pero que no tienen la misma medida del lado y de los ángulos restantes.



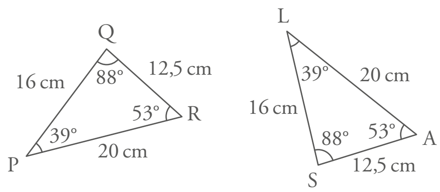
El ejemplo continúa en página 125.

Realiza construcciones de triángulos, analizando si es posible realizar o no la construcción, si es única o si se pueden construir diferentes triángulos.

Determina si dos triángulos son congruentes apoyándose en las medidas de sus elementos.

Por ejemplo, a partir del problema:

¿Es verdad que los triángulos PQR y SLA son congruentes[10]? ¿Por qué?

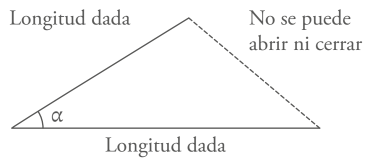


El estudiante afirma que, a pesar de que difieren en su "posición", los dos triángulos son congruentes porque la medida de sus lados y de sus ángulos es la misma. Es decir que si se rota, refleja y traslada el triángulo SLA se puede hacer coincidir el punto S con el punto Q, el punto L con el P y el A con el R formando "el mismo" triángulo.

[10] Se advierte que en el desarrollo del documento algunas de las medidas de los elementos de las figuras se expresan redondeadas a fin de concentrar la atención en los aspectos del contenido que se busca analizar.

Continúa el ejemplo de página 123.

En el ítem c) determina que la construcción es única analizando una figura de análisis. Por ejemplo, construye un ejemplo genérico con dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de medidas arbitrarias. Luego establece que el tercer lado queda determinado por los extremos de los segmentos construidos, por lo que su medida también queda determinada, ya que la amplitud entre ellos está determinada y "no se puede ni abrir ni cerrar".

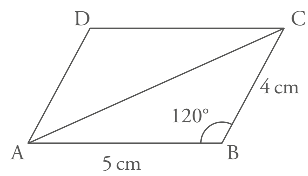


Nivel II

Determina si dos triángulos son congruentes sobre la base de los criterios de congruencia apoyándose en las medidas de algunos de sus elementos.

Por ejemplo, a partir del problema:

En la figura, ABCD es un paralelogramo. ¿Es cierto que los triángulos ABC y ADC son congruentes? ¿Cómo lo podés fundamentar?



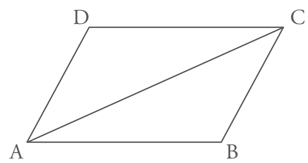
El estudiante primero completa la medida de los segmentos AD y DC y del ángulo D sobre la base de que se trata de un paralelogramo, y luego fundamenta que los dos triángulos son congruentes porque tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de la misma medida.

Nivel III

Determina si dos triángulos son congruentes sobre la base de los criterios de congruencia sin apelar a las medidas de sus elementos.

Por ejemplo, a partir del problema:

En la figura, ABCD es un paralelogramo. ¿Es cierto que los triángulos ABC y ADC son congruentes? ¿Cómo lo podés fundamentar?

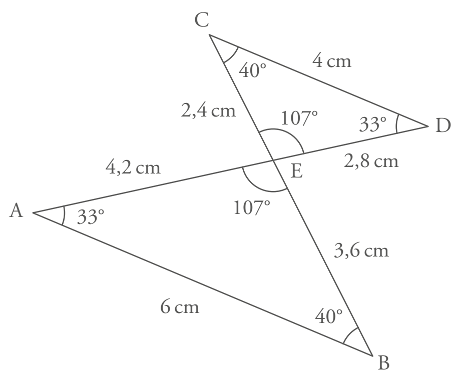


El estudiante establece que el lado AB es congruente al lado DC y el lado AD es congruente a BC porque son lados opuestos de un paralelogramo y que el ángulo D es congruente al ángulo B por ser ángulos opuestos de un paralelogramo. Luego, fundamenta que los dos triángulos son congruentes porque tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos congruentes.

Determina si dos triángulos son semejantes comparando las medidas de todos los ángulos y de todos los lados, estableciendo la correspondencia entre sus vértices y sus lados.

Por ejemplo, a partir del problema:

¿Es cierto que los triángulos AEB y DEC son semejantes?



En primer lugar el alumno establece correspondencias entre los elementos de ambos triángulos para analizar si son semejantes. Como el ángulo A es congruente al ángulo D y el ángulo AEB es congruente al ángulo DEC, el lado AE se corresponde con el lado DE. De manera análoga establece la correspondencia entre los lados BE y CE y entre los lados AB y DC. Luego verifica que la razón entre los lados correspondiente sea la misma:

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{DE}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{CE}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DC}|}$$

$$\frac{4,2}{2,8} = \frac{3,6}{2,4} = \frac{6}{4} = 1,5$$

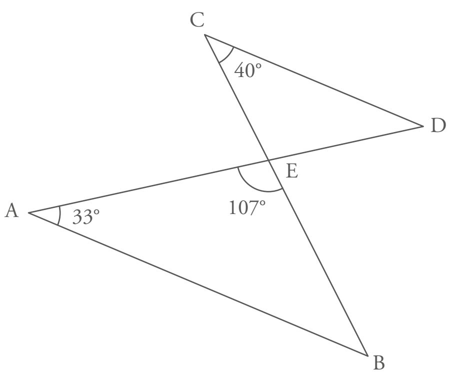
Por último establece que ambos triángulos son semejantes porque tienen la misma medida de sus ángulos y la misma razón entre sus lados.

Ciclo Básico	
Nivel II	**Nivel III**

Determina si dos triángulos son semejantes sobre la base de los criterios de semejanza apoyándose en las medidas de algunos de sus elementos.

Por ejemplo, a partir del problema:

¿Es cierto que los triángulos AEB y DEC son semejantes?



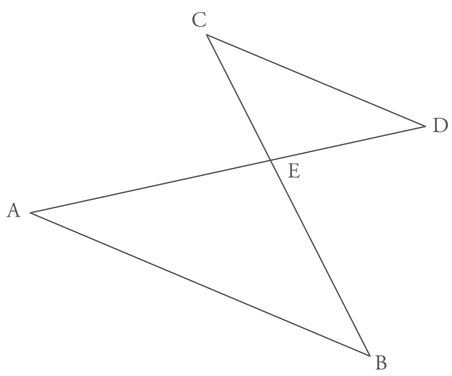
El alumno primero completa la medida de los ángulos DEC (107°) y B (40°) utilizando las propiedades de los ángulos opuestos por el vértice y de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, respectivamente. Luego fundamenta que los dos triángulos son semejantes porque poseen la misma medida de dos de sus ángulos, reconociendo que este hecho es suficiente para que la medida del tercer ángulo también sea la misma y, por consiguiente, ambos triángulos sean semejantes.

El ejemplo continúa en página 129.

Determina si dos triángulos son semejantes sobre la base de los criterios de semejanza sin apelar a las medidas de sus elementos.

Por ejemplo, a partir del problema:

En la figura, los segmentos AB y CD son paralelos. ¿Es cierto que los triángulos AEB y DEC son semejantes?



El alumno establece que el ángulo AEB es congruente al ángulo DEC porque son opuestos por el vértice y que los ángulos A y D también son congruentes porque son ángulos alternos internos entre paralelas. Luego fundamenta que los dos triángulos son semejantes porque poseen la misma medida de dos de sus ángulos, reconociendo que este hecho es suficiente para que la medida del tercer ángulo también sea la misma y, por consiguiente, ambos triángulos sean semejantes.

El ejemplo continúa en página 129.

Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico*
	Nivel I

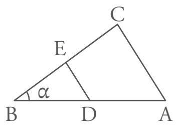
Ciclo Básico

Nivel II

Continúa el ejemplo de página 127.

O bien, para resolver el problema:

Hallá la medida de todos los lados del triángulo BED.



$|\hat{\alpha}| = 35°$

$|\overline{BA}| = 12$ cm

$|\overline{BC}| = 10$ cm

$|\overline{CA}| = 7$ cm

D es punto medio de $\overline{BA}$

E es punto medio de $\overline{BC}$

El alumno determina que el lado BD mide 6 cm, ya que como D es punto medio del segmento BA, su medida es la mitad que la de dicho segmento. De manera análoga determina que el lado BE mide 5 cm. Luego verifica que la razón entre dos de sus lados es la misma:

$$\frac{|BC|}{|BE|} = \frac{10}{5} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{|BA|}{|BD|} = \frac{12}{6} = 2\ ;$$

y que el ángulo comprendido entre ellos es congruente, ya que se trata del mismo ángulo.

Por último, para responder a la pregunta, determina que el lado ED mide 3,5 cm porque la razón entre su medida y 7 cm debe ser 2:

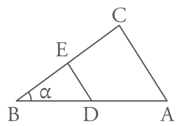
$$\frac{|CA|}{|ED|} = \frac{7}{3{,}5} = 2$$

Nivel III

Continúa el ejemplo de página 127.

O bien, para resolver el problema:

Indicá si es cierto que el lado ED mide de la mitad que el lado AC y explicá por qué.



D es punto medio de $\overline{BA}$

E es punto medio de $\overline{BC}$

El alumno determina que como D es punto medio del segmento BA y E es punto medio del segmento BC, la razón entre las medidas de los segmentos BA y BD es la misma que la que existe entre las medidas de los segmentos BC y BE, que es 2. Además, identifica que en ambos casos el ángulo comprendido entre ambos segmentos es el mismo, α.

Por último, responde que es cierto que el lado ED mide la mitad que el lado AC porque la razón entre sus medidas debe ser 2, ya que los triángulos son semejantes y esa es la razón que existe entre la medida de los otros lados.

Construcción y congruencia de cuadriláteros

El trabajo sobre cuadriláteros gira en torno a dos cuestiones: la construcción junto con el análisis de existencia y cantidad de soluciones, y la elaboración de criterios de congruencia. Los conocimientos referidos a construcción de triángulos serán una base sobre la que se apoyarán los criterios de congruencia para los cuadriláteros.

Construcción y congruencia de cuadriláteros

Transición entre primaria y secundaria

Construye cuadrados y rectángulos a partir de información sobre sus lados, trazando rectas y segmentos paralelos y/o perpendiculares.

Ciclo Básico

Nivel I

Construye paralelogramos, rombos y trapecios a partir de información sobre sus lados, trazando rectas y segmentos paralelos y/o perpendiculares.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

Construí un paralelogramo que tenga un lado de 6 cm y otro de 4 cm.

En el siguiente dibujo el segmento AB es el lado de un rombo. Completá la figura.

- Construcción de cuadrados, rectángulos, paralelogramos, rombos y trapecios
- Análisis de la cantidad de cuadriláteros diferentes que se pueden construir a partir de un conjunto de datos
- Criterios de congruencia de cuadriláteros

Ciclo Básico

Nivel II

Construye cuadrados, rectángulos, paralelogramos, rombos y trapecios a partir de información sobre sus lados, sus ángulos y/o sus diagonales, y da cuenta de las propiedades que moviliza.

Por ejemplo, a partir del problema:

> El segmento AB es una de las diagonales de un rectángulo. Usando regla y escuadra, dibujá el rectángulo y explicá cómo podés estar seguro de que es un rectángulo.

El alumno construye la otra diagonal de la misma medida haciendo que se intersequen en el punto medio de ambas y luego une sus extremos para dibujar el rectángulo. Argumenta que es un rectángulo porque en todo rectángulo las diagonales son congruentes y se intersecan en sus puntos medios.

También podría trazar una semirrecta cualquiera de manera que el punto A sea su origen (en cualquier dirección distinta del segmento AB), luego una recta perpendicular a ella que pase por el punto B, para completar el dibujo trazando las paralelas a ambas rectas que pasan por el punto A y el punto B, respectivamente. Explica que se trata de un rectángulo porque sus lados consecutivos son perpendiculares.

Nivel III

Establece la unicidad de construcciones de cuadrados, rectángulos, paralelogramos, rombos y trapecios a partir de información sobre sus lados, sus ángulos y/o sus diagonales.

Por ejemplo, a partir del problema:

> ¿Cuántos rectángulos se pueden construir de manera que el segmento AB sea una de sus diagonales? ¿Qué otra información se podría agregar para que la construcción sea única?

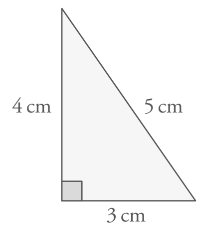
El alumno establece que se pueden construir infinitos rectángulos, ya que puede construirse la otra diagonal de la misma medida haciendo que se intersequen en el punto medio de ambas, pero con cualquier ángulo. Sobre la base de este argumento, determina que si se agrega la medida del ángulo que forman las diagonales la construcción sería única.

También podría afirmar que se pueden construir infinitos rectángulos porque se puede partir de construir cualquier semirrecta con origen en A (en cualquier dirección distinta del segmento AB), para luego construir una recta perpendicular a ella que pase por el punto B y completar el rectángulo trazando las rectas perpendiculares a las dos ya trazadas que pasen por A y B, respectivamente. Sobre la base de este argumento, podría determinar que si se agrega el ángulo (agudo) que forma la diagonal con uno de los lados la construcción sería única.

Construye cuadriláteros a partir de la composición de triángulos.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

Utilizando triángulos rectángulos iguales a este:



a) Construí un rombo.

b) Construí un rectángulo.

c) Construí un rectángulo cuyos lados midan 9 cm y 8 cm.

d) Construí un paralelogramo no rectángulo.

Ciclo Básico

Nivel II	Nivel III

Nivel II

Establece si es posible construir un cuadrilátero dadas algunas medidas de sus elementos. Para hacerlo se apoya en la factibilidad de la construcción de los triángulos que lo forman.

Por ejemplo, a partir del problema:

> Construí, si es posible, un rombo cuyas diagonales midan 6 y 10 cm, y sus lados 5 cm. Si no es posible, explicá por qué.

El estudiante determina que no se puede construir el rombo porque dos lados y una diagonal forman un triángulo y, en este caso, dos lados de 5 cm y una diagonal de 10 cm no pueden formar un triángulo porque no cumplen la desigualdad triangular.

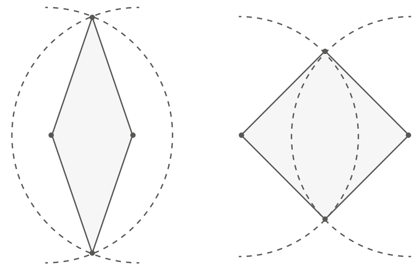
Nivel III

Analiza la congruencia entre dos cuadriláteros sobre la base de la unicidad de la construcción.

Por ejemplo, a partir del problema:

> ¿Es cierto que si dos rombos tienen la misma medida de sus lados entonces son congruentes? ¿Y si tienen la misma medida de sus diagonales?

El estudiante fundamenta que si dos rombos tienen la misma medida de sus lados no son necesariamente congruentes, porque puede variar la medida de sus ángulos, construyendo y exhibiendo un ejemplo.



Para el caso en que las dos diagonales tengan igual medida, establece que los rombos son congruentes porque ambas diagonales se cortan de manera perpendicular en el punto medio y "no pueden tener otra posición". En consecuencia, la construcción es única y, por lo tanto, los rombos son congruentes.

Áreas de triángulos y cuadriláteros

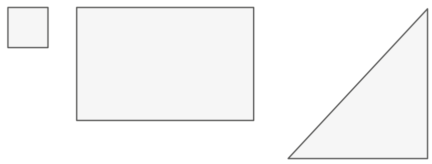
En el eje Números y álgebra se incluyó el análisis de la relación entre áreas desde un punto de vista algebraico. En este eje se propone hacerlo a través de comparaciones que involucran propiedades geométricas.

Áreas de triángulos y cuadriláteros

Transición entre primaria y secundaria	Ciclo Básico Nivel I
Establece la equivalencia entre diferentes unidades de medida para medir el área.	Determina el área de una figura utilizando una unidad de medida no convencional dada.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

Usando como unidad de medida el cuadradito, determiná la medida del área de las otras dos figuras.



- Comparación de áreas de triángulos y cuadriláteros
- Relación de proporcionalidad entre áreas de figuras
- Construcción de figuras a partir de condiciones sobre su área
- Variación de áreas de figuras en función de la variación de alguna de sus medidas

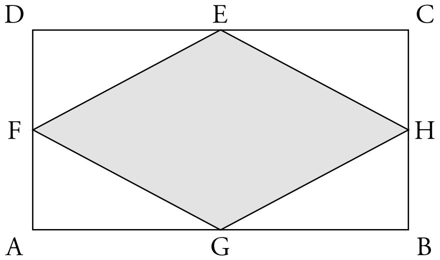
Ciclo Básico

Nivel II	Nivel III

Nivel II

Halla el área de una figura sobre la base de compararla con otra figura de la que se conoce su área.

Por ejemplo, a partir del problema:

> En la figura, E, F, G y H son puntos medios de los segmentos DC, DA, AB y BC, respectivamente. Hallá el área del rombo EFGH sabiendo que el área del rectángulo ABCD es de 50 cm².
>
> 
>

El estudiante traza los segmentos FH y GE para descomponer la figura en rectángulos. Por medio de la comparación entre el área sombreada y el área blanca determina que el área del rombo es la mitad de la del rectángulo y, por lo tanto, establece que es de 25 cm².

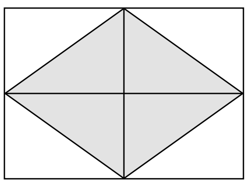
Nivel III

Establece y fundamenta relaciones (el doble, el triple, la mitad) entre áreas de figuras típicas (triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y rombos) a partir del análisis de sus elementos y/o su descomposición en otras figuras para comparar sus áreas.

Por ejemplo, a partir del problema:

> Explicá por qué el área de cualquier rombo se puede calcular como la mitad del área de un rectángulo cuyas medidas de la base y la altura coincidan con las medidas de las diagonales del rombo.

El estudiante dibuja un rombo con sus diagonales. Luego traza segmentos paralelos a las diagonales que pasan por los vértices del rombo formando un rectángulo y explicita que las medidas de sus lados coinciden con las medidas de las diagonales del rombo. Argumenta que el área del rombo es la mitad de la del rectángulo porque está formado por cuatro triángulos congruentes a los ocho que forman el rectángulo. Por último, destaca que este procedimiento se puede realizar para cualquier rombo dado.



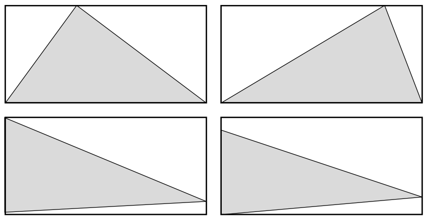
El ejemplo continúa en página 141.

Calcula el área de polígonos, trapecios y romboides por medio de descomposiciones en cuadrados, rectángulos y triángulos.

Compara el área de dos figuras dadas mediante descomposiciones, determinando si son iguales o si una es mayor que la otra.

Por ejemplo, ante esta situación:

Sin medir, indicá en cada uno de los siguientes casos si el área sombreada es mayor, menor o igual que el área blanca.



En cada uno de los casos, el estudiante traza un segmento perpendicular al lado del triángulo que comparte con el rectángulo de modo que pase por el vértice opuesto.

El ejemplo continúa en página 142.

Continúa el ejemplo de página 139.

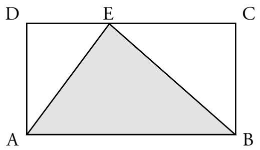
También, resuelve problemas como este:

Dibujá un rectángulo cualquiera. Marcá un punto sobre alguno de sus lados y luego uní ese punto con los extremos del lado opuesto del rectángulo, formando un triángulo. ¿Es cierto que el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo? ¿Cambiaría tu respuesta si el punto lo hubieras marcado en otra ubicación?

Determina relaciones proporcionales entre áreas de figuras (reconoce que una figura tiene el doble, el triple, la mitad de área que otra) apoyándose en descomposiciones.

Por ejemplo, a partir de este problema:

En la siguiente figura, ABCD es un rectángulo y el punto E pertenece al segmento CD. ¿Es cierto que el área del triángulo AEB es la mitad de la del rectángulo ABCD?



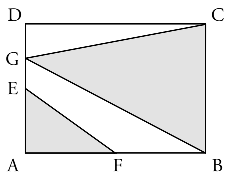
El estudiante establece que el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo porque el área blanca es igual al área sombreada. Para ello, traza un segmento perpendicular al segmento AB que pase por el punto E.

El ejemplo continúa en página 143.

Compara el área de dos figuras en situaciones en las que es necesaria la comparación con el área de una tercera figura, sobre la base de relaciones conocidas entre áreas de figuras.[11]

Por ejemplo, a partir del problema:

ABCD es un rectángulo. El punto G pertenece al segmento AD. Los puntos E y F son puntos medios de los segmentos AD y AB, respectivamente. ¿Es cierto que el área del triángulo AEF es la cuarta parte que la del triángulo BGC?



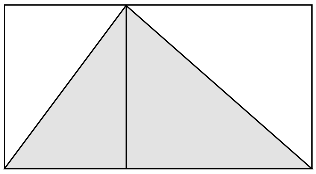
El estudiante traza dos segmentos perpendiculares a los lados AD y AB del rectángulo con un extremo en el punto E y en el punto F, respectivamente.

El ejemplo continúa en página 143.

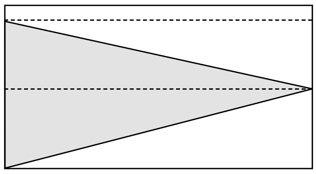
[11] Problemas de este mismo tipo se presentaron en la grilla correspondiente a Números y álgebra. Se trata de problemas que pueden resolverse en cualquiera de los dos marcos, movilizando diferentes conocimientos.

Continúa el ejemplo de página 140.

De esta manera descompone las áreas sombreadas y blancas en triángulos que es posible comparar de manera directa. En los tres primeros casos afirma que el área sombreada y el área blanca son iguales porque están compuestas por triángulos congruentes.



En el último caso, afirma que el área blanca es mayor que el área sombreada porque al área blanca "tiene una franja más" que el área sombreada.

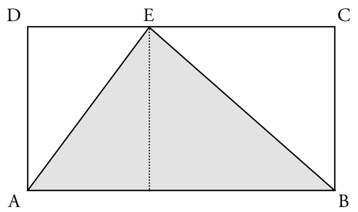


Compara áreas apoyándose en las propiedades de las figuras, sin necesidad de una medición efectiva.

Nivel II

Continúa el ejemplo de página 141.

De esta manera descompone las áreas sombreadas y blancas en triángulos que es posible comparar de manera directa, afirmando que ambas áreas están compuestas por triángulos congruentes.



Construye figuras cuya área cumple con una relación proporcional con respecto a otra figura dada, fundamentando la relación sobre la base de comparaciones apoyadas en descomposiciones.

Por ejemplo, a partir del problema:

Sin calcular el área, dibujá un triángulo que no sea rectángulo, cuya área sea la mitad del área de este rectángulo.

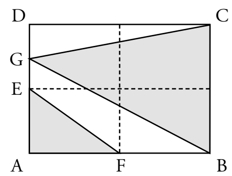
El ejemplo continúa en página 145.

Nivel III

Continúa el ejemplo de página 141.

De esta manera divide al rectángulo ABCD en cuatro rectángulos congruentes. Luego afirma que es cierto porque:

- El área del triángulo AEF es la octava parte del área del rectángulo ABCD, pues su área es la mitad del área de un rectángulo que tiene de área la cuarta parte que la de ABCD.
- El área del triángulo BGC es la mitad del área del rectángulo ABCD.
- El área del triángulo AEF es la cuarta parte del área del triángulo BGC, porque al ser la octava parte del área de ABCD debe ser la cuarta parte de su mitad.



Construye figuras cuya área cumple con una relación proporcional con respecto a otra figura dada, en situaciones en las que es necesaria la comparación con una tercera figura, sobre la base de relaciones conocidas entre áreas de figuras.

Por ejemplo, a partir del problema:

Sin calcular el área, dibujá un triángulo cuya área sea igual que el área de este rectángulo.

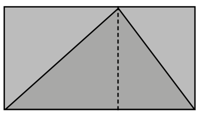
El ejemplo continúa en página 145.

Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico* Nivel I
Analiza la variación del área de una figura en función de la variación de sus lados, bases o alturas.	

Nivel II

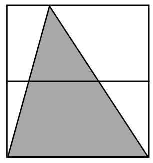
Continúa el ejemplo de página 143.

El estudiante marca un punto sobre uno de los lados y lo une mediante segmentos con los extremos del lado opuesto. Argumenta que el área del triángulo es la mitad de la del rectángulo porque, si se traza la altura del triángulo correspondiente al vértice marcado, se observa que está formado por dos triángulos congruentes a los otros dos que “completan” el rectángulo.



Nivel III

Continúa el ejemplo de página 143.



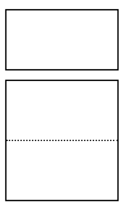
El estudiante construye otro rectángulo con el doble de área que el dado, duplicando la medida de su base o de su altura. Luego marca un punto sobre uno de los lados y lo une mediante segmentos con los extremos del lado opuesto. Fundamenta que el triángulo construido tiene la misma área que el rectángulo original porque posee la mitad de área que el nuevo rectángulo construido que, a su vez, posee el doble del área que el original.

Nivel II

Establece regularidades con respecto a la variación del área de figuras y las fundamenta sobre la base de comparaciones apoyadas en descomposiciones.

Por ejemplo, a partir del problema:

> ¿Es cierto que si a un rectángulo se le duplica la medida de su altura y la medida de su base se mantiene igual, su área se duplica?



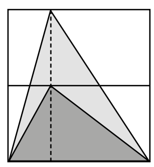
El alumno construye un rectángulo y luego construye otro que tenga la misma medida de la base y el doble de altura. En el segundo rectángulo traza un segmento paralelo a la base cuyos extremos son los puntos medios de los lados perpendiculares a la misma. Afirma que es cierto que el área es el doble porque el segundo rectángulo está compuesto por dos rectángulos congruentes al primero.

Nivel III

Establece regularidades con respecto a la variación del área de figuras, en situaciones en las que es necesaria la utilización de figuras auxiliares, sobre la base de relaciones conocidas entre áreas de figuras.

Por ejemplo, a partir del problema:

> ¿Es cierto que si a un triángulo se le duplica la medida de su altura y la medida de su base se mantiene igual, su área se duplica?



El alumno construye un triángulo y luego construye otro que tenga la misma medida de la base y el doble de altura. A continuación construye dos rectángulos, uno que inscribe al primer triángulo y otro que inscribe al segundo. Afirma que es cierto que el área es el doble porque ambos triángulos tienen la mitad del área que el rectángulo que lo inscribe y el segundo de estos rectángulos tiene el doble del área que el primero.

Ángulos entre paralelas

En este apartado se trata de determinar relaciones de congruencia o suplementariedad entre ángulos determinados por rectas paralelas cortadas por una transversal, a partir de los conocimientos sobre los ángulos de un paralelogramo.

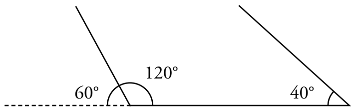
Ángulos entre paralelas

Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico* Nivel I
Relaciones entre los ángulos de un cuadrilátero.	En situaciones que incluyen el estudio de paralelogramos, reconoce que si dos ángulos correspondientes no son congruentes, los lados que los forman no son paralelos.

Por ejemplo, a partir del problema:

Construí, si es posible, un paralelogramo que tenga un lado de 6 cm, y los ángulos que se apoyan sobre ese lado de 120° y 40°. Si no es posible, explicá por qué.

El estudiante establece que la construcción no es posible porque los lados transversales al lado de 6 cm no son paralelos. Apoyado en una construcción como la siguiente, expresa que como el ángulo adyacente al de 120° no mide 40°, entonces los lados transversales tienen distinta inclinación y se van a cruzar en algún punto, lo que hace que no sean paralelos.



- Ángulos correspondientes entre paralelas
- Ángulos alternos entre paralelas
- Ángulos conjugados entre paralelas
- Análisis del paralelismo entre rectas

Ciclo Básico

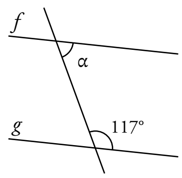
Nivel II

Halla la medida de ángulos entre paralelas, sobre la base de identificar si son correspondientes, alternos o conjugados.

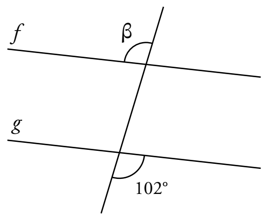
Por ejemplo, a partir del problema:

En ambos casos, las rectas f y g son paralelas.

Hallá la medida de α.



Hallá la medida de β.



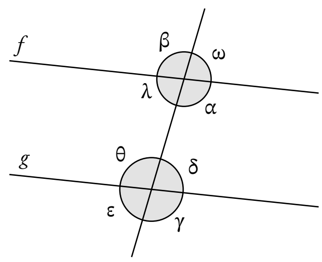
El estudiante expresa que $|\hat{\alpha}| = 63°$ porque "suma 180° con el ángulo de 117°", ya que son conjugados internos entre paralelas. También expresa que $|\hat{\beta}| = 102°$ porque "mide lo mismo que el ángulo de 102°", ya que son alternos externos.

Nivel III

Establece y fundamenta si dos ángulos entre paralelas son congruentes o suplementarios, sobre la base de identificar si son opuestos por el vértice, correspondientes, alternos o conjugados.

Por ejemplo, resuelve problemas como:

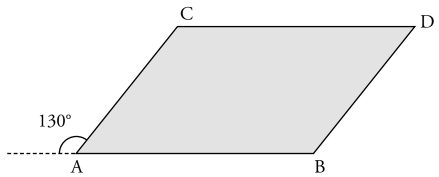
En la figura, las rectas f y g son paralelas. Nombrá dos ángulos congruentes y dos suplementarios de α y explicá por qué lo son.



Halla la medida de los ángulos interiores y exteriores de un paralelogramo apoyándose en la relación de que si dos lados son paralelos, deben tener la misma inclinación con respecto a uno transversal.

Por ejemplo, a partir del problema:

El cuadrilátero ABDC es un paralelogramo. Hallá la medida del ángulo interior B y explicá cómo lo pensaste.

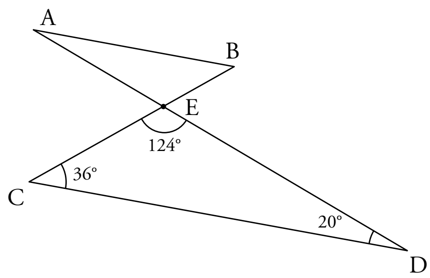


El alumno determina que la medida del ángulo interior B es 130° porque $\overline{DB}$ debe tener la misma inclinación que $\overline{AC}$, con respecto a $\overline{AB}$, ya que son paralelos entre sí.

Halla la medida de ángulos en figuras que incluyen paralelas y transversales, estableciendo relaciones entre los ángulos según sean opuestos por el vértice, correspondientes, alternos o conjugados.

Por ejemplo, al resolver este problema:

Sabiendo que $\overline{AB} // \overline{CD}$, hallá las medidas de todos los ángulos interiores del triángulo ABE y explicá cómo lo hiciste.

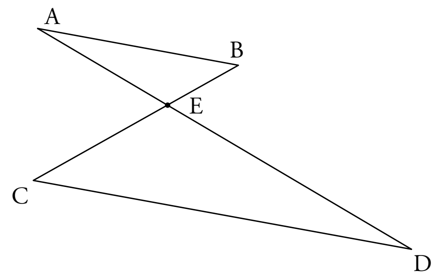


El estudiante expresa que $|\hat{A}| = 20°$ explicitando que es congruente con $\hat{D}$ o que "mide lo mismo" que $\hat{D}$, porque son alternos internos entre paralelas. De manera análoga, expresa que $|\hat{B}| = 36°$ explicitando que es alterno interno entre paralelas de $\hat{C}$. Con respecto al ángulo $B\hat{E}A$, determina que mide 124° por ser opuesto por el vértice de $C\hat{E}D$.

Establece y fundamenta si dos ángulos son congruentes o suplementarios en figuras que incluyen paralelas y transversales, sobre la base de identificar relaciones entre ángulos opuestos por el vértice, correspondientes, alternos y/o conjugados.

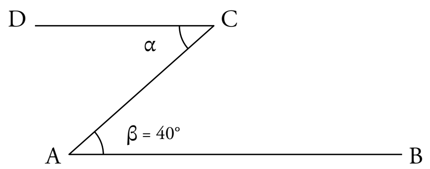
Por ejemplo, al resolver problemas como el siguiente:

Sabiendo que $\overline{AB} // \overline{CD}$, ¿es cierto que los ángulos interiores del triángulo ABE son congruentes a los ángulos interiores del triángulo CED? Justificá tu respuesta.



El estudiante afirma que es cierto estableciendo que: $\hat{A}$ y $\hat{D}$ son congruentes porque son alternos internos entre paralelas; $\hat{C}$ y $\hat{B}$ también son congruentes por ser alternos internos entre paralelas; $A\hat{E}B$ y $D\hat{E}C$ son congruentes porque son opuestos por el vértice.

Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico* Nivel I

Ciclo Básico	
Nivel II	**Nivel III**
	Reconoce distintas condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas sean paralelas: » Que sus ángulos correspondientes sean congruentes. » Que sus ángulos alternos sean congruentes. » Que sus ángulos conjugados sean suplementarios. Por ejemplo, al resolver este problema: ¿Es cierto que si $\lvert\hat{\alpha}\rvert = 35°$ los segmentos AB y CD son paralelos? ¿Qué otras medidas podría tener $\hat{\alpha}$ para que sean paralelos? Para ambas respuestas, explicá por qué.  El estudiante afirma que los segmentos no son paralelos porque los ángulos son alternos internos pero no son congruentes. Luego determina que si $\lvert\hat{\alpha}\rvert = 40°$, la misma medida que $\hat{\beta}$, los segmentos sí son paralelos; y que esta es la única medida posible porque, como expresó antes, si los ángulos no son congruentes, los segmentos no son paralelos.

Teorema de Pitágoras

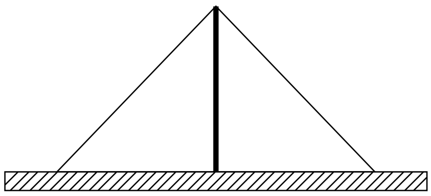
Esta progresión se basa en la resolución de problemas de reinversión del teorema de Pitágoras, desde aquellos donde la aplicación es directa a otros donde es necesario hacer descomposiciones de la figura.

Teorema de Pitágoras

Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico*
	Nivel I
	Emplea el teorema de Pitágoras para resolver problemas que se presentan modelizados mediante triángulos rectángulos.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Se quiere instalar un poste de luz de manera perpendicular al piso y sujetado al mismo por dos cables de acero, uno a cada lado del poste, como se muestra en el dibujo.



Sabiendo que el poste mide 16 m de alto y que los cables deben estar sujetados al piso a 12 m de la base de la columna, calculá cuántos metros de cable son necesarios para realizar la instalación.

El estudiante reconoce que, en el dibujo, el poste, el piso y uno de los cables forman un triángulo rectángulo. Luego, mediante el teorema de Pitágoras, calcula la medida de la hipotenusa y la identifica con la longitud de uno de los cables. Por último duplica esa medida para calcular la cantidad total de metros de cable de acero que hace falta para instalar el poste.

- Teorema de Pitágoras
- Modelización de problemas que pueden resolverse mediante el teorema de Pitágoras

Ciclo Básico

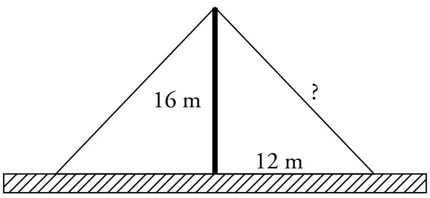
Nivel II

Modeliza problemas mediante triángulos rectángulos y emplea el teorema de Pitágoras para resolverlos.

Por ejemplo, para resolver este problema:

> Se quiere instalar un poste de luz de manera perpendicular al piso y sujetado al mismo por dos cables de acero, uno a cada lado del poste.
>
> Sabiendo que el poste mide 16 m de alto y que los cables deben estar sujetados al piso a 12 m de la base del mismo, calculá cuántos metros de cable son necesarios para realizar la instalación.

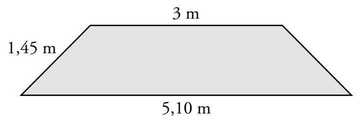
El estudiante produce un esquema como el del dibujo de abajo y reconoce que el poste, el piso y uno de los cables forman un triángulo rectángulo. Luego, mediante el teorema de Pitágoras, calcula la medida de la hipotenusa y la identifica con la longitud de uno de los cables. Por último duplica esa medida para calcular la cantidad total de metros de cable de acero que hace falta para instalar el poste.



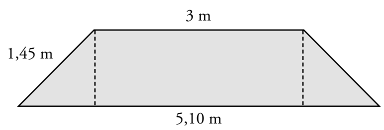
Nivel III

Utiliza el teorema de Pitágoras para resolver problemas que presentan figuras geométricas pasibles de descomponerse en triángulos rectángulos.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

> a) Hallá el área del siguiente trapecio isósceles.
>
> 
>
>
> b) Si la base mayor del trapecio se extendiera 2,70 m de manera que siguiera siendo isósceles, ¿cuál sería su perímetro?

Para resolver el ítem a), el estudiante descompone la figura en un rectángulo y dos triángulos rectángulos. Traza dos segmentos perpendiculares a la base de manera que cada uno pase por uno de los vértices "superiores" de la figura e identifica su medida con la altura del trapecio. Luego calcula la medida de los catetos "inferiores" de los triángulos (1,05 m) como la mitad de la diferencia de las medias de la base y del lado "superior" de la figura. Por último, calcula la longitud de los catetos que representan la altura empleando el teorema de Pitágoras y, con todos esos datos, el área del trapecio.



El ejemplo continúa en página 159.

Continúa el ejemplo de página 157.

Para responder a la segunda pregunta, "alarga" los catetos "inferiores" de los triángulos rectángulos la mitad (1,35 m) de lo que se alarga la base en total (2,70 m) y luego calcula la medida de las hipotenusas empleando el teorema de Pitágoras. Finaliza sumando la longitud de todos los lados de la figura.

O bien, al resolver la siguiente situación:

Hallá el área de un triángulo isósceles cuyos lados congruentes miden 26 cm y el restante mide 20 cm.

El estudiante construye una figura que representa el triángulo y marca la altura correspondiente al lado no congruente, lo que lo descompone en dos triángulos rectángulos congruentes. En uno de ellos, halla la medida del cateto incluido en la base como la mitad de la misma y, luego, calcula la medida del otro cateto empleando el teorema de Pitágoras. Para finalizar, calcula el área del triángulo isósceles identificando el cateto que no está incluido en la base con la altura del triángulo.

Actividades para relevar los aprendizajes

Los ejemplos de problemas que se incluyen a continuación podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos de los estudiantes en relación con el eje Geometría y medida.

Construcción, congruencia y semejanza de triángulos

Situación 1. Construcción de triángulos

A partir de esta situación se intenta evaluar si el estudiante puede construir un triángulo a partir de un conjunto de datos y analizar la cantidad de soluciones.

a) Construí un triángulo ABC que tenga el lado AB de 4 cm y el lado AC de 6 cm.

b) ¿Cuántos triángulos es posible construir con los datos de la parte a)? Si solo se puede construir uno, explicá por qué. Si es posible construir más de uno, agregá un dato para que solo se pueda construir uno.

Explicá tus respuestas.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Solo usa la regla graduada para realizar la construcción, imponiendo un valor determinado al ángulo BAC. En este caso, el alumno supone que necesita tres datos para poder realizar la construcción, por lo que decide agregar el que falta.

» Agrega una medida cualquiera para el tercer lado y hace la construcción con regla y compás.

» Utiliza la regla graduada y el compás para construir un triángulo que tenga dos lados con las medidas dadas. Deja las circunferencias dibujadas indicando que hay otras posibilidades para la medida del tercer lado, pero sin explicitarlo.

- Dibuja dos lados de las medidas indicadas y explica que puede variar el ángulo entre ellos o la medida del tercer lado.

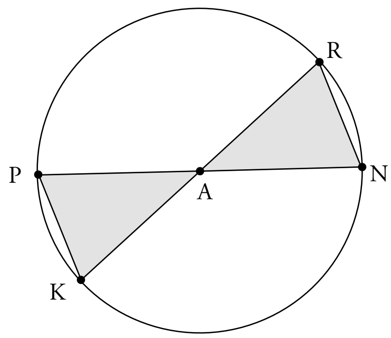
Para el ítem b) se puede observar si el estudiante:

- Afirma que solo es posible construir un único triángulo, porque con tres datos se puede construir uno solo. Se trata de alumnos que agregan un dato para poder realizar la construcción.
- Afirma que es posible construir infinitos triángulos porque el ángulo entre los lados AB y AC puede variar, sin indicar entre qué valores. Luego le asigna un valor apropiado al ángulo con el cual la construcción es única. No es posible saber si el alumno sabe que la medida de un ángulo de un triángulo tiene que ser menor que 180°.
- Afirma que es posible construir infinitos triángulos porque la medida del lado BC puede variar, sin indicar entre qué valores. Luego le asigna un valor apropiado a esa medida para que la construcción sea única. No es posible saber si este alumno se apoyó o no en la desigualdad triangular.
- Afirma que es posible construir infinitos triángulos porque la medida del ángulo BAC puede variar, aclarando que tiene que ser menor que 180°. Luego le asigna un valor apropiado al ángulo con el cual la construcción es única. Este alumno explicita los valores posibles para el ángulo comprendido entre los dos lados a partir de saber que la medida de un ángulo de un triángulo tiene que ser menor que 180°.
- Afirma que es posible construir infinitos triángulos porque la medida del lado BC puede variar, aclarando que tiene que ser menor que 10 cm. Luego le asigna un valor apropiado a esa medida para que la construcción sea única. Este alumno explicita parte de los valores posibles para el tercer lado a partir del uso de la desigualdad triangular.
- Afirma que es posible construir infinitos triángulos porque la medida del lado BC puede variar, aclarando que tiene que ser mayor que 2 cm y menor que 10 cm. Luego le asigna un valor apropiado a esa medida para que la construcción sea única. Este alumno explicita los valores posibles para el tercer lado a partir del uso de la desigualdad triangular.

Situación 2. Congruencia de triángulos

A partir del siguiente problema se pretende evaluar si el alumno puede reinvertir la noción de congruencia de triángulos para hallar las medidas de los lados de uno de los triángulos.

En la siguiente figura, los segmentos KR y PN son diámetros de la circunferencia de centro A y radio 4 cm. Si la medida del segmento PK es de 3 cm, hallá las medidas de los lados del triángulo ARN. Explicá cómo lo pensaste.



Esta es una figura de análisis, no respeta las medidas del problema.

Para este problema se puede observar si el estudiante:

» Apela a la medición para hallar las medidas de los lados del triángulo. Se trata de una resolución que apela a lo empírico, midiendo en un dibujo que no está hecho a escala.

» Afirma que ambos triángulos son isósceles debido a que dos de sus lados se corresponden con radios de la misma circunferencia, pero halla la medida del lado RN midiendo o dice que no es posible hallarla. En este caso, hay un avance en cuanto a la posibilidad de determinar algunas medidas sin apelar a la medición. Sin embargo, el alumno no relaciona los dos triángulos como medio para hallar el tercer lado.

» Afirma que ambos triángulos son isósceles debido a que dos de sus lados se corresponden con radios de la misma circunferencia. Luego afirma que los triángulos son congruentes –sin explicar por qué–, por lo que el lado RN mide 3 cm. En esta resolución se ponen en juego los conocimientos necesarios, pero el estudiante no considera necesario explicar o no sabe por qué los triángulos son congruentes.

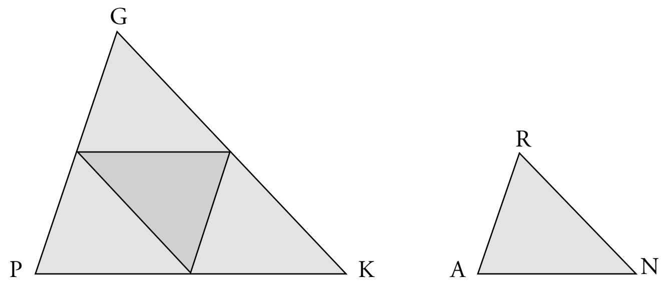
» Afirma que ambos triángulos son isósceles debido a que dos de sus lados se corresponden con radios de la misma circunferencia. Luego afirma que los triángulos son congruentes debido a que tienen la misma medida de dos lados (los radios de la circunferencia) y del ángulo que forman esos lados, por ser opuestos por el vértice. Luego, concluye que el lado RN mide lo mismo que el lado PK, 3 cm.

Situación 3. Semejanza de triángulos

El siguiente problema permite analizar si los estudiantes pueden decidir sobre la semejanza entre dos triángulos, dando razones que se apoyen en propiedades de las figuras.

El triángulo PGK fue construido con cuatro triángulos iguales al triángulo ARN.

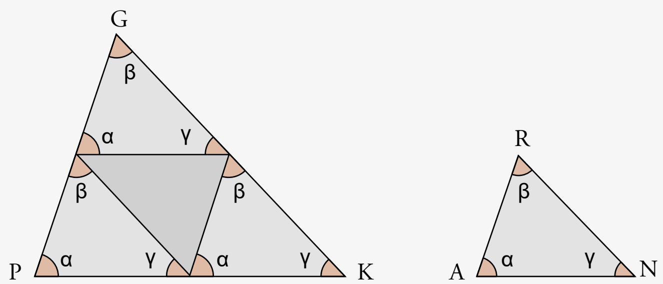
Sin medir, analizá si los triángulos PGK y ARN son semejantes. Explicá tu respuesta.



Para este problema se puede observar si el estudiante:

» Afirma que los triángulos son o no son semejantes usando la percepción o dando la definición. Por ejemplo, dice que son semejantes porque tienen los mismos ángulos o porque sus lados correspondientes son proporcionales. Se trata de un alumno que no pone en juego propiedades para responder.

» Intenta hallar las medidas de los ángulos del triángulo PGK a partir de las medidas de los ángulos del triángulo ARN. Por ejemplo:



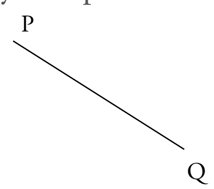
A partir de esto, determina que los triángulos son semejantes porque tienen los mismos ángulos.

» Afirma que los triángulos ARN y PGK son semejantes porque el lado PK mide el doble del lado AN; el lado PG, el doble del lado AR y el lado GK, el doble del lado RN.

Situación 1. Construcción de cuadriláteros

El problema que se presenta a continuación permite evaluar si los estudiantes son capaces de reinvertir conocimientos sobre las propiedades de las diagonales de un rectángulo. Se trata de un problema más complejo que el de realizar una construcción a partir de los lados debido a que la propiedad es utilizada en el sentido inverso al habitual. En este caso es posible apelar a que si un cuadrilátero tiene sus diagonales congruentes y se cortan en su punto medio, entonces es un rectángulo.

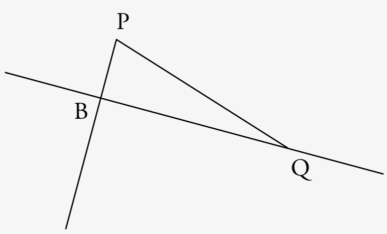
a) El segmento PQ representa la diagonal de un rectángulo. Construilo usando regla no graduada y compás.



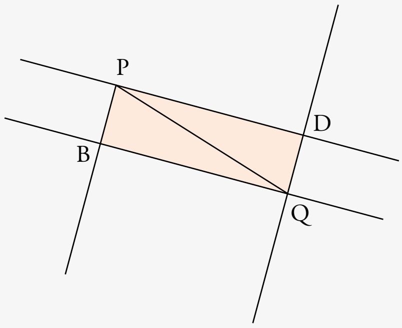
b) ¿Cuántos rectángulos distintos es posible construir?

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

- Afirma que no es posible realizar la construcción porque no se dispone de las medidas de los lados.
- Utiliza la propiedad en cuestión, aunque construye un rectángulo usando una regla graduada para determinar el punto medio de $\overline{PQ}$ y la medida de la diagonal.
- Dibuja una semirrecta con origen en P y luego una perpendicular a ella que pase por Q. De esa manera quedan determinados dos lados del rectángulo, como muestra la figura que sigue.

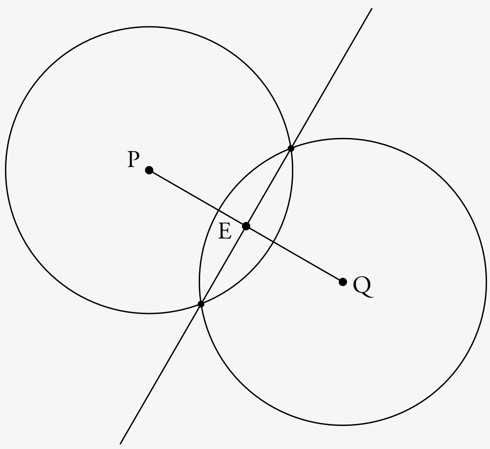


Luego traza una perpendicular al segmento PB o una paralela al segmento BQ que pase por P y una perpendicular al segmento BQ o una paralela al segmento BP que pase por Q.

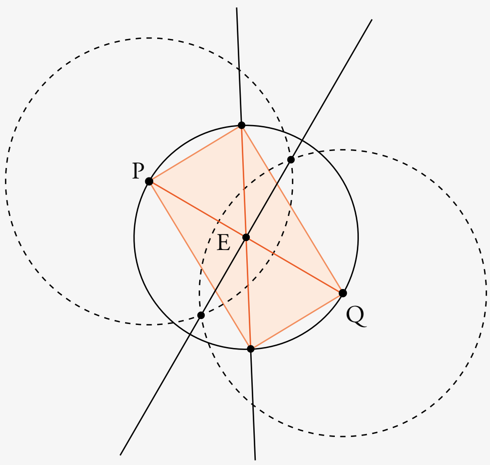


Esta construcción es correcta, pero no pone en juego la propiedad de la diagonal del rectángulo mencionada anteriormente. Solo utiliza que los extremos de la diagonal son vértices del rectángulo y que sus lados consecutivos son perpendiculares.

» Utiliza que las diagonales se cortan en su punto medio y tienen igual medida. Determina el punto medio de $\overline{PQ}$ a partir de graficar su mediatriz, para luego trasladar la mitad de la medida de la diagonal desde el punto medio del segmento.



El punto E es el punto medio del segmento. La construcción se puede continuar trazando una recta cualquiera que pase por el punto E y trasladando la medida de $\overline{PQ}$ sobre ella, centrada en E:



Aunque el problema no lo pida, resulta importante indagar acerca de cómo es posible explicar que la figura obtenida es efectivamente un rectángulo.

Para el ítem b) se puede observar si el estudiante:

» Afirma que el único rectángulo que se puede construir es el que ha dibujado. Quien responde esto no tiene en cuenta los datos que agregó para poder hacer la figura.

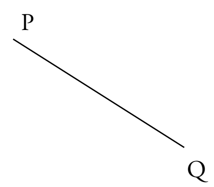
» Logra dar cuenta de que tuvo que elegir una medida o un ángulo para dibujar un rectángulo, pero que ese valor es variable, por lo que hay infinitas construcciones posibles.

Situación 2. Congruencia de cuadriláteros

El siguiente problema pone en escena cuáles son los datos necesarios para construir un único paralelogramo, cuestión que está vinculada a los criterios de congruencia. En ese sentido, se pone en juego la idea de que si dos paralelogramos comparten un cierto conjunto de datos, entonces necesariamente tienen que ser la misma figura.

Por otro lado, la situación posibilita plantear distintos conjuntos de datos que permiten construir un único paralelogramo. Si bien difieren en los elementos que se consideran, la mínima cantidad es la misma en todos los casos.

El segmento PQ representa un lado de un paralelogramo. ¿Qué datos es necesario agregar para que solo sea posible construir un paralelogramo?



Fundamentá tu resolución.

Para este problema se puede observar si el estudiante:

» Afirma que alcanza con conocer la medida de un lado consecutivo. En este caso, el alumno considera al paralelogramo del mismo modo que a un rectángulo, sin tener en cuenta que al saber que una figura es un rectángulo, se conocen las medidas de sus ángulos.

» Da un conjunto de datos que permiten construir un único paralelogramo, pero no la cantidad mínima. Por ejemplo, dice que es necesario conocer las medidas de todos los lados y los ángulos.

» Considera que es necesario conocer las medidas de dos lados consecutivos y el ángulo entre ellos. Es posible que el alumno se apoye en los datos necesarios para construir un único triángulo.

» Considera que es necesario conocer las medidas de dos lados consecutivos y la medida de una de las diagonales. Seguramente también en este caso el alumno se apoya en los datos que se necesitan para construir un único triángulo.

Situación 1. Áreas de cuadriláteros

A partir de este problema será posible relevar los conocimientos de los alumnos acerca del área de un rombo.

a) Construí un rombo cuya área sea de 24 cm^2.

b) Escribí un instructivo que cuente cómo lo hiciste.

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Construye un rombo, calcula su área y ajusta las medidas para acercarse al valor que pide el problema.

» Considera que las diagonales tienen que ser iguales y perpendiculares, intenta hallar su valor a partir de la fórmula del área del rombo y hace un dibujo aproximado. Si bien los rombos pueden tener las diagonales de igual medida, no es una condición necesaria.

» A partir de considerar que la fórmula para calcular el área de un rombo es $\frac{d \cdot D}{2}$ y que el resultado debe ser 24, concluye que el producto $d \cdot D$ tiene que ser 48. Luego busca dos números cuyo producto sea 48 y construye el rombo a partir de considerar que las diagonales se cortan perpendicularmente y en su punto medio.

Para el ítem b) se puede observar si el instructivo que produce el estudiante:

» Es incorrecto, porque no permite construir la figura deseada.

» Es incompleto, porque omite uno o más pasos necesarios para realizar la construcción. En este caso se trataría de una resolución parcialmente correcta.

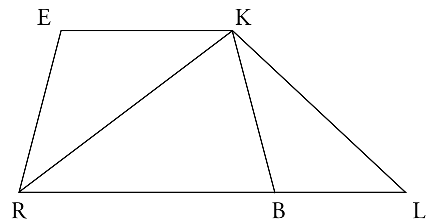
» Es correcto, pero solamente explicitando el uso de los instrumentos de construcción, sin explicar por qué se realiza cada paso.

» Es correcto y completo, el instructivo permite construir la figura deseada y además se fundamenta el porqué de cada uno de los pasos de construcción.

Situación 2. Comparación de áreas

El problema que se presenta a continuación involucra la comparación de las áreas de un cuadrilátero y un triángulo. Resulta interesante que pueda resolverse algebraica o geométricamente, movilizando en cada caso diferentes conocimientos.

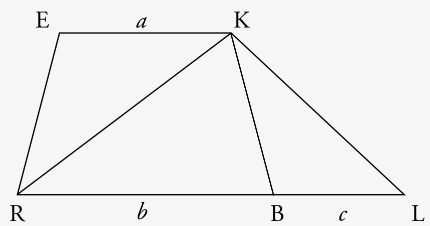
En la siguiente figura, los segmentos EK y BL tienen la misma medida y son paralelos. Compará las áreas del triángulo RLK y del cuadrilátero RBKE. Explicá cómo lo pensaste.



Esta es una figura de análisis, no respeta las medidas del problema.

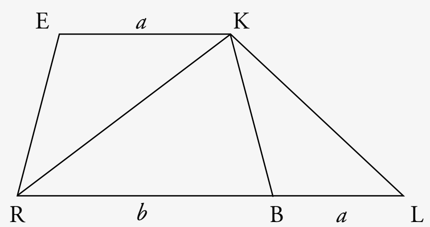
Para este problema se puede observar si el estudiante:

- Mide las bases y la altura del trapecio y la base y la altura del triángulo, usa las fórmulas para hallar las áreas y decide en función de los resultados que obtiene. Es posible que debido a errores de medición obtenga áreas diferentes.
- Halla expresiones para ambas áreas e intenta compararlas. Por ejemplo, nombra algunos lados sin tener en cuenta los de igual medida, como muestra la siguiente figura:



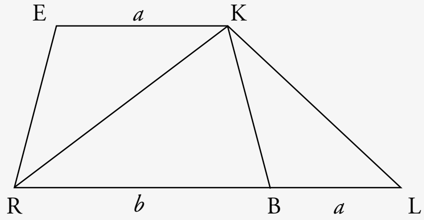
Luego escribe: $\frac{(a+b)\cdot h}{2}$ para el trapecio y $\frac{(b+c)\cdot h}{2}$, pero no logra compararlas. Es posible que se dé cuenta o no de que las alturas de las figuras son iguales.

- Halla expresiones para ambas áreas e intenta compararlas. Por ejemplo, nombra los lados teniendo en cuenta los de igual medida, como muestra la siguiente figura:



Luego escribe: $\frac{(a+b)\cdot h}{2}$ para el trapecio y $\frac{(b+a)\cdot h}{2}$, afirmando que son iguales. No hace mención de por qué las alturas son iguales.

» Halla expresiones para ambas áreas e intenta compararlas. Por ejemplo, nombra los lados teniendo en cuenta los de igual medida, como muestra la siguiente figura:



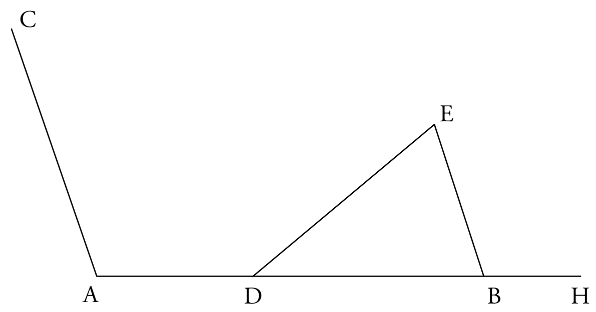
Luego escribe: $\frac{(a+b)\cdot h}{2}$ para el trapecio y $\frac{(b+a)\cdot h}{2}$, afirmando que son iguales. Explica que puede afirmar que son iguales porque las alturas también lo son, debido a que los lados EK y BL son paralelos.

» Afirma que el trapecio RBKE y el triángulo RLK están formados por el triángulo RBK y otro triángulo: el EKR y el BLK, respectivamente. Como las medidas de los segmentos EK y BL son iguales, y las alturas de los triángulos EKR y BLK también, ambos tienen igual área. Por lo tanto, las áreas del trapecio y del triángulo RKL son iguales.

Situación 1. Determinación de ángulos entre paralelas

El problema que se presenta a continuación obliga a utilizar las propiedades de los ángulos entre paralelas, además de las de los ángulos en un triángulo.

En la siguiente figura, $\overline{AC} \,//\, \overline{BE}$, $\overline{DE} = \overline{DB}$ y $|C\hat{A}D| = 110°$.



Esta es una figura de análisis, no respeta las medidas del problema.

Sin medir, hallá las medidas de todos los ángulos de la figura. Explicá cómo lo pensaste.

Para este problema se puede observar si el estudiante:

» Determina algún otro ángulo de la figura de manera incorrecta para luego hallar los demás ángulos usando propiedades adecuadas. Por ejemplo, decide que $|B\hat{D}E| = 70°$ y, con ese dato, halla los demás ángulos.

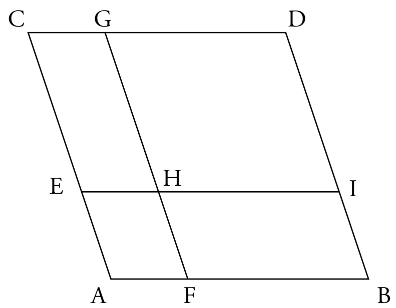
» Explicita las relaciones entre algunos de los ángulos pero no logra determinar sus medidas. Por ejemplo, afirma que $|D\hat{B}E| = |D\hat{E}B| = x$ y que $|B\hat{D}E| = 180° - 2x$, pero no encuentra sus medidas debido a que necesita hallar al menos una relación más.

» Decide que $|E\hat{B}H| = |C\hat{A}D|$ por ser correspondientes entre paralelas o que $|D\hat{B}E| = 180° - |C\hat{A}D|$ por ser conjugados internos entre paralelas, para luego hallar los demás ángulos.

Situación 2. Determinación de ángulos entre paralelas. Cantidad mínima de datos necesarios

El problema que sigue requiere poner en juego las relaciones entre ángulos determinados por paralelas para poder encontrar las medidas de cada uno. Se agrega como pregunta la cantidad mínima de datos necesarios, lo que lleva también a considerar las propiedades de los ángulos en un paralelogramo.

En la siguiente figura, ABDC es un paralelogramo. El segmento FG es paralelo al segmento AC y el segmento EI es paralelo al segmento CD.



Esta es una figura de análisis, no respeta las medidas del problema.

¿Cuántos ángulos como mínimo se necesitan como dato para poder hallar todos los ángulos de la figura? Asigná los valores necesarios y determiná las medidas de los ángulos faltantes.

Para este problema se puede observar si el estudiante:

- » Asigna valores a algunos ángulos sin que verifiquen las relaciones entre los ángulos de un paralelogramo (por ejemplo, que los ángulos opuestos sean congruentes o los consecutivos, suplementarios). Es posible que el alumno pueda determinar las medidas de los demás ángulos usando de manera correcta las relaciones entre ángulos determinados por paralelas, obteniendo resultados coherentes con las medidas erróneas que asignó.
- » Asigna medidas a ángulos, coherentes con los datos, pero no la cantidad mínima. Luego, halla todos los demás ángulos de manera correcta usando las propiedades adecuadas.
- » Asigna la medida a un ángulo para hallar todos los demás de manera correcta, aplicando las propiedades de los ángulos de un paralelogramo y los que determinan rectas paralelas cortadas por una transversal.

Situación 1. Determinación de medidas de lados de triángulos rectángulos

En el siguiente problema resulta necesario determinar las alturas de dos triángulos para poder comparar sus áreas.

> Un triángulo tiene dos lados de 5 cm de longitud y un lado de 6 cm. Otro triángulo tiene dos lados de 5 cm de longitud y un lado de 8 cm. ¿Cuál de los dos tiene mayor área? Explicá cómo lo pensaste.

Para este problema se puede observar si el estudiante:

» Afirma que el triángulo que tiene el lado de 8 cm tiene mayor área porque tiene un lado que "mide más" que en el otro triángulo.

» Intenta calcular sus áreas determinando la altura de cada uno de manera incorrecta. Por ejemplo, dibujando y midiendo.

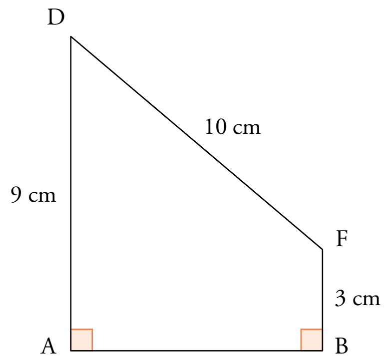
» Dibuja los dos triángulos e intenta compararlos apoyado en lo perceptivo. Por ejemplo, considerando en ambos triángulos el lado distinto como base e identificando que uno tiene la base "más larga" mientras que el otro tiene mayor altura. Es posible que también en este caso intente calcular el área de manera incorrecta midiendo el dibujo.

» Usa el teorema de Pitágoras para hallar la altura de cada triángulo y, luego, sus áreas. Responde que las áreas son iguales.

Situación 2. Modelización de situaciones usando el teorema de Pitágoras

La figura que se presenta en este problema requiere ser descompuesta de modo que se obtengan triángulos rectángulos y así poder utilizar el teorema de Pitágoras.

En la siguiente figura, hallá la medida del segmento BD.



Esta es una figura de análisis, no respeta las medidas del problema.

Para este problema se puede observar si el estudiante:

» Intenta calcular la medida del segmento AB usando el teorema de Pitágoras con datos incorrectos, como 9 cm y 10 cm. Luego vuelve a aplicar el teorema para calcular la medida del segmento BD.

» Traza un segmento paralelo a $\overline{AB}$ que pase por el punto F, pero no logra determinar la medida del otro cateto para aplicar el teorema de Pitágoras.

» Traza o no un segmento paralelo a $\overline{AB}$ que pase por el punto F, marcando un punto E sobre $\overline{AD}$ ($\overline{FE}$), y determina que la medida de $\overline{DE}$ es de 6 cm. Aplica el teorema de Pitágoras para hallar la medida de $\overline{EF}$. Luego no continúa resolviendo. En este caso, el alumno no se da cuenta de que los segmentos EF y AB tienen la misma medida.

» Traza o no un segmento paralelo a $\overline{AB}$ que pase por el punto F, marcando un punto E sobre $\overline{AD}$ ($\overline{FE}$), y determina que la medida de $\overline{DE}$ es de 6 cm. Aplica el teorema de Pitágoras para hallar la medida de $\overline{EF}$. Se da cuenta de que los segmentos EF y AB tienen la misma medida y aplica nuevamente el teorema de Pitágoras para hallar la medida de $\overline{BD}$.

El uso de tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría

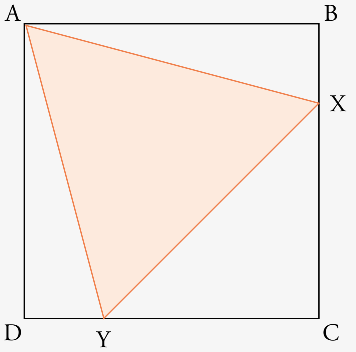
Tal como se señaló para el caso de la enseñanza y el aprendizaje de las funciones, la introducción de la tecnología ha afectado tanto a la matemática académica como a la escolar.

En el caso de la geometría, existen programas de geometría dinámica con versiones que funcionan en computadoras, tabletas y teléfonos celulares. Estos programas, como por ejemplo GeoGebra, ofrecen entornos para trabajar a partir de conocimientos matemáticos y permiten realizar construcciones basadas en propiedades geométricas. Si la figura no es construida según sus propiedades, no resistirá el arrastre, deformándose. Las propiedades y las relaciones que eran observables no se conservarán. Por ejemplo, si se construye un cuadrado marcando sus vértices "a ojo", al aplicarle un arrastre desplazando uno de sus vértices, dejará de serlo. Eso se debe a que no se tuvieron en cuenta sus propiedades para construirlo.

En el campo de la geometría dinámica las propiedades geométricas de la figura pueden ser leídas como las que se conservan a través de desplazamientos, por lo que las construcciones pueden ser validadas según si conservan las propiedades pedidas a través de arrastres. Los desplazamientos o arrastres son herramientas características del trabajo en la geometría dinámica, que permiten saber si la construcción realizada fue hecha o no a partir de las propiedades de las figuras.

Aunque no se desarrollará una progresión para el uso de tecnología, se mostrará a continuación un ejemplo del uso que se podría dar en la escuela.

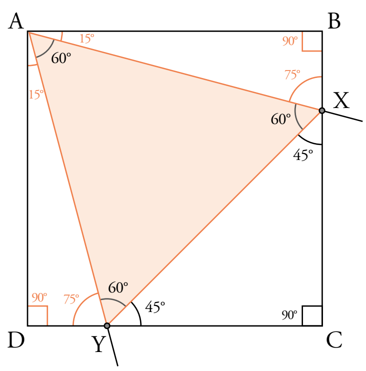
Reproducí en GeoGebra la siguiente figura, donde el triángulo AXY es equilátero y ABCD es un cuadrado.[12]



Esta es una figura de análisis,
no respeta las medidas del problema.

Una primera aproximación a la resolución de este problema podría ser a través de estrategias de carácter perceptivo. Por ejemplo, se podría construir primero el cuadrado y los puntos X e Y sobre sus lados, para luego desplazarlos de manera que, a la vista, formen un triángulo equilátero. Sin embargo, esta construcción tendría dos características no deseadas: por un lado, no soportaría el arrastre, ya que al mover alguno de los puntos la figura se "deformaría" y el triángulo dejaría de ser equilátero; por otro lado, no habría nada que asegure que el triángulo es equilátero, más allá de la percepción. La figura así obtenida sería estática y no dinámica, es decir que posiblemente cumpliría con las condiciones del problema para una posición determinada de los puntos pero dejaría de cumplirlas al mover alguno de ellos.

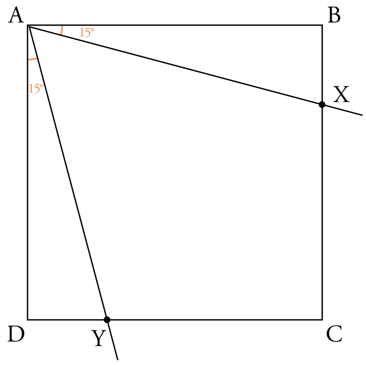
Para obtener una construcción dinámica es necesario analizar las propiedades de la figura, que son las que tienen que permanecer invariantes frente a desplazamientos. Las relaciones en juego hacen que posiblemente no alcance con ensayos directamente sobre el programa, o que no resulte simple decidir mientras se está intentando hacer una construcción, por lo que se requiere recurrir al lápiz y papel. Una posibilidad de resolución es trabajar sobre una figura de análisis para determinar las medidas de cada uno de los ángulos que forman la figura o para analizar y comparar los triángulos, por ejemplo, determinando cuáles son congruentes.



[12] Actividad tomada de Novembre, A.; Nicodemo, M. F. y Coll, P. (2015). *Matemática y TIC: Orientaciones para la enseñanza*. Disponible en: https://bit.ly/35KlqYv [consultado el 20/12/2019].

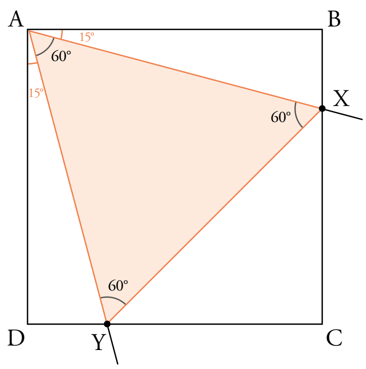
El triángulo AYX es equilátero, por lo que todos sus ángulos miden 60°. Los triángulos ADY y ABX son congruentes, ya que ambos son triángulos rectángulos con dos pares de lados congruentes: $\overline{AD}$ es congruente a $\overline{AB}$ y $\overline{AY}$ es congruente a $\overline{AX}$. Por lo tanto, los ángulos BAX y DAY tienen la misma medida, 15°, debido a que ambos tienen que sumar 90° junto con la medida del ángulo del triángulo equilátero. Así, el restante ángulo de cada uno de esos triángulos rectángulos mide 75°. Para finalizar, el triángulo (también rectángulo) YCX posee dos ángulos de 45°, cada uno suplementario de los ángulos de 75° y 60°.

A partir de las relaciones anteriores se puede realizar una construcción que soporte el arrastre y sobre la que, a partir de las propiedades que se utilizan, se puede asegurar que está compuesta por un cuadrado y un triángulo equilátero inscripto. Por ejemplo, construyendo primero el cuadrado y después dos semirrectas con origen en el vértice A que formen un ángulo de 15° con los lados del cuadrado, como se muestra en la figura siguiente.



Se puede asegurar que el triángulo que forman los vértices A, Y y X es equilátero ya que sus tres ángulos miden 60°:

- El ángulo YAX mide 60° porque es complementario de los dos ángulos de 15°.
- Los triángulos DAY y BAX son congruentes porque ambos poseen la misma medida de sus ángulos y un lado de la misma medida ($\overline{AB}$ y $\overline{AD}$).
- En consecuencia, los segmentos AY y AX son congruentes, por lo que el triángulo YAX es isósceles.
- Los ángulos congruentes del triángulo isósceles YAX miden 60° porque deben sumar 180° con el restante.



El problema presentado favorece la retroalimentación entre el uso de la tecnología, el análisis en lápiz y papel, y la validación sobre la construcción realizada. No se trata solamente de usar el programa, sino de poner en juego las propiedades de la figura, condición necesaria para que la construcción sea dinámica.

Estadística y probabilidades

El eje Estadística y probabilidades es un campo productivo para que los alumnos se enfrenten a situaciones en la cuales deban tomar decisiones y sacar conclusiones sobre hechos extramatemáticos, a partir de un conjunto de valores observados. Para ello se propone un trabajo en torno a dos cuestiones centrales: por un lado tareas vinculadas a la recolección, representación y cálculo de datos numéricos, y por otro, la interpretación y la toma de decisiones a partir de esos datos. Cabe aclarar que si bien estas dos cuestiones se pueden considerar por separado, es deseable que convivan y se retroalimenten en las tareas que se les proponen a los alumnos.

Es importante destacar que los modos de trabajo propios de este eje se distinguen del trabajo matemático que se despliega en otros ya que una de sus formas propias de razonar es la inferencia estadística, en contraposición con un tipo de razonamiento determinista.

A diferencia de lo que ocurre en los otros ejes, en los ejemplos que se proponen en la grilla muchas veces no se ofrece la respuesta que da el estudiante al problema, pues esta depende de consideraciones que no están ni pueden estar presentes en los enunciados. Sin embargo, sí se describen posibles resoluciones de los estudiantes que pueden servir de insumo al docente para tomar decisiones respecto de la planificación y gestión de la clase.

Para estas progresiones se han considerado dos subejes:

- Lectura, interpretación y producción de representaciones gráficas
- Análisis y descripción de datos

Lectura, interpretación y producción de representaciones gráficas

Los primeros gráficos y cuadros que se proponen suponen una lectura "directa" de la información, que no requiere mayor complejidad que la comprensión del sistema de representación. Estas primeras actividades invitan también a relacionar distintas representaciones e identificar que se vinculan con el mismo conjunto de datos. Es a partir de propuestas de este tipo que se avanza en el análisis y la comparación de distintas representaciones con el objetivo de establecer la pertinencia del uso de cada una de ellas, según la situación planteada.

A su vez, se avanza desde la lectura e interpretación hacia la producción de distintos tipos de representaciones y gráficos. En un primer paso, se pone el énfasis en la confección de los distintos tipos de gráficos y la utilización de los sistemas de representación para, a continuación, proponer actividades en las que el alumno sea el responsable de elegir la relación que quiere ilustrar y el tipo de representación pertinente para ello.

En las últimas actividades la información que se debe considerar deja de ser la que se encuentra "directamente" en la representación, requiriendo que el estudiante interprete, seleccione y opere con la información ofrecida de manera explícita con el objetivo de obtener la que considere necesaria para resolver el problema.

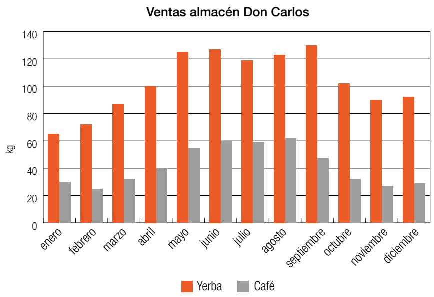
Lectura, interpretación y producción de representaciones gráficas

Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico*
	Nivel I

Lee e interpreta gráficos estadísticos usualmente utilizados en medios de comunicación.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

A continuación se presenta un gráfico que representa la evolución de la venta de yerba mate y café (en kg) en el almacén Don Carlos.



a) ¿Es cierto que el gráfico muestra las ventas durante un año?

b) Identificá cuál fue el mes en el que se produjo la mayor venta de café y cuál fue el mes en el que se produjo la menor venta de yerba.

c) ¿Es cierto que en los primeros meses del año las ventas fueron en aumento?

- Lectura e interpretación de gráficos que aparecen en medios de comunicación
- Comparación y análisis de diferentes representaciones gráficas, ventajas de unas sobre otras

Ciclo Básico

Nivel II	Nivel III

Nivel II

Produce gráficos estadísticos usualmente utilizados en medios de comunicación.

Por ejemplo, resuelve problemas como este:

A continuación se presenta un cuadro de doble entrada con información sobre la venta de yerba mate y café (en kg) en el almacén Don Carlos.

Mes	Yerba	Café
Enero	65	30
Febrero	72	25
Marzo	87	32
Abril	100	40
Mayo	125	55
Junio	127	60
Julio	119	59
Agosto	123	62
Septiembre	130	47
Octubre	102	32
Noviembre	90	27
Diciembre	92	29

Armá un gráfico de barras que permita representar los datos del cuadro.

Nivel III

Produce gráficos tomando decisiones sobre la conveniencia de la representación a utilizar, según la situación planteada.

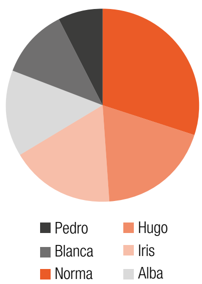
Por ejemplo, a partir del siguiente problema:

En la tabla se encuentran los datos correspondientes a la última elección a presidente de la Asociación de Fomento Luz del Porvenir, en la cual es necesario obtener una cantidad superior a la cuarta parte de los votos totales para ser electo.

Candidato	Cantidad de votos
Pedro	15
Blanca	23
Norma	60
Hugo	38
Iris	35
Alba	29

Realizá un gráfico que permita decidir de manera directa si resultó electo algún candidato y, en caso afirmativo, quién fue.

El estudiante confecciona un gráfico de torta y manifiesta que este tipo de gráfico permite representar de manera directa la relación entre cada una de las cantidades y el total.



Responde que Norma fue electa porque le corresponde una zona mayor a la cuarta parte del círculo.

Interpreta distintas representaciones de la misma situación y establece relaciones entre ellas.

Por ejemplo, a partir del siguiente problema:

A continuación se presenta un cuadro de doble entrada con información sobre la venta de yerba mate y café (en kg) en el almacén Don Carlos.

Mes	Yerba	Café
Enero	65	30
Febrero	72	25
Marzo	87	32
Abril	100	40
Mayo	125	55
Junio	127	60
Julio	119	59
Agosto	123	62
Septiembre	130	47
Octubre	102	32
Noviembre	90	27
Diciembre	92	29

El problema continúa en página 186.

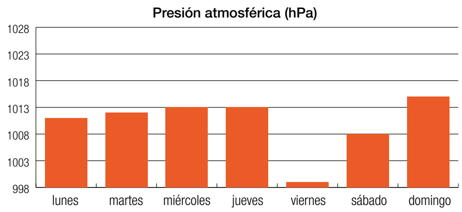
Nivel II

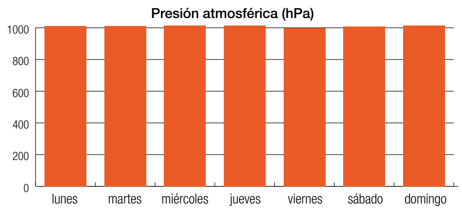
Interpreta distintas representaciones y decide sobre la pertinencia y/o conveniencia de recurrir a cada una de ellas, dependiendo de la situación planteada.

Por ejemplo, a partir del siguiente problema:

Una manera de prever la ocurrencia de lluvia es estudiando los cambios pronunciados de la presión atmosférica que varía, generalmente, entre los 998 hPa (hectopascales) y los 1028 hPa.

Los siguientes gráficos representan la presión atmosférica medida durante el transcurso de una semana. Indicá cuál de los dos sería conveniente utilizar para predecir futuras precipitaciones.





El alumno argumenta que en esta situación no es conveniente comenzar la escala en 0 porque no permite visualizar con claridad las variaciones entre 998 y 1028. Si bien estas variaciones son pequeñas numéricamente, resultan importantes para estudiar la situación.

Nivel III

Produce información que no se presenta explícita en las representaciones, lo que supone interpretar y operar con los datos que sí se encuentran explícitos.

Por ejemplo, a partir del problema:

La siguiente tabla contiene el detalle de los sueldos de los empleados de una empresa.

Cargo	Cantidad de personas	Sueldo mensual ($)
Director	1	40.000
Gerente	2	27.000
Jefe de sección	3	22.000
Empleados de la Sección 1	12	15.000
Empleados de la Sección 2	10	17.000
Empleados de la Sección 3	8	16.000

a) ¿Es cierto que el sueldo de los empleados de sección representa mayor dinero que el sueldo de los empleados que son jefes?

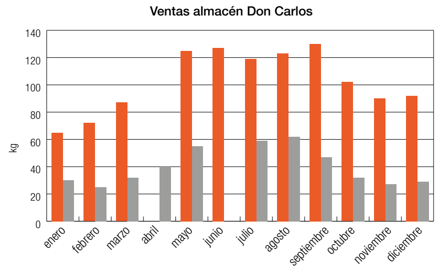
b) ¿Cuál es el sueldo promedio de un empleado de sección?

c) Realizá un gráfico que represente la proporción de los sueldos de los empleados jefes y de los empleados de sección con respecto al total de lo que abona la empresa en sueldos.

La fila continúa en página 187.

Continúa el problema de página 184.

El gráfico de barras representa la información de la tabla, pero le faltan las leyendas y algunas barras. Completalo de manera que representen la misma información.



El estudiante identifica que en la tabla la mayor cantidad de kg de ventas en cada mes corresponde a la yerba mate, razón por la cual en el gráfico las barras naranjas corresponden a la yerba mate y las grises al café.

Para completar el gráfico obtiene la información numérica de la tabla y dibuja la barra con la altura correspondiente utilizando la escala indicada.

Nivel II	Nivel III
	Continúa la fila de página 185. El estudiante interpreta que cada uno de los datos que corresponden a los sueldos está vinculado con lo que cobra un solo empleado de ese tipo. Luego opera con esa información, multiplicando la cantidad de empleados por el sueldo y sumando esos totales para determinar cuál de los dos tipos de empleados recibe más dinero en total. Para responder al ítem c) podría confeccionar un gráfico circular, y calcular qué porcentaje o razón del total representa el monto pagado a cada tipo de empleado.

Análisis y descripción de datos

Para el trabajo en este eje se proponen actividades en donde los alumnos son los encargados de recolectar información. A propósito de estas actividades se sugiere el trabajo sobre las variables, las frecuencias y las medidas de tendencia central.

Luego de un primer paso en donde se propone el cálculo de frecuencias y de la moda, media y mediana de una muestra, se avanza hacia el análisis sobre la recolección de información, poniendo en cuestión la pertinencia de las variables y de su rango. Se avanza también en la interpretación de lo que representa cada una de las medidas de tendencia central, dependiendo de la situación que se esté estudiando, y según cuál sea la más pertinente para representar la muestra.

Se propone también un trabajo de análisis sobre los alcances de los estudios estadísticos, con actividades de reflexión en torno a cuáles son las situaciones que son susceptibles de ser abordadas mediante un estudio muestral y cuáles no.

Análisis y descripción de datos

Transición entre primaria y secundaria	Ciclo Básico Nivel I
	Recolecta y organiza datos estadísticos en forma de tabla, hallando la frecuencia absoluta de cada valor de la variable, de manera que le permita calcular las medidas de tendencia central.

Por ejemplo, para resolver el problema:

> Les proponemos hacer una pequeña investigación sobre la altura de los integrantes de su aula.
>
> a) ¿Cuál es la altura promedio?
>
> b) ¿Cuál es la altura que más se repite?
>
> c) ¿Existe algún valor de altura que divida a los alumnos en dos grupos con la misma cantidad de integrantes, según si su altura es mayor o menor que ese valor?

El estudiante recolecta todas las alturas de sus compañeros y calcula el promedio.

Para calcular la altura que más se repite ordena los datos, posiblemente en una tabla, que contenga todas las alturas observadas y anota la cantidad de veces que se repite cada una.

Para responder el ítem c) ordena todos los valores de menor a mayor, lo que le permite identificar si existe un valor de altura que divide a la población en dos grupos de individuos, de manera que cada uno contenga la mitad de los casos.

- Recolección y organización de datos
- Tablas de frecuencias
- Variable, población y muestra
- Medidas de tendencia central: moda, media y mediana

Ciclo Básico

Nivel II

Define las variables a considerar y su rango a partir de anticipar posibles resultados de un experimento aleatorio y teniendo en cuenta conclusiones de estudios estadísticos, con el objetivo de elaborar y/o seleccionar instrumentos de recolección de datos (tales como encuestas, entrevistas, etcétera).

Por ejemplo, para la situación:

Les proponemos hacer una pequeña investigación con el objetivo de estudiar los hábitos alimentarios de sus padres. Para recolectar la información les proponemos el siguiente modelo de encuesta.

Datos personales
Edad (en años)
☐ Menos de 15
☐ Entre 15 y 20
☐ Entre 20 y 30
☐ Entre 30 y 40
☐ Más de 40
Altura (en metros)
☐ Menos de 1
☐ Entre 1 y 2
☐ Más de 2
Desayuno
Bebida
☐ Café
☐ Té
☐ Leche
☐ Jugo
Comida
☐ Galletitas
☐ Tostadas
☐ Cereales
☐ Pan
☐ Fiambre

¿Sacarían o agregarían alguna(s) pregunta(s)? ¿Por qué?

¿Cambiarían las opciones de algunas preguntas? ¿Por qué?

El ejemplo continúa en página 193.

Nivel III

Distingue la pertinencia del uso de relevamientos censales y muestrales en función de las necesidades del estudio que se pretende realizar.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

Indicá, en cada caso, si para realizar el estudio es necesario trabajar con toda la población o basta con una muestra.

a) Identificar el programa de televisión más visto entre las 21 y las 22 h.

b) Cuantificar las casas en las que se cortó la luz en la Ciudad de Buenos Aires durante 2018.

El estudiante reconoce que para determinar el programa de televisión más visto se puede estudiar una muestra, ya que seleccionando la muestra de manera que sea representativa del conjunto es posible suponer que el resto de la población se comportará de manera similar, obteniendo una conclusión relativa y no absoluta: no se determina cuántas personas lo ven, sino si hay una alta probabilidad de que sea el más visto.

En contraposición, establece que el estudio del ítem b) no se puede realizar a través de una muestra porque el estudio intenta relevar un valor absoluto y exacto. Agrega que si se quisiera estimar la cantidad de casas que sufrieron cortes sí se podría trabajar sobre una muestra.

Transición entre primaria y secundaria	*Ciclo Básico* Nivel I

Nivel II	Nivel III
Continúa el ejemplo de página 191. El estudiante identifica que para algunas variables la encuesta considera rangos imposibles y para otras el rango no es pertinente: por ejemplo, la edad de sus padres no puede ser menor que 20 años y el rango de altura entre 1 y 2 metros comprende a la mayoría de la población, lo que imposibilita hacer una diferenciación que sea relevante para estudiar su incidencia. Con respecto al desayuno, encuentra que algunas posibles respuestas no están entre las opciones, lo que muestra que la encuesta confeccionada de esa manera no permite la exhaustividad del registro de los datos. Además identifica que las opciones no son excluyentes: por ejemplo, el café y la leche.	

Nivel II

Utiliza las frecuencias de los valores de una variable en una muestra y las medidas de tendencia central para analizarla y elaborar conclusiones sobre ella.

Por ejemplo, a partir del siguiente problema:

El siguiente cuadro de doble entrada contiene el detalle de los sueldos de los empleados de una empresa.

Cargo	Cantidad de personas	Sueldo mensual ($)
Director	1	40.000
Gerente	2	27.000
Jefe de sección	3	22.000
Empleados de la Sección 1	12	15.000
Empleados de la Sección 2	10	17.000
Empleados de la Sección 3	8	16.000

Calculá la media, la mediana y la moda de los sueldos que paga la empresa. ¿Qué representan estos valores con respecto a los sueldos que cobran los empleados?

El estudiante obtiene los valores solicitados: la media de $17.722,22, la mediana de $16.000 y la moda de $15.000. Luego, identifica que la moda representa el valor de sueldo que más empleados cobran y que la media es el sueldo que debería cobrar cada empleado si todos cobraran lo mismo. Por último, relaciona la mediana con el hecho de que a lo sumo la mitad de los empleados cobra un sueldo menor o igual que $16.000.

Nivel III

Decide qué medida de tendencia central es la más adecuada para representar una muestra en una situación planteada y la utiliza para resolverla.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

A continuación se presenta un listado de las alturas de los chicos de un aula de 2° año, de menor a mayor.

A esa edad se considera alto a un chico cuya altura está por encima de 1,50 m.

¿Se podría decir que este es un curso de chicos altos? ¿Por qué?

Altura (en metros)
1,22
1,27
1,27
1,27
1,3
1,4
1,52
1,59
1,59
1,6
1,63
1,67
1,68
1,68
1,72

En primera instancia el alumno calcula la moda (1,27), la media (1,494) y la mediana (1,59). Luego, descarta el valor de la moda porque no es representativo de esta muestra, ya que se encuentra “en un extremo” de la lista.

Para tomar la decisión, compara los valores de la media y la mediana identificando qué representan de la muestra y argumenta a favor y en contra de utilizar cada una. La mediana indica que más de la mitad del curso mide más que 1,50 m, por lo que se podría decir que es un aula de chicos altos. Pero por otro lado, los chicos que son bajos son muy bajos, lo que hace que la media esté por debajo de 1,50 m.

Actividades para relevar los aprendizajes

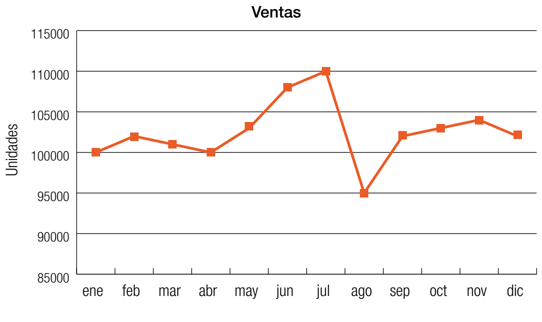
Los ejemplos de problemas que se incluyen a continuación podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos de los estudiantes en relación con el eje Estadística y probabilidades.

Lectura, interpretación y producción de representaciones gráficas

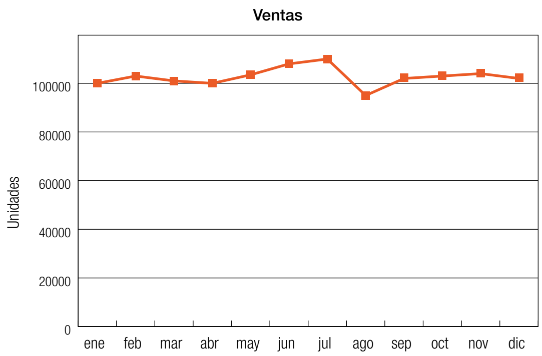
Situación 1. Producción, comparación y análisis de diferentes representaciones gráficas; ventajas de unas sobre otras

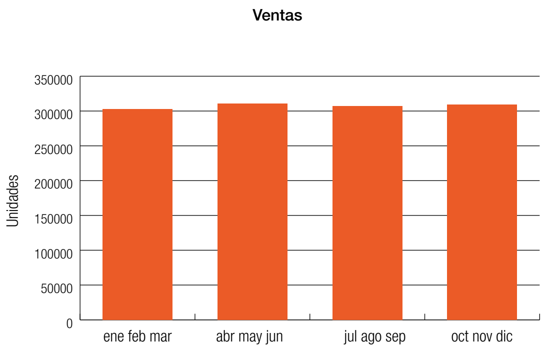
A partir de esta actividad se intenta evaluar si el estudiante puede interpretar distintos gráficos, ponerlos en relación e identificar la pertinencia y la conveniencia de su utilización para representar una situación.

La encargada de ventas de una empresa presentó a los vendedores el siguiente gráfico y expuso que estaba preocupada porque hubo un mes en el que bajaron mucho las ventas.



En la reunión siguiente, los vendedores exhibieron estos gráficos para argumentar que la situación no era tan preocupante.





a) ¿Es verdad que los tres gráficos podrían representar los mismos datos?

b) A partir de los siguientes datos provenientes de otra empresa, confeccioná un gráfico que te permita dar argumentos sobre que la variación fue pronunciada y otro que te permita argumentar lo contrario.

Trimestre	Ventas (en miles de unidades)
1er trimestre	100
2º trimestre	90
3er trimestre	98
4º trimestre	100

Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Contesta que no podrían representar los mismos datos porque los gráficos son diferentes. En este caso, el alumno responde a partir de lo perceptual y sin analizar los valores y variables representadas.

» Contesta que los dos gráficos de líneas representan los mismos datos porque compara los valores que representan los puntos, pero que el de barras no porque los valores numéricos que muestra son distintos. No considera la posibilidad de agrupar valores de la variable, lo que le permitiría analizar si el gráfico se puede construir a partir de los mismos datos.

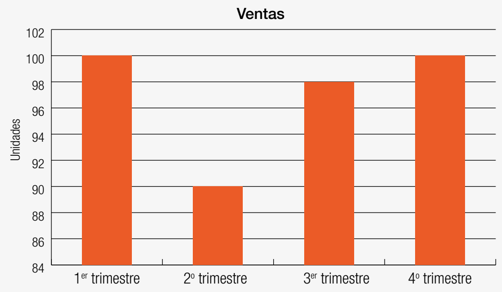
» A partir de los gráficos de líneas estima cuántas unidades se vendieron en cada trimestre y contesta que los tres gráficos representan los mismos datos. No tiene en cuenta que si bien el gráfico de barras es coherente con los datos de los gráficos de líneas, podría estar producido a partir de otro conjunto de datos.

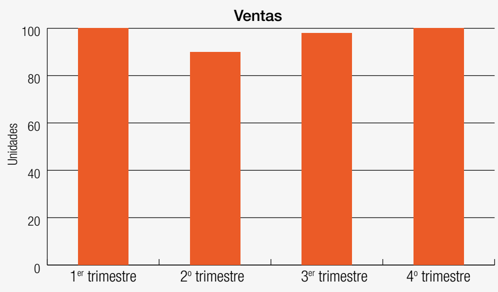
» A partir de los gráficos de líneas estima cuántas unidades se vendieron en cada trimestre y contesta que, si bien el gráfico de barras es coherente con los datos de los gráficos de líneas, no es posible saber si representan los mismos datos porque los valores correspondientes a cada mes podrían ser distintos.

Para el ítem b) se puede observar si el estudiante:

» Realiza dos gráficos de distinto tipo para que “se vean” distintos, pero no puede utilizarlos para sostener las argumentaciones.

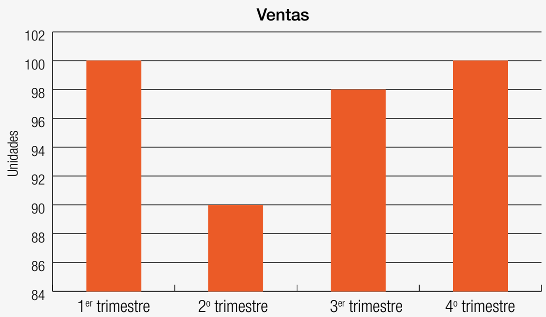
» Realiza dos gráficos del mismo tipo, por ejemplo de barras, con distinta escala en el eje de ordenadas, y los utiliza para sostener las argumentaciones.

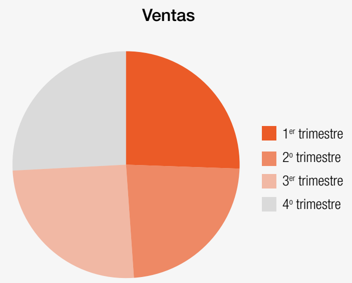




» Realiza dos gráficos con los datos agrupados de distinta manera y los utiliza para sostener las argumentaciones. Por ejemplo, en lugar de considerar las ventas por trimestre, las considera mensuales, inventando valores coherentes con la información brindada. Si bien esta estrategia da cuenta de los conocimientos del estudiante con respecto a cómo modifica la percepción de la variación un reagrupamiento de los datos, no es legítimo inventar valores aunque sean coherentes con el resto de la información.

» Realiza dos gráficos de distinto tipo y los utiliza para sostener las argumentaciones. Por ejemplo, realiza uno de barras y otro circular, este último en donde se aprecie que la proporción de las ventas respecto del total es similar todos los trimestres.





Situación 1. Organización de datos, tablas de frecuencias y medidas de tendencia central

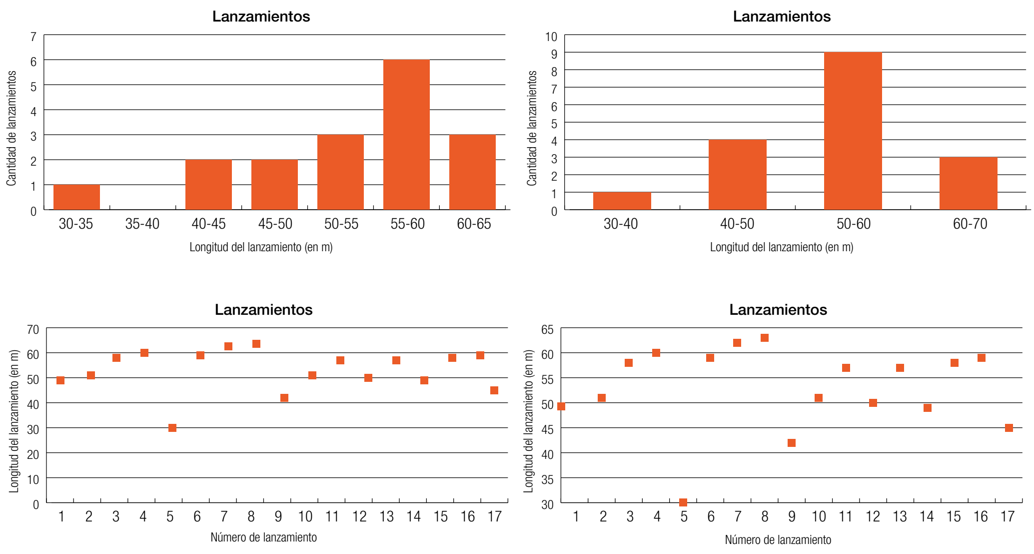
A partir de esta situación se intenta evaluar si el estudiante organiza la información de manera adecuada (por ejemplo, si utiliza una tabla de frecuencias) y si recurre a medidas de tendencia central para analizar la muestra. Se propone evaluar también su posibilidad de analizar la pertinencia de los rangos de las variables según lo que se quiere estudiar.

Durante un día de entrenamiento se midieron las longitudes de todos los tiros que realizó un lanzador de jabalina y se obtuvieron los siguientes datos (expresados en metros): 49; 52; 58; 60; 30; 59; 63; 64; 42; 51; 57; 50; 57; 49; 58; 59; 43.

a) ¿Cuál fue la longitud media de los lanzamientos de ese día?

b) La marca para poder competir en un torneo es de 55 metros. ¿Es posible afirmar que durante ese entrenamiento la mayoría de los lanzamientos que realizó le permitirían clasificar al torneo? ¿Por qué?

c) ¿Cuál de estos gráficos utilizarías para representar las longitudes de los lanzamientos y responder la pregunta b)?



Para el ítem a) se puede observar si el estudiante:

» Realiza una estimación "a ojo" a partir del listado de datos.

- Halla la moda de la distribución, que en este caso no es un buen indicador del valor medio porque solo tiene en cuenta el valor que más se repite.
- Organiza los datos de manera ordenada (de menor a mayor o de mayor a menor) y ubica un valor que divide la muestra en dos partes de manera que cada una no supere la mitad del total (calcula la mediana). Sin embargo, en este caso la mediana tampoco es un buen representante del valor medio de la distribución porque no tiene en cuenta los valores extremos.
- Calcula el promedio de los valores, identificando el término "media" de una muestra con el promedio de sus valores.

Para el ítem b) se puede observar si el estudiante:

- Cuenta la cantidad de lanzamientos que igualaron o superaron los 55 metros, pero obtiene un resultado erróneo que proviene de no haber organizado la información.
- Cuenta la cantidad de lanzamientos que igualaron o superaron los 55 metros y contesta que sí porque son más de la mitad.
- Contesta que no porque el promedio de las longitudes de los lanzamientos (la media de la muestra es 53) está por debajo de la marca requerida.
- Contesta que sí porque al calcular la mediana (57) logra determinar que menos de la mitad de los lanzamientos estuvo por debajo de los 57 metros, lo que garantiza que la mayoría estuvo por encima de los 56 metros.

Para el ítem c) se puede observar si el estudiante:

- Contesta que usaría cualquier gráfico porque todos representan la misma información.
- Contesta que no utilizaría el histograma que agrupa los lanzamientos cada 10 metros porque no diferencia los mayores que 55 metros, reconociendo que esta diferenciación es importante en la situación planteada.
- Contesta que no utilizaría el tercero de los gráficos porque hay una zona "desperdiciada", ya que los lanzamientos nunca fueron por debajo de los 30 metros, y no está marcado el número 55 en el eje vertical. Puede advertir, en cambio, que en el cuarto gráfico se percibe mejor la diferencia de las longitudes de los lanzamientos y cuáles fueron mayores a 55 metros.

Situaciones didácticas e intervenciones docentes

Introducción

En este apartado se presentan situaciones de enseñanza acompañadas de un análisis matemático y didáctico focalizado en las intervenciones docentes que puedan resultar fértiles para lograr aprendizajes en los estudiantes. Estas situaciones no constituyen una secuencia de actividades, sino que son ejemplos de algunos problemas que se pueden trabajar en clase. Ciertamente, pueden formar parte de una secuencia que sería necesario construir a partir de ellos, sumando otras situaciones que los enriquezcan, completen y diversifiquen, teniendo en cuenta que cada situación, cada grupo de alumnos y cada institución son particulares.

Para los fines de este documento se han seleccionado problemas, que, en su mayoría, responden al propósito de introducir a los estudiantes en un tipo de situación que los desafiará a construir nuevos conocimientos. Por consiguiente, están previstos como uno de los primeros acercamientos al objeto matemático que se intenta que aprendan. Claro está que el aprendizaje no se da como consecuencia de resolver solamente uno o dos problemas referidos a un concepto. Es necesaria una interacción sostenida del alumno con distintos problemas que requieran de ese objeto, así como instancias de trabajo individual donde reinvertir los conocimientos, sistematizaciones, momentos de estudio individuales y colectivos, etc. Ubicar los conocimientos en la perspectiva de un proceso es central para organizar la tarea de enseñanza. Por estas razones, los problemas presentados junto con instancias de trabajo posterior no agotan la cantidad ni el tipo de trabajo que es necesario que se despliegue en las aulas.

Como parte de la propuesta didáctica se presenta la organización de la clase prevista para la resolución de cada problema. Las distintas modalidades –individual, en parejas, en pequeños grupos, trabajo colectivo– dependen del trabajo matemático que propone cada problema, de los conocimientos que moviliza y de las interacciones que el docente planifica promover.

En algunos casos se propone un trabajo individual para que el alumno intente resolver a partir de sus conocimientos disponibles. Las resoluciones o relaciones que un estudiante elabore a partir del trabajo con el problema serán un insumo para el debate con otros. De esa forma, cada uno llega al grupo con algunas hipótesis que puede poner a consideración de los demás.

Otros tipos de situaciones que generalmente demandan un trabajo individual son los de reinversión, es decir aquellos que requieren de conocimientos ya trabajados y con los que se busca que el estudiante logre una mayor familiarización. Estos pueden ser propuestos para trabajar en la escuela o como tarea.

Cuando los problemas son más complejos y, por lo tanto, se espera que su resolución requiera del intercambio con otro, se sugiere trabajarlos en parejas o pequeños grupos. Se crea así un espacio para que los estudiantes expliciten sus conocimientos y compartan estrategias.

Las instancias colectivas tienen diferentes propósitos. En algunos casos se proponen como un momento para socializar ciertos conocimientos, estrategias o recordar definiciones o propiedades necesarias para resolver un problema en particular. Las estrategias que el profesor elige socializar son aquellas que mejor se adaptan al propósito de la clase y a lo próximo por aprender. Como espacio de trabajo, estas instancias no consisten en un momento de corrección donde todos los alumnos cuentan cómo pensaron y resolvieron una situación, sino que se trata de promover un intercambio que permita focalizar en aquellas estrategias y/o resoluciones que se quiere destacar y retener, según el proyecto de enseñanza.

En otras ocasiones, se plantean problemas para resolver de manera colectiva. En general, estas situaciones proponen reutilizar conocimientos previamente construidos, promueven nuevas reflexiones y relaciones, ayudan a sistematizar propiedades y relaciones trabajadas, etc. La planificación de estas instancias debe ser cuidadosa para que convoque a todos los alumnos y no se transforme en un intercambio con unos pocos. En función de su estado de conocimiento, algunos podrán aportar más a la discusión, otros plantearán preguntas o dudas, el profesor podrá difundir aquellas estrategias que considera deben ser retenidas, mientras que algunos estudiantes podrán adoptar procedimientos de resolución propuestos por otros. El intercambio colectivo también es un espacio propicio para analizar estrategias vinculadas a concepciones erróneas habituales de los estudiantes. La explicitación de los errores y el análisis que aporte a comprender por qué no resulta una resolución correcta permite delimitar el campo de validez de un conocimiento, así como las estrategias más adaptadas para resolver problemas que requieren de él.

La enseñanza de la matemática exige al docente la gestión colectiva de la clase, pero también organizar el estudio de los alumnos de manera que, progresiva e individualmente, puedan asumir cada vez mayores responsabilidades en cuanto a su desempeño como estudiantes. De tal modo, enseñar a estudiar matemática es una tarea transversal a todos los contenidos de la asignatura, que supone la definición de momentos para la exploración de situaciones y formulación de hipótesis, su puesta a prueba en el grupo y la comparación con estrategias de resolución alternativas, el análisis de diferentes tipos de errores y también aquellos espacios destinados a la generalización e institucionalización de los saberes, así como el trabajo individual destinado a la reinversión de los conocimientos alcanzados en nuevos contextos. En función de esto, es fundamental planificar el desarrollo de las diversas instancias para organizar las tareas del aprendizaje, permitiendo a cada estudiante profundizar o detenerse en cada una de ellas según vaya siendo necesario. A lo largo de este apartado se proponen ejemplos de intervenciones destinadas a gestionar los espacios colectivos de trabajo, previendo el carácter heterogéneo de los conocimientos alcanzados por los estudiantes, y atendiendo, a la vez, a la importancia que revisten para el logro de los aprendizajes propuestos.

Contenidos y aspectos de la enseñanza trabajados en este apartado

Números y álgebra
- Información que porta un cálculo o una expresión
  - Leer información que porta un cálculo o una expresión
  - Transformar una expresión para que se puedan leer relaciones e información
  - Producir una expresión o una fórmula para expresar relaciones e información
- Cálculos y operaciones en los conjuntos de los Números Naturales, Enteros y Racionales
  - En el conjunto de los Números Enteros
  - En el conjunto de los Números Racionales

Funciones y álgebra
- Aproximación a las funciones a través de gráficos cartesianos
  - Análisis de la variación de una variable en función de otra variable
  - Relación entre una tabla de valores, el gráfico cartesiano y una situación
- Función lineal y ecuación de la recta
  - Fórmulas para describir procesos de variación uniforme
  - Gráficos de funciones lineales y ecuación de la recta
- Ecuaciones e inecuaciones
  - Resolución algebraica de ecuaciones
  - Resolución algebraica y gráfica de problemas que se modelizan con ecuaciones o inecuaciones lineales con una variable

Geometría y medida
- Estudio de triángulos
  - Construcción y congruencia de triángulos
  - Semejanza de triángulos
- Estudio de cuadriláteros
  - Construcción de cuadriláteros
  - Congruencia de cuadriláteros
  - Ángulos entre paralelas
- Áreas de triángulos y cuadriláteros
  - Comparación de áreas de triángulos y cuadriláteros
  - Construcción de figuras a partir de condiciones sobre su área
  - Estudio de la variación de áreas de figuras en función de la variación de alguna de sus medidas

Estadística y probabilidades
- Lectura, interpretación y producción de representaciones gráficas
- Análisis y descripción de datos

Números y álgebra

Información que porta un cálculo o una expresión

La transición entre la aritmética y el álgebra constituye uno de los contenidos centrales de la escuela secundaria. Como ya se ha mencionado, las prácticas algebraicas comienzan a desarrollarse desde el segundo ciclo de la escuela primaria y continúan durante todo el nivel medio.

Para poder monitorear la evolución de estos aprendizajes de los estudiantes es posible partir del trabajo con la divisibilidad, dando lugar al análisis de la información que porta la estructura de un cálculo para decidir si es divisible por ciertos números enteros, la determinación del resto sin recurrir a la resolución de cuentas, la transformación de cálculos para potenciar la lectura de la información que es posible obtener de ellos, así como avanzar en la producción de fórmulas para contar. Como podrá notarse, se trata de relevar aprendizajes correspondientes a contenidos que están especificados para el Ciclo Básico de la escuela secundaria en el Diseño Curricular.

Teniendo en cuenta que estas prácticas toman como punto de apoyo las prácticas aritméticas pero al mismo tiempo implican una ruptura con ellas, resulta imprescindible que las propuestas de enseñanza tomen a su cargo la transición. Es en este sentido que, por ejemplo, los problemas ligados a la lectura de la información que porta un cálculo resultan propicios para que los alumnos transiten estas rupturas y continuidades. Por ejemplo, para que los alumnos decidan si el resultado del producto $21 \cdot 77$ es múltiplo de 3, no se espera que realicen el cálculo y luego dividan el resultado por 3 para saber si tiene resto 0. Si bien se trata de una resolución correcta que vive en el campo de la aritmética, desde una práctica algebraica se pretende que los estudiantes descompongan el producto de manera que aparezca un 3 en la factorización $(3 \cdot 7 \cdot 77)$ y que, a partir de allí, puedan "leer" que el resultado es múltiplo de 3. No se trata entonces de resolver el cálculo, sino de transformarlo en uno equivalente que permita leer cierta información que porta. Aun cuando estas situaciones se basan muchas veces en el análisis de cálculos numéricos, el tipo de trabajo que se propone hacer está más vinculado al álgebra que a la aritmética.

Intervenciones de enseñanza

A continuación se proponen diversos problemas acompañados de posibles resoluciones con el objetivo de ofrecer intervenciones de enseñanza que puedan promover una evolución en los aprendizajes de los estudiantes.

Para organizar la presentación, las situaciones se han clasificado según su resolución suponga *leer información que porta un cálculo o una expresión, transformar una expresión para que se pueda leer información* o *producir una expresión o una fórmula para expresar información*. Sin embargo, cabe aclarar que estas tres acciones no son excluyentes en la práctica algebraica sino que, muchas veces, operan de manera conjunta, incidiendo una sobre la otra.

Leer información que porta un cálculo o una expresión

Se espera que cada estudiante sea capaz de determinar:

- Si el resultado de un cálculo es múltiplo de un número cuando ese número y/o un múltiplo de él se encuentran escritos explícitamente en el cálculo.
- Cuál es el resto de dividir el resultado de un cálculo por un número cuando el divisor y/o un múltiplo de este se encuentran escritos explícitamente en el cálculo.

Problema

Sin hacer cuentas de dividir, indicá:

a) si $3 \cdot 14 \cdot 17$ es múltiplo de 3;

b) si $3 \cdot 14 \cdot 17$ es múltiplo de 7;

c) si $3 \cdot 14 \cdot 17 + 7$ es múltiplo de 7;

d) cuál es el resto de dividir a $3 \cdot 14 \cdot 17 + 8$ por 7.

Explicá cómo pensaste cada ítem.

Uno de los propósitos de esta actividad es que los alumnos comiencen a leer información que porta un cálculo en términos de múltiplos o restos de una división entera. La restricción de no poder resolver las cuentas lleva a que sea necesario desarrollar estrategias diferentes de las aritméticas.

Un escenario posible de trabajo puede consistir en proponer a los estudiantes que resuelvan en parejas la parte a), para luego plantear un espacio de discusión colectiva. El propósito de plantear una puesta en común antes de que terminen de resolver los cuatro ítems consiste en recordar la noción de múltiplo, socializar estrategias de resolución para que sean compartidas por la clase y analizar por qué se pide que no resuelvan cálculos. Para aquellos que presentan más dificultades, esta instancia puede permitirles adoptar una estrategia de otro estudiante y reutilizarla en los apartados siguientes del problema o en otras situaciones semejantes a esta.

Durante la etapa de exploración y resolución es importante que el profesor recorra los grupos para detectar cuáles son los estudiantes que no logran encontrar una estrategia de resolución que no apele a resolver el cálculo. Una intervención posible consiste en ayudarlos a caracterizar a los múltiplos de 3 como aquellos números que pueden expresarse como el producto entre 3 y un número entero. En caso de ser necesario, puede proponer analizar si el resultado de $3 \cdot 14$ es múltiplo de 3.

En cuanto a la noción de múltiplo, una posibilidad es darle sentido a partir de retomar la relación entre la multiplicación y la división. Por ejemplo, al preguntar qué información es posible obtener a partir del cálculo $3 \cdot 10 = 30$ se podrá plantear afirmaciones como las siguientes:

- 30 está en la tabla del 3 porque puede escribirse como el producto entre 3 y 10.
- 30 está en la tabla del 10 porque puede escribirse como el producto entre 10 y 3.
- 3 entra 10 veces en 30, porque son necesarios diez 3 para obtener 30.
- 30 es divisible por 3.
- El resto de la división entre 30 y 3 es 0.
- 10 entra 3 veces en 30, porque son necesarios tres 10 para obtener 30.
- 30 es divisible por 10.
- El resto de la división entre 30 y 10 es 0.
- 30 es múltiplo de 3.
- 30 es múltiplo de 10.

Así, un producto comienza a dar más información que la de un cálculo y su resultado. En cuanto a las estrategias de resolución, interesa retener la que afirma que $3 \cdot 14 \cdot 17$ es múltiplo de 3 porque es el producto entre 3 y un número entero, $14 \cdot 17$. Se trata de una forma de resolución que no requiere saber cuál es el producto ni hacer divisiones para asegurarse de que el resto sea cero.

El listado de afirmaciones puede quedar en el pizarrón o en un cartel para que los estudiantes lo consulten mientras resuelven.

Luego de la puesta en común, los estudiantes pueden resolver la parte b) del problema en parejas. Es esperable que haya alumnos que respondan que $3 \cdot 14 \cdot 17$ no es múltiplo de 7 porque ese número no es uno de los factores. Otros podrán afirmar que es múltiplo de 7 porque hay un 14, aunque es posible que no puedan validar por qué es así.

En la puesta en común resulta importante mostrar que la descomposición en factores del 14 es necesaria[13] para poder argumentar que el producto es múltiplo de 7:

Como $3 \cdot 14 \cdot 17 = 14 \cdot 3 \cdot 17 = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17$, entonces el producto es múltiplo de 7 debido a que 7 es uno de sus factores.

[13] La necesidad de mostrar explícitamente el factor 7 depende de cuál haya sido el recorrido de la clase. Si ya se trabajó que si uno de los factores es múltiplo de 7, entonces el producto también lo es, entonces no resulta necesario hacerlo.

A partir de la conclusión anterior es posible generalizar la propiedad para enunciar que:

> Si en un producto uno de los factores es múltiplo de 7, entonces el resultado también lo será.

Esta propiedad es verdadera porque si un factor es múltiplo de 7 entonces puede descomponerse como el producto entre 7 y un número entero, por lo que 7 será un factor.

Cabe aclarar que la estrategia de descomposición supone una ruptura con las prácticas aritméticas, ya que en un sentido invierte la lógica de resolución. En una resolución aritmética las expresiones se "achican" en cada paso. Por el contrario, la estrategia de descomposición supone "agrandar" la expresión para poder resolver.

El ítem c) agrega una nueva dificultad, pues se trata ahora de analizar si un cálculo de dos términos es o no múltiplo de un número.

Se puede solicitar a los estudiantes que resuelvan este ítem en parejas para luego poner en común las estrategias. Es esperable que los alumnos puedan reutilizar los procedimientos que se socializaron en las instancias colectivas anteriores.

Una forma de resolución posible consiste en utilizar lo que se sabe a partir del ítem b), que es que $3 \cdot 14 \cdot 17$ es múltiplo de 7. Al sumarle 7 se obtiene el siguiente múltiplo de 7, es decir que $3 \cdot 14 \cdot 17 + 7$ es múltiplo de 7.

Para quienes sepan sacar factor común, podrán expresar el cálculo como el producto entre 7 y un número entero:

$$3 \cdot 14 \cdot 17 + 7 = 7 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 17 + 1)$$

Es probable que algunos estudiantes respondan que se trata de un múltiplo de 7 pero no por razones correctas. Por ejemplo, podrían afirmar que se debe a que hay un 7 en cada término (el del 17 y el del 7).

En el trabajo colectivo resulta importante, entonces, que se dejen registradas al menos las dos estrategias correctas y una incorrecta, explicando por qué lo son.

Una generalización para tratar en este momento es que la suma o la diferencia de múltiplos de 7 es múltiplo de 7, y que también es válida para cualquier otro número natural. Las estrategias de resolución discutidas a propósito del ítem c) pueden servir como esbozo de justificación.

En el caso del ítem d) se agrega una nueva tarea, la de analizar el resto de dividir al resultado de un cálculo por un número. Para la resolución de este problema se les puede proponer a las parejas que intenten resolverlo en un tiempo corto.

El propósito de la tarea consiste en reconocer que el resto que resulta de dividir al resultado de un cálculo por 7 es la cantidad de unidades que ese número se pasa del mayor múltiplo de 7 menor o igual que él. Se trata de una noción de resto que puede ser trabajada desde la recta numérica, un soporte importante a la hora de resolver este tipo de problema.

En este caso, el primer término de la suma es un múltiplo de 7, tal como fue analizado en el ítem b). También se sabe que $3 \cdot 14 \cdot 17 + 7$ es múltiplo de 7. Luego, a partir de la transformación $3 \cdot 14 \cdot 17 + 8 = 3 \cdot 14 \cdot 17 + 7 + 1$ puede leerse que el cálculo está compuesto por la suma entre un múltiplo de 7 (la suma de los dos primeros términos) y 1 –menor que 7–, lo cual implica que el resto de la división por 7 es 1.

Como cierre de la actividad, se podrían sistematizar y generalizar las relaciones y estrategias de resolución puestas en juego en estos problemas para ser registradas en las carpetas.

Resulta necesario hacer una aclaración con respecto al nivel de generalidad de las conclusiones que se proponen, ya que están estrechamente vinculadas a los tipos de problemas propuestos. Por ejemplo, en los dos últimos ítems resulta una estrategia exitosa determinar en un primer momento si uno de los términos es múltiplo de un número, para luego pasar a analizar el término restante.

De la expresión $a \cdot b = c$, donde a, b y c son números enteros, se puede concluir que c es múltiplo de a y de b.
También, si a y b son distintos de 0, se puede afirmar que a y b son divisores de c.
Ejemplos:

- Como $15 \cdot 7 = 105$, 105 es múltiplo de 15 y de 7. Además, 5 y 7 son divisores de 105.
- El resultado de $15 \cdot 6$ es múltiplo de 15 y de 6.

En cálculos que tengan dos términos
Para determinar si el resultado de un cálculo es múltiplo de un número o para calcular el resto de dividir al resultado de ese cálculo por un número, puede ser conveniente analizar cada término por separado.
Ejemplos:

- El resultado de $13 \cdot 9 + 9$ es múltiplo de 9 porque tanto $13 \cdot 9$ como 9 lo son. También se puede decir que como $13 \cdot 9$ es múltiplo de 9, al sumarle 9 se obtiene el próximo múltiplo de 9. Otra opción es transformar el cálculo de modo que quede escrito como el producto entre 9 y un número entero, por ejemplo $13 \cdot 9 + 9 = 9 \cdot (13 + 1) = 9 \cdot 14$.
- El resto de dividir el resultado de $13 \cdot 9 + 10$ por 9 es 1 porque $13 \cdot 9$ es múltiplo de 9 y al sumarle 10 se pasa 1 del próximo múltiplo de 9. Al transformar la escritura del cálculo como $13 \cdot 9 + 10 = 13 \cdot 9 + 9 + 1$ puede leerse que el resultado es un número que se pasa 1 unidad de un múltiplo de 9 (los dos primeros términos), por lo que el resto de la división por 9 es 1.

Resulta importante recordar la necesidad de plantear nuevas situaciones para su resolución posterior e individual. La sistematización grupal no resulta suficiente para que esas conclusiones queden efectivamente disponibles para todos los estudiantes. Se trata, más bien, de una instancia en la que el docente dirige la mirada de los alumnos hacia aquello que es importante retener. Para que un conjunto de conocimientos esté disponible para un alumno hacen falta varias instancias de contacto con el contenido a aprender, en las que el estudiante explora y prueba nuevamente las estrategias o prácticas trabajadas hasta tanto pasan a ser parte de su propio bagaje.

En los siguientes problemas se presentan situaciones en las que interviene una variable. Ya no se trata de leer información que porta un cálculo con un resultado particular, que habilita una resolución aritmética, sino que la presencia de una variable hace que necesariamente avance el tipo de resolución. Aun en el caso en que los alumnos decidan sustituir el valor de la variable por algunos valores, se trata de una estrategia que implica reconocer que una variable puede tomar diferentes valores.

Problemas

En los siguientes problemas, n y m representan números enteros.

1. Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para cualquier valor de n. Fundamentá tu respuesta.

   a) $15 \cdot n + 3$ es múltiplo de 3.

   b) $3 \cdot n + 10$ tiene resto 1 al dividirlo por 3.

2. Determiná todos los valores de m para los cuales $5 \cdot m + 3$ es un número impar. Explicá cómo lo pensaste.

En pequeños grupos, se puede sugerir a los estudiantes que resuelvan la parte a). Si la clase no ha tenido otras experiencias de trabajo con variables, resultará importante observar si logran iniciar una exploración o si resulta necesario pensar en conjunto acerca de las letras. En una primera instancia alcanza con que los estudiantes comprendan que la letra representa un número entero cualquiera, es decir que puede tomar diferentes valores.

Luego de un tiempo de exploración es posible proponer un espacio de discusión colectiva. En caso de que algunos grupos no logren avanzar, el docente podrá sugerirles que reemplacen a la variable por distintos valores para estudiar casos particulares, luego intentar generalizar qué sucede para todos los valores que representa la variable y, por último, ensayar algún tipo de validación.

En cuanto a la sustitución por valores, es posible diferenciar al menos dos tipos. En un caso, el alumno sustituye por números aleatorios, lo cual muchas veces dificulta comprender cierta generalidad. Por ejemplo, al sustituir a n por 28, 47 y 108, se obtiene:

n	$15n + 3$	¿Es múltiplo de 3?
28	423	Sí
47	708	Sí
108	1623	Sí

Muchos estudiantes generalizarán a partir de estos tres casos que $15n + 3$ es siempre múltiplo de 3, pero la exploración que realizaron no les da ningún indicio para saber por qué sucede eso ni si es verdad para todos los valores de n.

Si, en cambio, se realiza una exploración controlada, por ejemplo asignando valores consecutivos a n, a veces se podrá obtener más información. En el caso de los estudiantes que solo prueben con valores aleatorios, es el docente quien puede sugerir que ensayen con valores consecutivos. Por ejemplo:

n	$15n + 3$	¿Es múltiplo de 3?
28	423	Sí
29	438	Sí
30	453	Sí

Si el alumno analiza los valores que obtiene para $15n + 3$, probablemente determine que aumentan de a 15 unidades por cada una que aumenta n. A partir de esta relación y combinando el análisis con el cálculo propuesto, será posible vincular el aumento de 15 en 15 con el factor que multiplica a n. El profesor puede ofrecer escrituras que expliciten estas relaciones. Por ejemplo:

n	$15n + 3$
28	$15 \cdot 28 + 3$
29	$15 \cdot 29 + 3 = 15 \cdot 28 + 15 + 3 = 15 \cdot 28 + 3 + 15$
30	$15 \cdot 30 + 3 = 15 \cdot 29 + 15 + 3 = 15 \cdot 28 + 3 + 15 + 15$

Esta última intervención permite traccionar hacia la escritura y lectura de información que porta un cálculo, que en este caso consiste en interpretar que cuando n es 28 se obtiene un múltiplo de 3 –es la suma de dos múltiplos de 3– y los valores sucesivos se obtienen sumando 15, que también es un múltiplo de 3. Si bien el análisis está hecho para un valor particular de n, es válido para cualquier otro. Se trata de un buen inicio hacia una validación.

Si no surgiera el análisis de la expresión por parte de los estudiantes, el docente puede proponerlo, asegurándose de que quede registrado en el pizarrón y en las carpetas:

Si n representa un número entero, $15n$ representa un múltiplo de 15 y, por lo tanto de 3:

$$15n = 3 \cdot 5 \cdot n$$

Entonces, $15 \cdot n + 3$ es la suma de dos múltiplos de 3, por lo que será múltiplo de 3.

Parte de la reflexión durante el espacio colectivo puede apuntar a pensar acerca del tipo de explicación que involucran estos problemas. No aporta mucho al desarrollo de los conocimientos contestar por sí o no, sino que el compromiso cognitivo es mucho mayor al tener que dar explicaciones sobre los modos de resolución adoptados. Este tipo de intervenciones abona a construir un tipo de práctica de la que la validación forma parte esencial.

Al finalizar la puesta en común de la parte a), los estudiantes podrán continuar con la resolución en parejas de la parte b) del problema. Se espera que puedan reinvertir el trabajo realizado a propósito de la parte a). Entre las estrategias que probablemente desplieguen está el ensayo con valores –controlado o no–, y la transformación y la lectura de la expresión.

El docente podrá intervenir con aquellas parejas que hagan ensayos de valores aleatorios y solicitarles que intenten explicar por qué la relación que encuentran podría ser válida para cualquier otro valor de la variable. Si los ensayos son controlados, también es importante que intenten algún tipo de validación que les permita explicar la validez general de su afirmación.

Como parte de la puesta en común se espera que se discuta y registre un razonamiento similar al siguiente:

Dada la expresión $3 \cdot n + 10$, para analizar qué resto tiene al dividirla por 3 es necesario saber cuántas unidades se pasa de un múltiplo de 3. Para ello, es posible transformar la escritura: $3 \cdot n + 10 = 3 \cdot n + 9 + 1$. Como $3 \cdot n$ y 9 son múltiplos de 3, también lo es $3 \cdot n + 9$, entonces $3 \cdot n + 10 = 3 \cdot n + 9 + 1$ tiene resto 1 al dividirlo por 3.

El problema 2 propone una tarea un tanto diferente, que consiste en analizar la paridad de una expresión. En este caso no necesariamente se trata de analizar si la expresión puede transformarse de modo que quede escrita como un múltiplo de 2 más 1, sino que los estudiantes pueden apelar a otras propiedades que vinculan a los números pares e impares. Entre ellas están las siguientes:

- la suma de dos números pares o dos impares es par;
- el producto de un par y un impar es par;
- el producto de dos impares es impar.

Mientras los alumnos trabajan en pequeños grupos y el docente recorre el aula, es importante que esté atento al tipo de resolución que propongan. Si se basan en sustituir a la variable por distintos valores, puede preguntarles si se animan a hacerlo de otra forma. Luego de unos minutos de exploración, el profesor podrá proponer una puesta en común.

Se espera que algunos alumnos afirmen que la expresión siempre es impar porque los números que contiene son impares, otros generalizarán a partir de casos particulares, mientras que algunos intentarán analizar la expresión leyendo la información que porta.

Hay, en este caso, lecturas correctas que los estudiantes podrían hacer pero que no aportan mucho a la resolución. Por ejemplo, es posible que digan que $5 \cdot m + 3$ es un número que tiene resto 3 al dividirlo por 5, dato que no resulta útil para decidir sobre la paridad del resultado. Algunos podrán afirmar que $5 \cdot m$ es un múltiplo de 5, por lo que termina en 0 o en 5. Si termina en 0, al sumarle 3 dará un número que termina en 3 y por lo tanto impar. Si termina en 5, al sumarle 3 terminará en 8 y el número será par. Una intervención docente posible en este caso consiste en preguntar para qué valores de m se da cada caso. No necesariamente los estudiantes llegarán a determinarlos, pero lo que hagan será un insumo para la puesta en común.

En el espacio de discusión colectiva, el profesor podrá retomar una resolución de cada tipo. Uno de los focos debería ser el de poner en discusión que los ejemplos son útiles para elaborar una conjetura pero no para validar una afirmación. Para esto último pueden retomarse las validaciones que han intentado los alumnos para ponerlas en discusión y, eventualmente, hacerlas evolucionar. También resulta importante dejar registrado en el pizarrón cada una de ellas. Por ejemplo:

- Como $5 \cdot m$ es un múltiplo de 5, termina en 0 o en 5. Si termina en 0, al sumarle 3 dará un número que termina en 3 y por lo tanto impar. Si termina en 5, al sumarle 3 terminará en 8 y el número será par. Para que termine en 0, $5 \cdot m$ tiene que ser par. Como 5 es impar, esto ocurre cuando m es par. Luego, si m es par, $5 \cdot m + 3$ será impar.
- En la suma $5 \cdot m + 3$ interviene un número impar, el 3. Para que el resultado sea impar es necesario que $5 \cdot m$ sea par. Como 5 es impar, el producto será par si m es par.

Resulta importante recordar que las situaciones aquí presentadas no constituyen una secuencia de enseñanza, por lo que no resultan suficientes para que los estudiantes construyan nuevos conocimientos. Es necesario que los alumnos tengan distintas instancias de contacto con el contenido, tanto de trabajo grupal como individual donde puedan reinvertir los conocimientos y prácticas que se discutieron en clase.

Transformar una expresión para que se puedan leer relaciones e información

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Realizar transformaciones de un cálculo para determinar si su resultado es múltiplo de un número o cuál es el resto de dividirlo por ese número.
- Reconocer que una manera de fundamentar afirmaciones consiste en mostrar de forma explícita el divisor y el resto de una división.

A diferencia de las situaciones propuestas y analizadas hasta aquí, a continuación se proponen problemas que incluyen cálculos que requieren ser transformados para leer información que no se encuentra explícita. Si bien en los análisis anteriores se consideraron estrategias de resolución y conclusiones que incluían transformaciones, estas no eran indispensables para resolver los problemas, como sí sucede en las siguientes situaciones.

Problema

Sin realizar los cálculos, indicá:

a) Si $45 \cdot 22$ es múltiplo de 6.

b) Cuál es el resto de dividir a $45 \cdot 22 + 20$ por 6.

Explicá cómo pensaste cada ítem.

Se sugiere proponer a los alumnos que resuelvan la parte a) en parejas. Es posible que varios estudiantes afirmen que $45 \cdot 22$ no es múltiplo de 6 porque ninguno de los factores es 6 ni múltiplo de 6. En ese caso, el profesor puede proponer que realicen el cálculo –aunque el problema pide no hacerlo–. Al obtener que sí es múltiplo de 6, es esperable que se genere en los alumnos una contradicción, que puede funcionar como un motor para buscar razones que den cuenta de por qué sucede esto. En este punto se los puede dejar seguir explorando un momento más y retomar esta situación en la puesta en común.

Posiblemente, otros alumnos reconozcan la necesidad de descomponer los números en factores de la siguiente manera:

$$45 \cdot 22 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11$$

Sin embargo, no necesariamente lograrán “armar” el 6 a partir de usar las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación. Nuevamente, este avance es suficiente para retomar en la puesta en común.

Aquí interesa diferenciar a aquellos estudiantes que descomponen en factores porque no pueden hacer otra cosa de aquellos que lo hacen porque están buscando escribir la expresión como el producto entre 6 y un número entero.

En la instancia de trabajo colectivo se sugiere retomar una resolución de cada tipo para hacerla avanzar y dejarla registrada. Algunos asuntos que resultan importantes para destacar son:

- Hay resultados de cálculos que son múltiplos de 6 aunque ni el 6 ni un múltiplo de 6 sean uno de los factores.
- Si el resultado de un cálculo es múltiplo de 6, entonces siempre es posible transformarlo de modo que quede escrito como el producto entre 6 y un número entero.
- A veces no alcanza solamente con descomponer en factores, sino que es necesario reagruparlos. Por ejemplo:

$$45 \cdot 22 = 3 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 11 = 3 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 11 = 6 \cdot 15 \cdot 11$$

Luego de la puesta en común, puede pedirse a los alumnos que continúen trabajando en parejas para resolver la parte b) del problema. Se espera que los estudiantes puedan reinvertir lo tratado a propósito de los problemas anteriores. Es esperable que ya haya circulado que puede analizarse cada término de una suma por separado para determinar si el resultado es múltiplo de un número. En la parte a) se analizó que $45 \cdot 22$ es múltiplo de 6, por lo que para saber el resto de dividir a $45 \cdot 22 + 20$ por 6 es necesario saber cuántas unidades se pasa 20 de un múltiplo de 6. Otra cuestión que surge para tener en cuenta es que el resto de dividir por 6 tiene que ser menor que 6. Aun así, es esperable que algunos alumnos respondan que el resto es 20. Las diferentes estrategias se retomarán en un espacio de debate colectivo, donde el foco nuevamente se pondrá sobre la transformación del cálculo en otro equivalente de donde se pueda leer el resto de la división por 6:

$$45 \cdot 22 + 20 = 45 \cdot 22 + 18 + 2 = 6 \cdot 15 \cdot 11 + 18 + 2$$

Los dos primeros términos de la suma son múltiplos de 6, el primero por estar escrito como el producto entre 6 y un número entero, mientras que 18 es exactamente divisible por 6. Luego, el resultado del cálculo se pasa 2 unidades de un múltiplo de 6, por lo que el resto al dividirlo por 6 es 2.

Sería importante también reflexionar de manera conjunta sobre la conveniencia de realizar unas transformaciones sobre otras. La práctica de tomar la decisión acerca de qué transformaciones conviene realizar no guarda una relación directa con las prácticas aritméticas. Para realizar cálculos existen algoritmos que aseguran que se arribe al resultado correcto. En cambio, al realizar tratamientos algebraicos, es necesario elegir con algún criterio las técnicas que sirven para resolver la situación en cuestión. Por ejemplo, el cálculo del ítem a) del problema propuesto admite distintas descomposiciones:

$$45 \cdot 22 = 9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 = 3 \cdot 15 \cdot 22 = 3 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 11 = \cdots.$$

Sin embargo, solo algunas de ellas permiten continuar con la resolución para decidir si el resultado es múltiplo de 6. Es necesario descomponer de manera que "aparezcan" factores que permitan "armar" un 6. Es en torno a esta cuestión que se puede reflexionar con los estudiantes sobre la necesidad de que para fundamentar las afirmaciones se debe mostrar el divisor o un múltiplo de él de forma explícita.

Otra práctica algebraica que resultaría provechoso explicitar y poner en cuestión con los estudiantes, en estrecho vínculo con la de tomar decisiones sobre la transformación a realizar, es la de prever la "forma" que debe tener la expresión que permite resolver un problema. En algunos casos, cuando se realizan transformaciones en un sentido algebraico ya se sabe a lo que se quiere llegar. Por ejemplo, el reconocer que a partir de obtener una expresión de la forma 6 · *algún número* se puede deducir que el resultado es múltiplo de 6 resulta de suma importancia para establecer cuáles son las transformaciones convenientes a realizar, entre todas las posibles. Preguntas del tipo "¿cómo te convendría tener escrito el cálculo para afirmar que el resultado es múltiplo de 6?" pueden ayudar a explicitar la forma del "último paso" de la transformación, lo que ayuda a guiar los pasos intermedios.

Cuando se quiere establecer que un número a es múltiplo de un número b puede resultar conveniente expresar al número a como el producto de factores en donde uno de ellos es el número b o un múltiplo de b.

Por ejemplo, se puede establecer que 72 es múltiplo de 6 a partir de escribirlo como el producto $6 \cdot 12$.

Existen muchas maneras de descomponer un número en factores. Por ejemplo:

$$45 \cdot 22 = 9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 = 3 \cdot 15 \cdot 22 = 3 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 11 = \cdots$$

Sin embargo, solamente **algunas de ellas pueden ser útiles** para resolver un problema.

En este caso, para indicar que el resultado de $45 \cdot 22$ es múltiplo de 6 es conveniente realizar la descomposición $45 \cdot 22 = 3 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 11$ y luego multiplicar los factores que "arman" un 6:

$$3 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 11 = 6 \cdot 15 \cdot 11$$

Estas cuestiones, referidas a la anticipación de expresiones a obtener y a la toma de decisiones sobre las transformaciones, se pueden observar también en el contexto del estudio de la variación de áreas de figuras geométricas. Se recuerda que estos problemas pueden resolverse tanto desde el marco algebraico como desde el geométrico. En este apartado solo se considera la resolución algebraica, mientras que la mirada geométrica se retoma más adelante.

Problema

A un triángulo de base b y altura a se le duplica su base sin modificar su altura. ¿Es verdad que su área se duplica?

Se sugiere proponer a los estudiantes que resuelvan este problema en pequeños grupos.

Es esperable que algunos alumnos prueben dibujando uno o más triángulos particulares y calculen las áreas, para generalizar la propiedad para todos. El profesor podrá preguntar cómo pueden asegurarse de que la propiedad es verdadera para otros triángulos diferentes y solicitar que intenten buscar una explicación que no apele a triángulos de los que se conocen ciertas medidas.

Otros pueden intentar diferentes resoluciones involucrando letras, como las siguientes:

- Llaman c y d a la base y a la altura del segundo triángulo, respectivamente, y hallan una expresión para su área: Área del segundo $\triangle = \frac{c \cdot d}{2}$. A partir de esto, algunos dirán que es el doble –seguramente por haber ensayado con casos particulares– o porque aventuran que el área también se duplica. El uso de letras, en este caso, no implica un tratamiento algebraico. La letra solo está usada como una etiqueta, pero no expresa relaciones.
- Otros posiblemente logren expresar la relación entre las bases de los dos triángulos y la utilicen para expresar las áreas de ambos triángulos: Área del primer $\triangle = \frac{b \cdot a}{2}$, Área del segundo $\triangle = \frac{b \cdot 2 \cdot a}{2}$. Mientras que algunos lograrán avanzar para expresar el área del segundo triángulo como el doble del área del primero, otros no sabrán continuar o tal vez simplifiquen el cálculo para obtener $b \cdot a$.

En un espacio colectivo se sugiere retomar estos dos tipos de resoluciones. Si bien la discusión acerca de la insuficiencia de los ejemplos para validar una propiedad no va a quedar saldada en una discusión, resulta importante tomarlo como objeto de reflexión. En este caso, el foco podría ponerse sobre el uso de los ejemplos para formular una conjetura, que luego debe ser validada sin su uso.

En cuanto a las resoluciones que utilizan letras, una de las cuestiones a destacar es que el problema puede resolverse por medio de una modelización algebraica, produciendo una expresión que represente el cálculo del área de uno o de ambos triángulos, para luego transformarla de manera que permita comparar las áreas de ambos. Si bien no se espera que los estudiantes puedan producir esta escritura en una primera instancia, el profesor puede hacerlo interactuando con ellos. Se espera que quede registrado algo similar a lo que sigue:

$$\text{Área del primer } \triangle = \frac{b \cdot a}{2}$$

$$\text{Área del segundo } \triangle = \frac{b \cdot 2 \cdot a}{2} = 2 \cdot \frac{b \cdot a}{2} = 2 \cdot \text{Área del primer } \triangle$$

Si se la analiza desde una lógica aritmética, en esta resolución “hay una cuenta que no se hace”. En alguno de los pasos intermedios se podría simplificar “el 2 que está multiplicando con el 2 que está dividiendo”.

$$\text{Área del segundo } \triangle = \frac{b \cdot a \cdot 2}{2} = 2 \cdot \frac{b \cdot a}{2} = b \cdot a$$

Esta transformación, si bien es correcta, no conduce a obtener una expresión que permita comparar el área de ambos triángulos. Es en este sentido que resulta necesario anticipar la forma de la última expresión, que debe contener el cálculo del área del primer triángulo. Así, prever “a lo que se quiere llegar” permite tomar la decisión de no realizar una transformación que “pierda” el número 2 del denominador.

Este problema, así como tantos otros, es una oportunidad no solo para construir nuevos aprendizajes, sino también para ir delineando una práctica algebraica compartida por la comunidad de la clase.

Producir una expresión o una fórmula para expresar relaciones e información

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

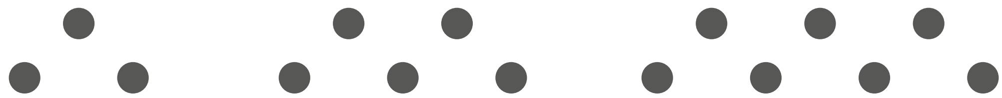
- Producir una fórmula que calcule el paso n de un proceso que cumple una cierta regularidad.
- Validar la equivalencia entre fórmulas apelando al contexto y/o a transformaciones algebraicas.

Hasta ahora, los estudiantes han analizado la información que porta un cálculo y han producido fórmulas conocidas para determinar cómo varían al cambiar los datos. En el problema que se presenta a continuación, la tarea a desarrollar es más compleja. Requiere que los alumnos encuentren una regularidad en el pasaje de una figura a la siguiente, para luego usarla para producir una fórmula.

Problema

La siguiente secuencia de figuras está formada por puntos.

Lugar 1 *Lugar 2* *Lugar 3*



a) Dibujá la figura que se encuentra en el lugar 6.

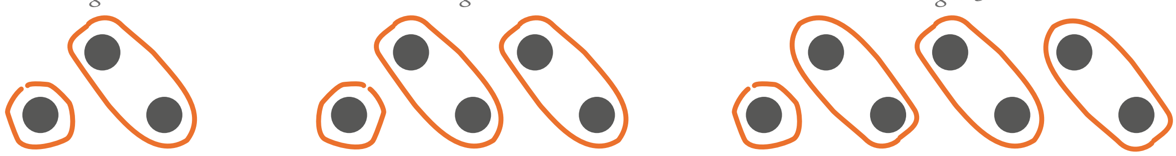
b) Calculá la cantidad total de puntos que hay en la figura que está en el lugar 45 de la secuencia. Escribí el cálculo que usaste para encontrarla.

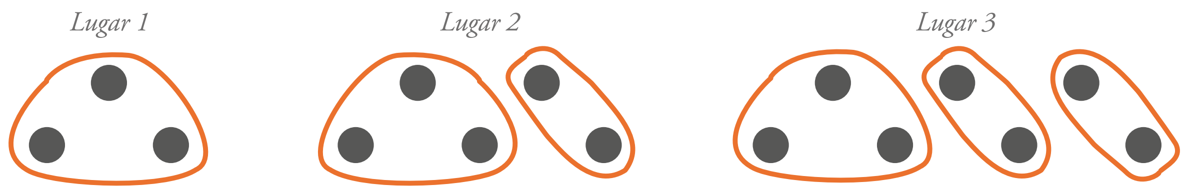
c) Escribí una fórmula que permita encontrar la cantidad total de puntos que tiene la figura que se encuentra en el lugar n de la secuencia.

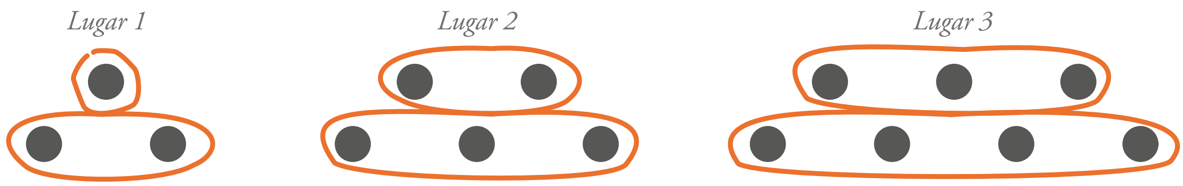
Uno de los propósitos de este tipo de problemas es que los estudiantes reconozcan distintos patrones y reglas de formación de las figuras y generen distintas formas de contar los elementos que forman el paso n del proceso. Tomando como insumo esta diversidad de resoluciones, el docente tiene la posibilidad de compararlas y ponerlas en relación, con el objetivo de analizar la equivalencia entre distintos cálculos o distintas fórmulas, debido a que permiten obtener el mismo resultado para todo valor de la variable.

Para poder resolver el problema que se presenta es necesario que los estudiantes reconozcan algún patrón y establezcan una regla de formación de las figuras. Como esta regla de formación no es explícita ni única, se sugiere invitar a los alumnos a resolver primero el ítem a) en pequeños grupos para, luego de un tiempo de trabajo, establecer acuerdos acerca de las relaciones entre una figura y las que se encuentran en los lugares siguientes. Las descripciones de estas relaciones dependerán de cómo las hayan caracterizado. Por ejemplo:

Lugar 1 *Lugar 2* *Lugar 3*







Uno de los objetivos de la puesta en común es que los alumnos puedan explicitar cómo es la regla de formación de los elementos de la secuencia que han considerado y analizar si la figura que ocupa el sexto lugar cumple con ella. Esto permite poner en escena que hay diferentes formas de considerar la secuencia y que todas son correctas, es decir, que para cada posición, todas permiten obtener la figura correcta.

En este punto, no se espera que la regularidad sea expresada a través de una fórmula, sino que es suficiente con que los estudiantes puedan caracterizar una regla de formación de cada figura en función de la posición que ocupa.

La explicitación de las distintas formas de analizar la regularidad y su registro en el pizarrón y en las carpetas será un insumo importante para que los estudiantes puedan adentrarse en la resolución de la parte b) en pequeños grupos.

En este ítem se pide calcular la cantidad de puntitos que tiene la figura que se encuentra en el lugar 45. El pedido del lugar 45 está relacionado con la dificultad y la falta de economía que implica hacer todos los dibujos hasta llegar a ese, lo que lleva a la necesidad de encontrar una manera general de contar relacionada con la regularidad establecida. Se solicita, además, que se escriba el cálculo utilizado como una base para después pensar en una fórmula general.

Esta actividad requiere volver sobre la anterior, aunque en ella no se trataba de contar puntitos sino de dibujar una figura. A pesar de ello, las distintas figuras y la forma de considerar la regularidad permitirán elaborar estrategias para contar la cantidad de puntitos. Es posible que algunos estudiantes –implícita o explícitamente– consideren que la cantidad de puntitos es directamente proporcional a la posición, y, por ejemplo, multipliquen la cantidad de puntitos que hay en el primer lugar por 45. En este caso, el docente podría preguntar cómo pueden asegurar que esa estrategia funciona. Si los alumnos no logran explicarlo, se les puede sugerir que se fijen si resulta válida para los ejemplos que tienen dibujados.

Se espera que otros estudiantes se apoyen en la regularidad que observaron en la parte a) para determinar el cálculo que permite hallar la cantidad de puntitos. Si alguno presentara dificultades para hacerlo, el docente puede sugerir contar la cantidad de puntitos que tiene alguna de las figuras ya dibujadas, sin hacerlo uno por uno, describiendo un procedimiento con palabras. Por ejemplo, en relación con la tercera forma de contar, un alumno podría establecer que la cantidad de puntitos del lugar 6 se puede calcular con la cuenta $6 + 7$, debido a que la cantidad de puntitos en la fila de arriba coincide con el número del lugar, y la fila de abajo siempre tiene uno más. Esto le posibilitaría contar la cantidad de puntitos del lugar 45 mediante el cálculo $45 + 46$.

Un estudiante que haya contado como la primera forma propuesta pudo haber hecho el cálculo $1 + 45 \cdot 2$, mientras que otro que haya contado según la segunda forma haya realizado $3 + 44 \cdot 2$.

Luego del trabajo de los alumnos con el ítem b), resulta necesario realizar una puesta en común con el propósito de comparar y poner en relación los distintos cálculos que se hayan generado en las resoluciones y estudiar la equivalencia entre ellos.

Un primer punto a retomar es el de la proporcionalidad, lo cual no solo es importante para los que la consideraron sino también para el resto. Muchos alumnos utilizan relaciones de proporcionalidad sin asegurarse de que esa es la relación entre las variables en cuestión. En ese sentido, la discusión colectiva permite tratar este asunto con todos. Si no hubiese surgido esta estrategia, el profesor podrá plantearla como objeto de análisis. Podrá decir, por ejemplo:

Algunos estudiantes consideran que un cálculo posible es $3 \cdot 45$.
¿Creen que es correcto?

Luego de explicitar que ese cálculo implica considerar una relación de proporcionalidad, el docente puede, junto con los alumnos, analizar si efectivamente esa relación es la que vincula estas variables: puede proponer calcular la cantidad de puntitos de las figuras 3 y 6. Si hubiera una relación de proporcionalidad, en ese lugar debería haber el doble de puntitos que en el lugar 3, cosa que no ocurre. A partir de esto puede registrarse la siguiente conclusión:

> Antes de considerar que una relación es de proporcionalidad directa, es necesario asegurarse de que efectivamente lo es. Si para un par de valores no se cumple alguna propiedad, por ejemplo, que al doble de un valor le corresponde el doble del otro, entonces no es una relación de proporcionalidad directa.

Los cálculos correctos que se deberían considerar son: $1 + 45 \cdot 2$, $3 + 44 \cdot 2$ y $45 + 46$.

Los tres cálculos son equivalentes porque dan el mismo resultado: 91. Pero también se puede establecer su equivalencia por medio de transformaciones que utilizan propiedades:

$$1 + 45 \cdot 2 = 1 + 2 + 44 \cdot 2 = 3 + 44 \cdot 2$$

$$1 + 45 \cdot 2 = 1 + 45 + 45 = 46 + 45$$

$$3 + 44 \cdot 2 = 3 + 44 + 44 = 1 + 2 + 44 + 44 = 45 + 46$$

Este tipo de análisis puede dar sustento a un posterior trabajo de equivalencia entre fórmulas.

Se espera que la resolución del ítem b) sea un insumo para el c). La forma que cada estudiante haya encontrado para contar la cantidad de puntitos en la figura 45 debería servirle para hallarlos en una figura cualquiera.

A un alumno que no pueda construir la fórmula pero que sí haya podido establecer una manera general de contar se le puede sugerir utilizarla para distintos casos particulares. Por ejemplo, proponerle que cuente la cantidad de puntitos que tiene la figura del lugar 100, la del lugar 200, etcétera, focalizando no en el resultado sino en el cálculo utilizado para obtenerlo.

También es posible que algunos alumnos puedan verbalizar una forma general de contar pero que no logren escribirla como una fórmula. En ese caso, el profesor podrá proponer formas de obtener una fórmula a partir de ellas en la puesta en común.

Es deseable que todos los estudiantes lleguen a la instancia colectiva habiendo hallado una forma general de contar, aunque no hayan logrado escribir una fórmula.

Tomando las tres formas de contar los puntitos expuestas más arriba, los estudiantes podrán formular que la cantidad se obtiene como:

- 1 puntito más grupos de 2 puntitos. La cantidad de grupos coincide con el número de lugar.
- 3 puntitos más grupos de 2 puntitos. La cantidad de grupos es 1 menos que el número de lugar.
- Dos grupos de puntitos: uno con la misma cantidad de puntitos que el número de lugar y otro con 1 puntito más.

Estas formulaciones permiten escribir fórmulas, que en este momento será necesario analizar, teniendo en cuenta si efectivamente traducen las formas de contar descriptas y si su escritura es correcta. El punteo anterior puede entonces completarse con la escritura de las fórmulas.

Hay distintas formas correctas de contar la cantidad de puntitos que hay en una figura. Si n representa el número de lugar, obtenemos:

- 1 puntito más grupos de 2 puntitos. La cantidad de grupos coincide con el número de lugar: $puntitos = 1 + 2 \cdot n$
- 3 puntitos más grupos de 2 puntitos. La cantidad de grupos es 1 menos que el número de lugar: $puntitos = 3 + 2 \cdot (n - 1)$
- dos grupos de puntitos: uno con la misma cantidad de puntitos que el número de lugar y otro con un puntito más: $puntitos = n + (n + 1)$

Una vez analizadas las distintas formas de contar y las fórmulas, se puede establecer que las expresiones son equivalentes porque cuentan "lo mismo", conformando un punto de apoyo en donde basarse para darle sentido a las transformaciones algebraicas. Este es un asunto central de este tipo de actividad. Si las formas de contar son correctas, entonces todas ellas permiten hallar la cantidad de puntitos para una figura determinada. Es decir que para cualquier valor que se le dé a n, los resultados obtenidos a través de cada fórmula serán iguales. La pregunta que surge ahora es:

Si no supiésemos que todas las fórmulas son correctas, ¿hay alguna forma de saber que son equivalentes?

Las transformaciones algebraicas serán la herramienta que permite validar por qué efectivamente las distintas fórmulas son equivalentes. Por ejemplo, al analizar las fórmulas producidas según la tercera y la primera forma de contar, se puede establecer su equivalencia según la siguiente transformación:

$$n + n + 1 = 2 \cdot n + 1 = 1 + 2 \cdot n$$

Apelando a la propiedad distributiva es posible establecer la equivalencia entre las fórmulas producidas según la segunda y la primera forma de contar:

$$3 + 2 \cdot (n - 1) = 3 + 2 \cdot n - 2 \cdot 1 = 3 - 2 + 2 \cdot n = 1 + 2n$$

No resulta simple proponer problemas como los anteriores para ser usados en el aula sin saber cuál fue el recorrido de cada curso. El conjunto de experiencias matemáticas transitadas por cada grupo de alumnos hace que la planificación de la clase varíe. Ciertamente también depende de los conocimientos que los estudiantes tengan disponibles a la hora de enfrentarse a cada problema y si han trabajado con letras o no.

Si estas situaciones son las primeras en las que se propone un trabajo con variables, entonces no se espera que los alumnos produzcan fórmulas y validaciones correctas[14] de manera autónoma. En este caso se propone un trabajo colectivo que se apoye en las relaciones que los estudiantes hayan establecido para contar la cantidad de puntitos que tiene una figura determinada. Por otro lado, tampoco se espera que, de manera individual, muestren la equivalencia entre distintas fórmulas. Por el contrario, se trata de analizar que tienen que ser equivalentes por apoyarse en maneras correctas de contar los puntitos, para luego validarlo colectivamente a través de transformaciones algebraicas.

Para los que hayan tenido experiencias de trabajo con letras, resulta importante recordar que el trabajo algebraico se desarrolla a través de toda la escuela secundaria. Por eso no resulta suficiente con haber propuesto algunos problemas, sino que es necesario revisitar y reconfigurar las prácticas que se van desarrollando. En este caso, es posible que los estudiantes puedan avanzar más durante el espacio de resolución. La reflexión colectiva puede retomar la necesidad del uso de letras, discutir acerca de las distintas escrituras, volver a pensar acerca de la equivalencia entre expresiones y cómo validarlas, etcétera.

Cálculos y operaciones en los conjuntos de los Números Naturales, Enteros y Racionales

Otro de los asuntos cruciales de los que debe ocuparse la escuela secundaria consiste en profundizar los conocimientos de los estudiantes sobre los distintos conjuntos numéricos. El trabajo se enfoca en las características y propiedades de cada conjunto, así como sobre el desarrollo de estrategias de cálculo mental, estimación de resultados de cálculos, y el uso de la calculadora. En todos los casos, se trata de utilizar propiedades de las distintas operaciones y argumentar las producciones.

Los conocimientos acerca de los conjuntos numéricos y las operaciones se verán atravesados por los algebraicos, en tanto herramienta que contribuyen al tratamiento de lo general, como las propiedades de las operaciones.

Intervenciones de enseñanza

A continuación se proponen diversos problemas acompañados de posibles resoluciones con el objetivo de ofrecer intervenciones de enseñanza que promuevan la evolución de los aprendizajes por parte de los estudiantes. Para organizar la presentación, las situaciones se clasificaron en cálculos y operaciones *en el conjunto de los Números Enteros* y *en el conjunto de los Números Racionales*.

[14] Teniendo en cuenta que el aprendizaje de la validación se da a lo largo del tiempo, no se esperan "demostraciones" correctas. Se trata de que los estudiantes se vayan haciendo cargo de la responsabilidad de dar cuenta de las relaciones e intenten explicarlas.

En el conjunto de los Números Enteros

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Resolver operaciones con números enteros, en diferentes contextos y/o utilizando la recta numérica.
- Estimar el resultado de un cálculo con números enteros sobre la base del análisis de los números implicados.
- Determinar el dominio de validez de relaciones de orden y distancias.
- Determinar el dominio de validez en raíces de argumento entero e índice natural.

Problema

Un día de invierno la temperatura es de 4 grados bajo cero a la mañana y al mediodía es de 9 grados más.

a) ¿Cuál es la temperatura al mediodía?

b) Indicá cuál de estos cálculos permite saber la temperatura al mediodía. Explicá cómo lo pensaste.

i) $4 + 1$
ii) $-4 + 9$
iii) $4 + 9$

Uno de los propósitos de este problema es que los estudiantes tengan la oportunidad de relacionar las operaciones entre números enteros con un contexto extramatemático. Al mismo tiempo, al tratarse de una situación vinculada a la temperatura, se les brinda la posibilidad de apoyarse en una representación vinculada a la recta numérica, como lo es un termómetro.

El profesor puede pedir a los estudiantes que resuelvan el problema en parejas.

Es posible que en el ítem a) algunos alumnos contesten que la temperatura es de 13 grados al mediodía, pensando en que, como aumenta, deben sumar los números y el resultado debe ser positivo. Podría ser también que otros contesten que la temperatura será de 13 grados bajo cero, basados en la noción errónea de que como 13 es mayor que 4, -13 es mayor que -4. En estos casos es posible sugerir a los estudiantes que realicen una representación de la situación en una recta numérica y que piensen en qué dirección hay que moverse sobre la recta si la temperatura aumenta (tal vez basándose en la idea de un termómetro).

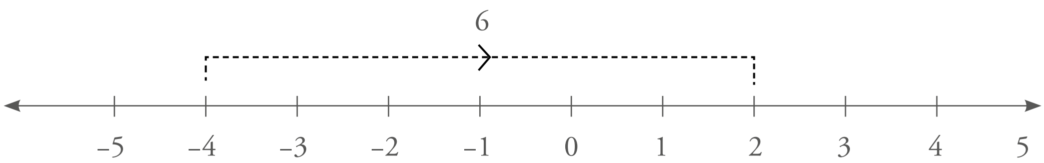
Algunos estudiantes pueden resolver el problema sin utilizar cálculos y apelando a técnicas de cálculo mental que van desarrollando. Por ejemplo, pueden decir que si la temperatura es de 4° bajo cero, al subir 4° llega a 0° y si sube 5° más llega a 5°. Esta estrategia es bastante utilizada por alumnos que están iniciando el aprendizaje de números enteros.

En el ítem b) se plantean tres cálculos. A propósito de la opción iii), en un espacio de discusión colectiva, se puede retomar alguna resolución incorrecta del ítem a) y poner en cuestión el hecho de que 4 grados bajo cero debe representarse con un número negativo y, en ese cálculo, el 4 es positivo. Los cálculos de las opciones i) y ii) dan como resultado 5, valor que es correcto y al que los estudiantes pueden haber arribado de distintas maneras. Sin embargo, no todos los cálculos que dan como resultado 5 representan la situación planteada en el problema. Sería importante que el docente proponga su representación en una recta numérica, identificando que comenzando desde –4 y avanzando 9 números hacia la derecha “se llega” al 5. En cambio, en el cálculo 4 + 1 los números implicados no están relacionados con el problema. A partir de este trabajo se podría sistematizar, de manera más general, que comenzando por un número en la recta numérica, si aumenta, es necesario moverse hacia la derecha. Además, concluir que dados dos números cualesquiera, siempre es mayor el que se encuentra a la derecha en la recta numérica.

Podría registrarse cómo sumar un número positivo a un número entero:

¿Cómo sumar un número positivo a un número entero?

Por ejemplo, para resolver el cálculo –4 + 6 se puede utilizar la recta numérica ubicando el –4 y moviéndose 6 unidades hacia la derecha. Así, se obtiene que –4 + 6 = 2.

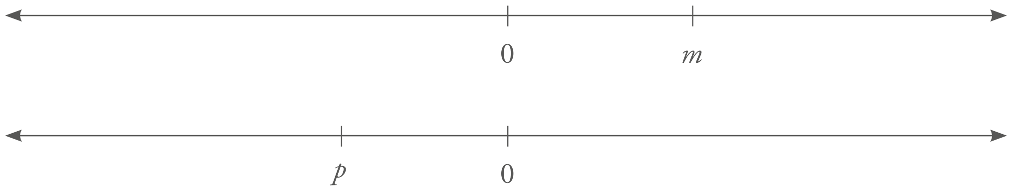


Como sumar un número positivo es equivalente a moverse hacia la derecha en la recta numérica, el resultado de la suma será mayor que el número inicial. Luego, al sumar un número positivo siempre se obtiene otro número mayor que el número inicial.

El siguiente problema permite anticipar el signo del resultado de un cálculo a partir de conocer el signo de los números implicados. Por otro lado, se plantea el estudio del dominio de validez para números enteros de propiedades válidas en el conjunto de los Números Naturales.

Problema

En las rectas numéricas, m y p son dos números enteros.



a) Ubicá en cada recta numérica los números:

- $-2 \cdot m$
- $-p$
- $2 \cdot p$

b) ¿Para qué valores enteros de a es cierto que $2 \cdot a$ es menor que a?

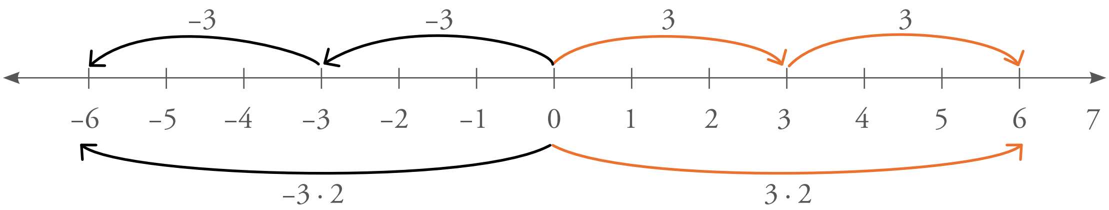
Una de las concepciones erróneas que se suele generar en los estudiantes durante el comienzo del trabajo con números enteros está relacionada con la asociación entre los números negativos y el signo "–", particularmente en el uso de variables. Por este motivo, es probable que no tengan inconvenientes en ubicar el resultado de $-2 \cdot m$ en la recta numérica, teniendo en cuenta que debe ser el doble de m, pero negativo. En cambio, al intentar ubicar $-p$ puede que manifiesten que ya está ubicado, porque p se encuentra a la izquierda del cero y, por lo tanto, es negativo. Sobre la misma concepción, podrían ubicar $2 \cdot p$ a la derecha del cero, marcando el doble de la longitud que existe entre 0 y p. En estas circunstancias, será necesario que el docente, en un espacio colectivo de trabajo, ponga en cuestión el significado del signo "–" como indicador del opuesto de un número y no necesariamente de un número negativo. Por ejemplo, analizando que p es negativo por encontrarse a la izquierda del cero y que, por lo tanto, $-p$ es positivo, ya que se trata del opuesto de p. De la misma manera, se puede estimar que el resultado de $2 \cdot p$ es negativo, por lo que su ubicación en la recta numérica debe ser a la izquierda del cero. La representación de este número pone en cuestión otra concepción que es válida para los números naturales y que los alumnos construyeron en su escolaridad: al multiplicar por 2 se obtiene un número mayor. Esta idea se contrapone con el hecho de que el resultado de $2 \cdot p$ se ubica a la izquierda de p. Será necesario, entonces, poner en cuestión esta concepción para determinar su dominio de validez: es cierta para los números positivos, pero no para los negativos. El ítem b) invita a los alumnos a reflexionar sobre esta cuestión. A partir de esta pregunta se podrían sistematizar conclusiones como las siguientes:

El producto entre dos números enteros no siempre es mayor que los factores, ya que depende de los signos de los números.

Ejemplos:

- $3 \cdot 2 = 6$ es mayor que 3 porque está a su derecha.
- $-3 \cdot 2 = -6$ es menor que -3 porque está a su izquierda.

En ambos casos, lo que sí aumenta es el valor absoluto, es decir, su distancia al 0.



Al trabajar sobre anticipaciones y estimaciones de resultados, es esperable que se construyan argumentos sobre las condiciones bajo las cuales un producto de muchos números tiene resultado positivo o negativo. Algunos de estos razonamientos se pueden tomar para validar propiedades de las potencias y estudiar el dominio de validez de las raíces.

Problemas

1. Se multiplican 100 números enteros, de los cuales 17 son positivos y el resto negativos. ¿Qué signo tendrá el resultado?
2. Si de 100 números enteros, 68 son positivos y el resto negativos, ¿qué signo tendrá su producto?

El objetivo de estos problemas es que los estudiantes puedan llegar a la conclusión de que es posible conocer el signo de un producto conociendo los signos de los factores, y que no es necesario saber el valor de cada uno. Por otro lado, se espera que logren elaborar una conjetura y que intenten validarla.

Se les podrá solicitar a los alumnos que resuelvan ambos problemas en pequeños grupos. Para aquellos estudiantes que no pueden comenzar a resolver los problemas, se les puede proponer que analicen el signo de un producto de 10 números, con 3 positivos y 7 negativos.

Para aquellos que pueden comenzar a resolver pero no logran avanzar, se les puede sugerir que consideren el producto de todos los números positivos por un lado y el de todos los negativos por el otro, dado que al tratarse de multiplicaciones es posible reordenar los factores sin alterar el resultado. También se les puede hacer notar, de ser necesario, que es conveniente considerar los productos de a dos, ya que al multiplicar dos números negativos el resultado será positivo.

En la puesta en común se buscará recoger las diferentes estrategias para determinar el signo del producto para luego concluir que el producto de números negativos será negativo si la cantidad de números es impar, y positivo si se trata de una cantidad par. Una vez registrada la conclusión se podría avanzar también hacia la posibilidad de anticipación del signo de una potencia de base entera y exponente natural, analizando el signo de la base y la paridad del exponente.

Sobre la base de estas propiedades se podrá dar lugar al estudio y la fundamentación del dominio de validez de las raíces de números negativos. Por ejemplo, para dar cuenta de la inexistencia de raíces de índice par y radicando negativo.

En el conjunto de los Números Racionales

Las situaciones que se presentan en este apartado tienen por objetivo que los estudiantes continúen transitando la ruptura entre los números naturales, enteros y racionales. Entre ellas, se hará hincapié en la densidad del conjunto los Números Racionales, la estimación de resultados de cálculos, prestando especial atención a aquellos casos en los que difieren de los que se obtienen con números naturales, el desarrollo de estrategias de cálculo mental, etcétera.

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Reconocer que dados dos números racionales distintos de cero, siempre es posible pasar de uno a otro a través de la multiplicación de uno de ellos por un tercer número racional.
- Reconocer las condiciones para las cuales la multiplicación entre fracciones da como resultado un producto que es mayor o menor que cada uno de sus factores.
- Resolver cálculos que incluyen potencias de base entera y exponente natural.
- Anticipar si una potencia es menor o mayor que la base.
- Determinar el dominio de validez de potencias de base entera o racional y exponente natural en situaciones en las cuales se ponen en juego relaciones de orden y equivalencias entre cálculos.
- Representar fracciones en la recta numérica dada una escala.

El problema planteado a continuación permite poner en discusión una de las rupturas entre los números naturales y los racionales que los alumnos deben transitar: la idea de que la “multiplicación agranda”, construida a lo largo de muchos años de escolaridad, ahora pasa a ser verdadera solo bajo ciertas condiciones.

Problema

Sin hacer cuentas, completá la multiplicación 6 · .... con una fracción de modo que:

a) el producto sea mayor que 6;

b) el producto sea menor que 6.

Explicá en cada caso cómo encontraste el número.

El objetivo de la situación consiste en determinar el conjunto de números para los cuales el producto es mayor que uno de los factores y cuándo es menor.

Los alumnos podrán utilizar calculadora para explorar. En este caso, la calculadora no permite resolver el problema, sino probar con varios casos y así formular una conjetura, que los estudiantes luego deberán validar.

Se propone resolver en parejas la parte a) del problema.

Es posible que algunos alumnos escriban fracciones que representan números naturales, por ejemplo $6 \cdot \frac{8}{2}$. En ese caso, el profesor puede solicitarles que prueben con otras que no lo sean.

Otros estudiantes posiblemente propongan números aislados, sin formular ninguna conjetura acerca de la condición que cumple la totalidad de números.

Seguramente habrá quienes puedan dar explicaciones en términos de "partes del número". Por ejemplo, podrán decir que $6 \cdot \frac{3}{3}$ es 6 porque al multiplicarse por 1 es el entero, entonces $6 \cdot \frac{5}{3}$ es más que 6 porque es el entero (6) y $\frac{2}{3}$ más de 6.

Esta última idea será la que se destaque en la puesta en común, acompañada de una conclusión como la siguiente:

Si al número 6 se lo multiplica por $\frac{8}{5}$, por ejemplo, el resultado es mayor que 6. Esto es porque $\frac{5}{5}$ de 6 es 6 y si se considera una parte mayor que $\frac{5}{5}$, el resultado será mayor que 6. Es posible responder sin necesidad de hacer la cuenta.

En general, si al número 6 se lo multiplica por un número mayor que 1, el resultado es mayor que 6.

La parte b) del problema podrá resolverse entre todos y a partir de la conclusión elaborada para el ítem a).

El profesor podrá abrir la discusión pidiendo a los estudiantes que le dicten fracciones que al multiplicarlas por 6 dan un resultado menor que 6. Luego, podrá preguntar qué característica tienen todas las fracciones que son solución.

Luego del debate, se podrá generalizar que si se multiplica a 6 por una fracción menor que 1, se está considerando una parte de 6 menor que el entero. Por eso el resultado será menor que 6. Finalmente, podrá registrarse la conclusión:

> El producto entre un número *a* distinto de cero y una fracción mayor que 1 será mayor que *a*.
> El producto entre un número *a* distinto de cero y una fracción menor que 1 será menor que *a*.
> Por ejemplo, $\frac{9}{15} \cdot \frac{7}{4} > \frac{9}{15}$ porque $\frac{7}{4} > 1$. Al mismo tiempo, $\frac{9}{15} \cdot \frac{7}{4} < \frac{7}{4}$ porque $\frac{9}{15} < 1$.

El próximo problema pone en escena otra de las rupturas entre los números enteros y los racionales. En el dominio de los enteros, a través de una multiplicación solo es posible obtener un múltiplo de un número. En el campo de los números racionales, en cambio, a partir de una multiplicación, es posible obtener cualquier número a partir de otro que no sea cero.

Problemas

1. ¿Es posible encontrar un número que multiplicado por $\frac{5}{7}$ dé 1? Si la respuesta es sí, encontralo. Si la respuesta es no, explicá por qué.
2. ¿Es posible encontrar un número que multiplicado por $\frac{5}{7}$ dé $\frac{8}{9}$? Si la respuesta es sí, encontralo. Si la respuesta es no, explicá por qué.

El propósito de estos problemas es, por un lado, evocar que dado cualquier número racional distinto de cero, siempre es posible hallar un número que multiplicado por él dé 1. Por el otro, se busca generalizar esta propiedad para determinar que dado un número racional distinto de cero, siempre es posible hallar otro racional que multiplicado por él dé un tercer número cualquiera.

Se sugiere proponer a los estudiantes resolver el problema 1 en pequeños grupos.

Algunas de las soluciones que se pueden anticipar son:

- Dicen que no es posible porque el resultado tiene que ser $\frac{7}{7}$ y no hay ningún número que multiplicado por 5 dé 7. El profesor podrá preguntarles si se les ocurre otra manera de expresar el número 1 como fracción, distinta de $\frac{7}{7}$.
- Afirman que no es posible obtener 1 a través de una multiplicación, sino de una suma, porque $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} = \frac{7}{7}$. El docente podrá ofrecer alguna manera de expresar el número 1 como fracción, por ejemplo $\frac{25}{25}$ para que analicen si es posible hallar la fracción indicada. Si fuese necesario, les podrá decir que prueben con otras representaciones para 1.
- Deciden que conviene expresar el número 1 como $\frac{35}{35}$ y logran hallar la fracción buscada, $\frac{7}{5}$.
- Utilizan el inverso multiplicativo de $\frac{5}{7}$, sin explicar por qué funciona.

Las dos últimas resoluciones pueden retomarse directamente en la puesta en común. Algunos de los asuntos a tratar son:

- Si se elige una representación conveniente como fracción para 1, resulta más fácil encontrar el factor.
- Conviene elegir una representación para 1 cuyo numerador y denominador sea un múltiplo común de 5 y 7.

Una vez acordado lo anterior, puede registrarse la siguiente conclusión:

> Si $\frac{5}{7} \cdot$ ..... = 1, entonces la fracción buscada es $\frac{7}{5}$ porque $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{35}{35} = 1$.
>
> Para poder hallar la fracción conviene expresar el número 1 como una fracción cuyo numerador y denominador, que deben ser iguales, sea un múltiplo común de 5 y 7.

Esta estrategia se puede generalizar y dejar registrada:

> Si a una fracción distinta de cero se la multiplica por otra que tiene invertidos el numerador y el denominador, el resultado es siempre 1. Esto pasa porque se multiplican los mismos números para obtener el numerador y el denominador del producto. Por ejemplo: $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{12} = 1$. En este caso, se dice que $\frac{3}{4}$ es el **inverso multiplicativo** de $\frac{4}{3}$, y viceversa.

Luego de la instancia colectiva de trabajo, se sugiere que los alumnos resuelvan el problema 2 en pequeños grupos.

Se espera que los estudiantes puedan reinvertir lo discutido a propósito del problema 1 para poder resolver el problema siguiente.

Seguramente varios alumnos tendrán dificultades para encontrar la relación entre este problema y el anterior, no sabiendo cómo avanzar. El profesor podrá preguntarles de qué manera puede servir, en este caso, llegar a 1 a través de una multiplicación. También podría preguntarles si les resulta más fácil pensar en cómo pasar multiplicativamente de 1 a $\frac{8}{9}$. Si los estudiantes logran discutir estos dos asuntos, estarán en condiciones de participar de la puesta en común habiendo reflexionado sobre las relaciones más importantes, aunque no hayan podido resolver completamente el problema.

Puede quedar registrado lo siguiente:

> Sabemos que $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = 1$ y que $1 \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$. Entonces, se cumple que $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right) \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$, que es lo mismo que $\frac{5}{7} \cdot \left(\frac{7}{5} \cdot \frac{8}{9}\right) = \frac{8}{9}$ y que $\frac{5}{7} \cdot \frac{56}{45} = \frac{8}{9}$.

La estrategia anterior puede generalizarse de la siguiente manera:

> Dada una fracción $\frac{a}{b}$ que no sea 0, siempre es posible multiplicarla por su inverso multiplicativo $\frac{b}{a}$ para obtener 1, y luego por una fracción $\frac{c}{d}$ para obtener a $\frac{c}{d}$ como resultado. Es decir que:
>
> $$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d}$$
> $$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{c}{d}$$
> $$\frac{a}{b} \cdot \frac{b \cdot c}{a \cdot d} = \frac{c}{d}$$

No se espera que la generalización sea aprendida de memoria, sino que se la plantea para registrar que la estrategia utilizada sirve para cualquier otro caso.

La siguiente situación reutiliza lo trabajado en los problemas anteriores con el objetivo de anticipar el orden de magnitud de una potencia en relación con la base.

Problema

Sin hacer los cálculos, indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Explicá cómo las pensaste.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 > \frac{3}{5}$

b) Si n representa un número entero, se cumple que $\left(\frac{3}{5}\right)^n > \frac{3}{5}$.

Los estudiantes podrán resolver en parejas la parte a) del problema.

La restricción en cuanto a los cálculos tiene que ver con que se espera que puedan decidir apoyándose en propiedades del producto de fracciones. Por ejemplo, considerando que al multiplicar cualquier número por otro menor que 1 se obtiene un número menor que el primero.

Habrá quienes afirmarán que la proposición es verdadera porque al multiplicar 4 veces un número por sí mismo se obtiene un resultado mayor que el número. Una intervención docente posible puede consistir en solicitar que comparen $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ y $\frac{3}{5}$, habilitando la posibilidad de hacer cálculos. Una vez que hayan determinado que la afirmación es falsa para el exponente 2, podrán retomar la original.

Otros alumnos seguramente harán el cálculo, aunque el problema pida no hacerlo. En ese caso, podrán saber que la afirmación es falsa pero no por qué lo es.

En la puesta en común se podrán retomar las diferentes resoluciones y resulta importante explicitar por qué se pide no hacer cuentas. También se podrá hacer hincapié en que no resulta relevante decir que “es falsa porque la cuenta da menor” si lo que se tiene por objetivo es realizar alguna generalización.

La conclusión puede centrarse en que es posible saber que la afirmación es falsa sin hacer cuentas. Como $\frac{3}{5} < 1$, cada vez que se lo multiplica por sí mismo se obtiene un resultado menor. Por eso es posible no solo decir que la afirmación es falsa, sino que además se cumple que $\left(\frac{3}{5}\right)^4 < \frac{3}{5}$.

Luego de la puesta en común, los alumnos podrán resolver la parte b) en pequeños grupos. Es posible que la mayoría utilice el mismo razonamiento de la parte a) y diga que es falsa, que la potencia siempre es menor que su base, si esta es menor que 1.

Llegado este punto, resulta conveniente proponer un debate colectivo. La primera cuestión a resaltar es que seguramente los estudiantes estén considerando solo valores positivos para *n*. En ese caso, la afirmación es falsa y puede explicarse del mismo modo que en la parte a).

El profesor podrá preguntar por los demás valores posibles para *n*:

¿Qué sucede si n = 0?

En este caso, como $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1 > \frac{3}{5}$, la afirmación es verdadera.

¿Qué sucede si n < 0?

Cuando el exponente es negativo, la base se invierte y se eleva al opuesto del exponente. Por ejemplo, $\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^4$ y como $\frac{5}{3} > 1$ resulta que $\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} > \frac{3}{5}$. Lo mismo sucederá para cualquier otro exponente negativo.

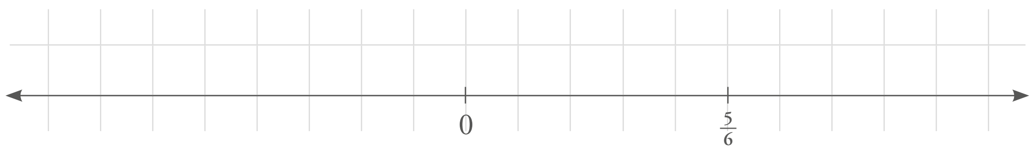
Para que las relaciones anteriores no queden vinculadas solo a la resolución del problema, resulta conveniente dejar registrados algunos asuntos que son importantes retener:

> Si una fracción positiva es menor que 1, su inversa es mayor que 1. Por ejemplo, $\frac{2}{3} < 1$ y $\frac{3}{2} > 1$.
>
> Si una fracción es mayor que 1, su inversa es menor que 1. Por ejemplo, $\frac{4}{3} > 1$ y $\frac{3}{4} < 1$.

El problema que se presenta a continuación requiere representar fracciones en una recta numérica donde resulta necesario poner en juego relaciones entre distintas fracciones.

Problema

Dada la siguiente recta numérica, representá los números -1, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$. Explicá cómo decidiste la ubicación de cada uno.



Muchos estudiantes encuentran dificultades a la hora de representar fracciones en una recta numérica con escala dada. Una vez dada la ubicación de dos valores, muchas veces resulta necesario buscar datos intermedios para poder representar otros números.

Los alumnos podrán resolver el problema en parejas. El profesor podrá circular para verificar si han anticipado el orden de estos números, es decir que -1 está a la izquierda de 0 y que el mayor es $\frac{3}{2}$ porque es el único mayor que 1. Por otro lado, podrán comprobar[15] que $\frac{2}{3} < \frac{5}{6}$. Esta anticipación es una herramienta de control de la representación.

En la puesta en común será necesario explicitar las decisiones que se han tomado para representar los distintos números. Por ejemplo:

[15] La comprobación podrá hacerse a través de fracciones equivalentes o analizando que a $\frac{2}{3}$ le falta $\frac{1}{3}$ para llegar a 1, mientras que a $\frac{5}{6}$ le falta $\frac{1}{6}$. Como $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$, a $\frac{2}{3}$ le falta más para llegar a 1, por lo que es menor que $\frac{5}{6}$. Esta última estrategia es de uso habitual en la escuela primaria, por lo cual resulta importante retomarla.

- Como hay 5 cuadraditos entre 0 y $\frac{5}{6}$, cada uno de ellos será $\frac{1}{6}$.
- Si a $\frac{5}{6}$ se le agrega $\frac{1}{6}$, es decir 1 cuadradito, se obtiene 1. A la misma distancia de 0 pero hacia la izquierda se encuentra -1.
- $\frac{3}{2}$ puede pensarse como 3 veces $\frac{1}{2}$. Además, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, 3 cuadraditos, entonces $\frac{3}{2}$ serán 9 cuadraditos.
- Finalmente, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, por lo que debe ubicarse a 4 cuadraditos del 0.

La resolución de estos problemas requiere de conocimientos variados que van más allá de las fracciones. Los alumnos necesitan comprender qué es una escala y utilizarla en el caso en que la unidad no sea un número entero. Esto se constituye en una variable que hace que el problema sea más o menos complejo. Si la recta hubiese incluido las ubicaciones de 0 y de 1, el problema era más simple porque resulta más fácil representar una fracción de 1 que representar 1 dada una fracción.

Debido a esto, una práctica que debería acompañar la ubicación de números en una recta es el relato de cómo se hizo para determinar el lugar de cada uno.

Funciones y álgebra

Aproximación a las funciones a través de gráficos cartesianos

Tal como se ha dicho en la presentación, el Diseño Curricular plantea una entrada al estudio de funciones a través de gráficos. En un primer momento, se propone analizar gráficos para aprender las convenciones utilizadas al representar un fenómeno, estudiar y caracterizar el comportamiento de las variables que intervienen e interpretar información. Se trata, al menos en un inicio, de plantear problemas que exijan una mirada más global que puntual. Esto permitirá realizar análisis cualitativos de procesos funcionales incluso antes de definir conceptos como crecimiento, raíces o conjuntos de positividad y negatividad, por ejemplo. Más adelante, lo puntual y lo global se retroalimentarán para proporcionar lecturas más completas de información.

Intervenciones de enseñanza

A continuación se presentan situaciones de enseñanza referidas a dos asuntos principales a abordar con los estudiantes: el *análisis de la variación de una variable en función de otra variable*, y el abordaje de *la relación entre una tabla de valores, el gráfico cartesiano y una situación*.

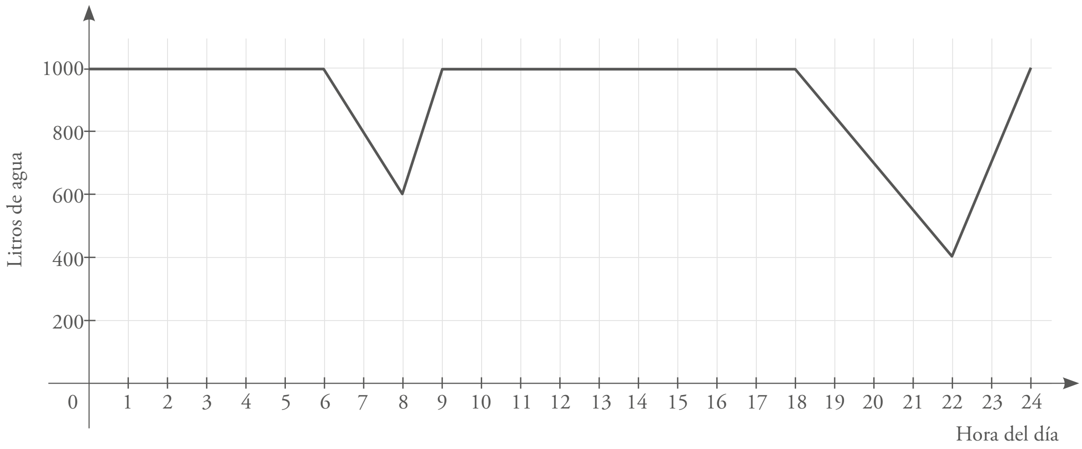
Análisis de la variación de una variable en función de otra variable

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Leer información que se encuentra explícita en un gráfico en problemas situados en contextos extramatemáticos.
- Calcular valores exactos de las variables que no se encuentran de manera explícita en un gráfico, a partir de información que sí se encuentra explícita en problemas situados en contextos extramatemáticos.
- Comparar distintas variaciones de una de las variables en función de la otra en problemas situados en contextos extramatemáticos.

Problema

El siguiente gráfico describe la cantidad de agua que contiene el tanque de una casa en los distintos horarios de un día.



a) Identificá en qué momentos se está vaciando el tanque. ¿Cuándo se vacía más rápido?

b) Identificá en qué momentos se está llenando el tanque. ¿Cuándo se llena más rápido?

Para resolver la primera parte del ítem a) de este problema, los estudiantes podrían identificar de manera cualitativa los tramos descendentes del gráfico. Sin embargo, la respuesta que solicita el problema es cuantitativa, en el sentido de que se deben expresar los intervalos de tiempo en los cuales la cantidad de agua desciende. Resulta así necesario que los alumnos puedan interpretar dos cuestiones centrales de los gráficos cartesianos. La primera, que el gráfico está compuesto por infinitos puntos "uno al lado del otro"; la segunda, que cada uno de estos puntos representa tanto un valor correspondiente a la hora del día como un valor de la cantidad de agua. En una puesta en común, el docente podría marcar algunos puntos que pertenezcan a los tramos identificados y explicitar sus coordenadas, con el propósito de relacionar sus valores con las variables que representan, analizando que a medida que el tiempo transcurre la cantidad de agua desciende. A su vez, se podría aprovechar esta instancia para ubicar estos pares de valores en una tabla, introduciendo un recurso eficaz para registrar y ordenar algunos datos que exhibe el gráfico.

En la segunda parte del ítem a), puede suceder que los estudiantes lo resuelvan desde una interpretación de carácter cualitativo o desde una perspectiva cuantitativa a partir de los valores de las variables. Algunos podrían afirmar que el tanque se vacía más rápido entre las 6 y las 8 horas porque desciende de manera más pronunciada que entre las 18 y las 22. A partir de una resolución de este tipo, resultaría necesario intervenir con el objetivo de que el estudiante pueda fundamentar de manera cuantitativa esta afirmación basada en una interpretación perceptual. Por ejemplo, es posible proponer el cálculo de la cantidad de litros por hora que salen del tanque utilizando los valores leídos del gráfico al resolver la primera parte:

Horas del día	Litros de agua
6	1000
8	600
18	1000
22	400

Entre las 6 y las 8 transcurren 2 horas y la cantidad de agua desciende 400 litros, por lo que salieron 200 litros por hora. Entre las 18 y las 22 transcurren 4 horas y la cantidad de agua desciende 600 litros, por lo que salieron 150 litros por hora.

Otra manera de fundamentar podría apoyarse en la elección de otros puntos que pertenezcan a los tramos y que permitan comparar la variación de los litros de agua de manera directa, manteniendo fija la variación en horas. Por ejemplo, se podría identificar el punto correspondiente a las 20 horas y estimar que la cantidad de agua en el tanque a esa hora es mayor a 600 litros. En ambos tramos, entre las 6 y las 8 y entre las 18 y las 20, transcurren 2 horas. Pero en uno la cantidad de agua disminuye 400 litros y en el otro disminuye menos de 400 litros, por lo que en el primero desciende más rápido.

Estas dos resoluciones que se apoyan sobre los valores de las variables podrían ponerse en relación en un espacio colectivo de trabajo. Por ejemplo, proponiendo calcular la cantidad de agua que contiene el tanque a las 20 horas. Si bien es posible estimar este valor a partir de la lectura del gráfico, el punto que lo representa no se encuentra sobre la cuadrícula, por lo que no se puede tener certeza sobre su segunda coordenada. Habiendo identificado que entre las 18 y las 22 el agua desciende a razón de 150 litros por minuto, se puede determinar que entre las 18 y las 20 descendió 300 litros, por lo que a las 20 horas el tanque tendrá 700 litros. Si bien este problema puede resolverse sin utilizar conocimientos específicos de funciones lineales, intervenciones como la descrita pueden constituirse como un comienzo del trabajo sobre ese contenido.

La relación entre una tabla de valores, el gráfico cartesiano y una situación

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

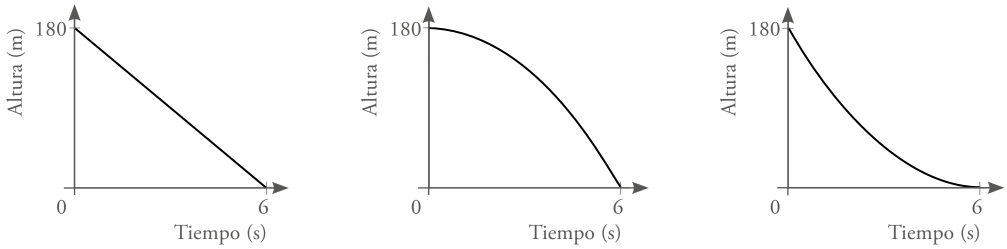
- Establecer relaciones entre tablas de valores y gráficos cartesianos a partir de la lectura de información explícita y no explícita que se encuentra en los gráficos.
- Estimar valores no explícitos de las variables cuya relación está representada a través de un gráfico en problemas situados en contextos extramatemáticos.
- Comparar distintas variaciones de una de las variables en función de la otra en problemas situados en contextos extramatemáticos.

Problema

Una piedra se deja caer desde la terraza de un edificio de 180 metros de alto. La siguiente tabla muestra distintas alturas de la piedra en función del tiempo, en su recorrido hasta llegar al piso.

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6
Altura (metros)	180	175	160	135	100	55	0

¿Cuál o cuáles de estos gráficos pueden representar la situación? ¿Por qué?



Para resolver este problema es necesario que los estudiantes estimen las coordenadas de algunos de los puntos de los gráficos, interpretando de manera adecuada la escala establecida en los ejes. Por ejemplo, en el primer gráfico podrían marcar el punto medio del segmento e inferir que, en este caso, a los 3 segundos la piedra se encontraría a 90 metros de altura, dado que la coordenada *x* "está en el medio" entre 0 y 6, y la coordenada *y* "está en el medio" entre 0 y 180. Así podrían descartar este gráfico a partir de que los valores hallados no se corresponden con los de la tabla. Los otros dos gráficos los podrían analizar sobre la base de la interpretación que hicieron en el primero. Observando que el segundo gráfico "está por arriba" y que el tercero "está por abajo" del primero, se puede concluir que a los 3 segundos la piedra está a una altura mayor a los 90 metros en el segundo gráfico y a una altura menor en el tercero. A partir de esta interpretación podrían descartar el tercer gráfico y afirmar que el segundo puede corresponder a la situación.

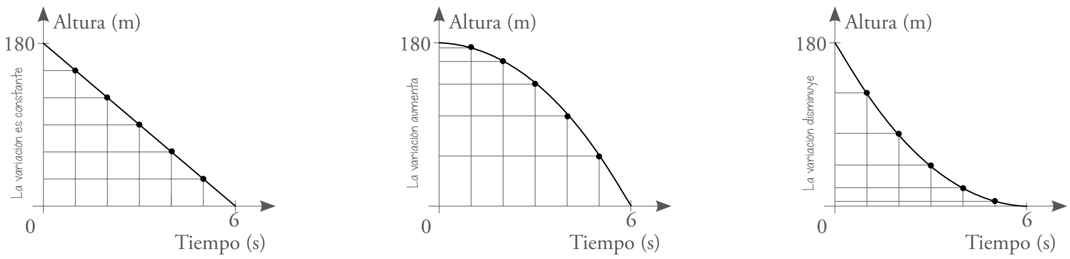
El problema también se puede resolver analizando la variación de los valores de la tabla y relacionándolos con la "forma" de los gráficos. A partir de la diferencia entre los valores de las columnas, se puede ver que no se trata de una situación de variación uniforme, por lo que su gráfico no puede ser una recta. Se puede observar también que al comienzo del proceso la variación es menor que al finalizar.

1 1 1 1 1 1

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6
Altura (metros)	180	175	160	135	100	55	0

5 15 25 35 45 55

Estas dos cuestiones se podrían analizar también sobre los gráficos, eligiendo algunos puntos y estimando sus coordenadas o la variación de ellas.



En el primer gráfico la variación es uniforme, ya que cada un segundo que transcurre la variación de la altura es la misma. En el segundo gráfico la variación de la altura es menor al comienzo y va aumentando a medida que transcurre el tiempo. En el tercer gráfico sucede lo contrario, la variación es mayor al principio y menor al final del proceso.

Este problema está propuesto para trabajar con los alumnos una *aproximación a las funciones a través de gráficos*. Sin embargo, resulta necesario no perder de vista que en el futuro se abordarán contenidos relacionados con funciones lineales. Es por esto que, luego del trabajo con un problema de este tipo, sería importante compartir con toda la clase una resolución que ponga el foco en el análisis de las variaciones, aunque no haya sido una estrategia elaborada por los alumnos. Esta debería incluir la explicitación de la relación entre la representación de la variación en la tabla de valores (los arquitos con las diferencias) y en el gráfico de la función (las variaciones en los ejes), como se muestra en los gráficos anteriores. De esta manera se podrá comenzar a abordar la relación entre el tipo de variación y la forma del gráfico que representa una situación. Como se mencionó anteriormente, intervenciones como la descrita pueden constituirse como un comienzo del trabajo sobre funciones lineales.

Función lineal y ecuación de la recta

Inicialmente, el trabajo que se propone en torno a las funciones lineales está relacionado con la caracterización de los procesos de variación uniforme y su diferenciación de los que no lo son. Luego, se analizarán las fórmulas de estas funciones y sus parámetros.

De este modo, las funciones de proporcionalidad directa serán un caso particular de las lineales, compartiendo todas sus características y agregando otras.

Es necesario aclarar que, si bien existe un apartado específico dedicado a la enseñanza de ecuaciones e inecuaciones, aquí se incluirá el planteo y la resolución de ecuaciones en el análisis de los problemas. Se tratará a las ecuaciones como un instrumento de resolución de distintas situaciones vinculadas a las funciones lineales. En el apartado "Ecuaciones e inecuaciones", en cambio, se propone abordarlas como un objeto matemático en sí mismo, a la vez que estudiar distintos modos de resolución.

Intervenciones de enseñanza

A continuación se presentan situaciones referidas al trabajo con *fórmulas para describir procesos de variación uniforme*, y *gráficos de funciones lineales y ecuación de la recta*.

Fórmulas para describir procesos de variación uniforme

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Hallar imágenes y preimágenes en problemas que describen procesos de variación uniforme situados en contextos extramatemáticos.
- Identificar y producir fórmulas que modelicen procesos de variación uniforme en situaciones extramatemáticas.
- Reconocer e interpretar el significado de los valores de los parámetros de una fórmula de variación uniforme en términos de un problema extramatemático.

El propósito del siguiente problema es que los estudiantes produzcan valores relacionados de las variables en un proceso de variación uniforme y que, luego, sobre esa base, estudien de qué manera una fórmula representa la relación establecida por la situación y permite potencialmente obtener todos los valores relacionados.

Problema

Una sustancia se encuentra a 25 °C y a partir de un momento determinado su temperatura comienza a descender de manera uniforme a razón de 2 °C por minuto.

a) ¿Qué temperatura alcanzó la sustancia 15 minutos después del comienzo del proceso?
b) ¿En cuánto tiempo la sustancia alcanzó los 0 °C?
c) Indicá cuál o cuáles de estas fórmulas permite/n calcular la temperatura de la sustancia, medida en grados centígrados, en función del tiempo, medido en minutos, desde el inicio del proceso.
   › $T = 25 \cdot t - 2$
   › $T = -2 \cdot t + 25$
   › $T = 25 - 2$
   › $T = 25 - 2 \cdot t$

Se sugiere organizar una resolución en parejas de los primeros dos ítems y realizar luego una puesta en común. A continuación, se podrá proponer a los alumnos resolver el ítem c).

Los estudiantes podrían resolver el ítem a) de distintas maneras:

- Restar 2 sucesivamente a partir de 25. Por ejemplo, razonando que, como la temperatura desciende 2 grados por minuto, en los primeros 10 minutos descenderá 20 grados hasta los 5 grados, y en los 5 minutos restantes descenderá 10 grados más, hasta los –5 grados. El docente podrá invitar a pensar de qué manera se puede saber la cantidad total de grados que desciende la temperatura de la sustancia sin necesidad de restar sucesivamente.
- Calcular la cantidad de grados que desciende la temperatura a través de la cuenta $2 \cdot 15 = 30$ y luego hallar la temperatura final mediante el cálculo $25 - 30 = -5$. El docente podrá sugerir a los alumnos que traten de expresar las dos cuentas como un solo cálculo combinado.
- Plantear y resolver el cálculo $25 - 2 \cdot 15 = -5$.

Para resolver el ítem b) los estudiantes podrían utilizar estrategias más o menos asociadas a las resoluciones del ítem anterior:

- Restar sucesivamente a partir de 25. Al igual que en el ítem anterior, restar primero los 20 grados correspondientes a los primeros 10 minutos: $25 - 20 = 5$. Luego restar dos veces más 2 grados hasta llegar a 1 grado. En ese momento puede suceder que algunos alumnos razonen que, si en un minuto la temperatura desciende 2 grados, es necesario que transcurra medio minuto más para que descienda 1 grado. Otros podrían expresar que no es posible que llegue a 0 grados porque si transcurre un minuto más la temperatura llega a -1. En este último caso el docente debería intervenir con el objetivo de habilitar la posibilidad de que no sea una cantidad entera de minutos y que los alumnos reconozcan y utilicen la proporcionalidad de la variación.

- Hallar un valor de tiempo de manera que al multiplicarlo por 2 dé 25. A partir de pensar que a 25 se le debe restar la cantidad de grados que desciende la temperatura y que, para que llegue a 0 grados, se le debe restar 25. Es posible que estos alumnos realicen las cuentas para mostrar y/o validar las respuestas:
  - › $12{,}5 \cdot 2 = 25$ y $25 - 25 = 0$
  - › $25 - 2 \cdot 12{,}5 = 0$
- Plantear la ecuación $25 - 2x = 0$ e intentar resolverla. Esta estrategia solo estará disponible para aquellos estudiantes que tengan conocimientos sobre ecuaciones.

Luego del trabajo con estos dos ítems se prevé que se realice una puesta en común para socializar diferentes estrategias de resolución.

Para el caso del ítem b), es importante que el docente pregunte si la relación entre las variables del problema es de proporcionalidad directa. Seguramente algunos estudiantes dirán que se trata de una relación de proporcionalidad inversa, porque a medida que aumenta el tiempo disminuye la temperatura. Para fundamentar que no se trata de ninguna de esas relaciones, el docente podrá mostrar un contraejemplo.

Con el objetivo de poner el foco en la proporcionalidad de la variación, se podrá exhibir una resolución en la cual esta se ponga en juego. Por ejemplo, alguna que utilice una variación de tiempo de medio minuto y en la que la temperatura descienda 1 grado. A continuación se podrá concluir y registrar lo siguiente:

> En los procesos de variación uniforme la variación es proporcional. Así, si en un minuto la temperatura disminuye 2 grados, en dos minutos disminuirá 4 grados y, para que disminuya 1 grado, deberá transcurrir medio minuto.

Para la resolución del ítem c), es posible que los estudiantes intenten generalizar la estructura del cálculo combinado que utilizaron en los ítems anteriores.

Luego de un tiempo de resolución, es pertinente proponer una instancia colectiva de trabajo para analizar dos maneras de decidir cuál o cuáles de las fórmulas son correctas. Por un lado, es posible escribir una fórmula que traduzca los cálculos hechos en las partes a) y b). Para eso, los estudiantes tendrán que analizar que el cálculo que hicieron consiste en restarle a 25 la cantidad de grados que disminuye la temperatura en un tiempo t. Como disminuye 2 grados por minuto, en t minutos disminuirá $2t$ grados, por lo que una fórmula posible es $T = 25 - 2t$. El profesor podrá traccionar para que reconozcan la equivalencia con la fórmula $T = -2t + 25$, que se obtiene aplicando la propiedad conmutativa de la suma.

La primera fórmula podrá ser descartada analizando que el cálculo que propone es el de una temperatura que aumenta 25 grados por minuto, lo que no se corresponde con el problema planteado.

Por último, la tercera expresión propuesta no es una fórmula, sino un cálculo a partir del cual se puede hallar la temperatura al minuto de iniciada la medición. No sirve para calcular la temperatura en cualquier momento.

Otra forma de resolución, que seguramente quede a cargo del docente, consiste en analizar si los pares de valores hallados verifican cada una de las fórmulas. Esta estrategia puede combinarse con una más vinculada a un análisis del contexto, para descartar algunas de las opciones. Por ejemplo, a partir de la descripción de la situación se puede determinar que los valores de la temperatura serán 25, 23, 21, 19, 17,… ; para los valores de tiempo 0, 1, 2, 3, 4,… . Luego se podría analizar si utilizando las fórmulas con cada uno de esos valores de tiempo se obtienen los valores de temperatura correspondientes. Se trata, entonces, de determinar si los pares de valores verifican la ecuación para validar si la fórmula es o no correcta.

Será necesario discutir con el conjunto de la clase los alcances de esta estrategia de validación. Si bien es adecuada para descartar las fórmulas incorrectas, puede resultar insuficiente para validar las que son correctas, pues podría suceder que exista un par de valores que no se haya considerado y que no las verifique.

Cabe aclarar que, en este caso, para determinar que la fórmula es correcta es suficiente que dos pares de valores la verifiquen. Sin embargo, es muy probable que la fundamentación de por qué con esto alcanza escape a los objetivos de este problema, en el marco del proyecto de enseñanza y del recorrido pensado por el docente. A pesar de esta cuestión, se podría explicitar que en este caso alcanza con probar con dos pares de valores porque se trata de una variación uniforme, dejando instalada la validación de este hecho como cuestión a trabajar en las clases y con los problemas a futuro.

El siguiente problema pone en escena la noción de variación uniforme, que resulta necesaria para la resolución.

Problema

Un automóvil se desplaza a velocidad constante sobre una ruta. Se sabe que luego de una hora de haber partido se encuentra en el kilómetro 100 de la ruta y luego de tres horas de haber partido se encuentra en el kilómetro 260. Continúa el trayecto hasta llegar a una ciudad que se encuentra en el kilómetro 564.

a) ¿A qué distancia se encontraba a las 2 horas y media de haber partido?
b) ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

En parejas, los alumnos podrán iniciar la resolución de la parte a) del problema.

Es probable que algunos estudiantes supongan que existe una relación de proporcionalidad directa entre el tiempo transcurrido y la posición del auto en la ruta. Así, si consideran que a la hora de haber partido estaba en el kilómetro 100, entonces a las 2,5 horas –que resulta de multiplicar a 1 por 2,5– estará en el kilómetro 2,5 · 100 = 250. Como no resulta verosímil que en media hora, lo que resta para llegar a las 3 horas, haya recorrido solo 10 km, el docente podrá preguntar si ese resultado es coherente con los datos. A partir de esta pregunta, los alumnos podrán analizar si disponen de alguna otra estrategia. En caso de no encontrarla, el desarrollo que hayan hecho podrá retomarse en la puesta en común.

El propósito central de la discusión colectiva consistirá en rechazar el modelo proporcional, y focalizar sobre la variación uniforme. El ejemplo antes presentado resultará pertinente para debatir acerca de por qué un modelo de proporcionalidad directa no es adecuado.

Una vez descartada la proporcionalidad directa, los estudiantes podrán proponer otras estrategias para resolver el problema. El docente podrá ubicar los datos en una tabla para trabajar sobre ellos:

	Tiempo	Ubicación en la ruta	
2	1	100	160
	3	260	

Aquí se puede ver que en 2 horas (3 h – 1 h) el auto recorre 160 km (260 km – 100 km), es decir que en 1 hora recorrerá la mitad, 80 km.

Será necesario recordar qué es la velocidad, teniendo en cuenta que alcanza con una idea intuitiva. Por ejemplo, se puede decir que es la distancia que recorre un móvil por unidad de tiempo; en este caso, la cantidad de kilómetros en cada hora. Es así que se puede decir que la velocidad del auto es de 80 km/h.

Ahora bien, resulta importante aclarar que la distancia que recorre el auto en función del tiempo sí es una relación de proporcionalidad directa, pero no lo es su posición en la ruta. Esta es una de las conclusiones que debería quedar registrada.

Sabiendo que recorre 80 km en cada hora, a las 2 horas estará en el kilómetro 100 + 80 = 180. En media hora el auto recorre la mitad de distancia que en 1 hora, es decir 40 km. Luego, a las 2 horas y media estará en el kilómetro 180 + 40 = 220.

El docente podrá preguntar desde qué kilómetro de la ruta partió el auto. Los estudiantes podrán volver a usar la distancia recorrida en 1 hora para responder. Si a la hora de haber partido, el auto estaba en el kilómetro 100, 1 hora antes estaba en el kilómetro 100 – 80 = 20. Este dato es otra evidencia de la no proporcionalidad: cuando la variable independiente es 0, la variable dependiente no vale 0.

La parte b) puede ser resuelta en parejas.

Seguramente, una gran parte de los alumnos intente encontrar la solución a través de ensayos sucesivos, como los siguientes:

Tiempo	Ubicación en la ruta
1	100
3	260
4	260 + 80 = 340
5	340 + 80 = 420
6	420 + 80 = 500
6,5	500 + 40 = 540
6,75	540 + 20 = 560

Llegado este punto, o antes, muchos abandonarán la búsqueda. Con ayuda del docente, en la puesta en común, podría hallarse el tiempo que se tarda en recorrer los 4 km faltantes, para concluir que se trata de una estrategia costosa, y que según los números involucrados, puede resultar muy difícil encontrar el valor del tiempo.

Si no hubiese surgido por parte de los alumnos, el profesor podrá proponer hallar una fórmula que represente la posición del auto en la ruta en función del tiempo. Una posibilidad consiste en analizar los cálculos realizados a partir de la posición inicial, 20 km, y la velocidad, 80 km/h, para cada una de las posiciones anteriores.

Tiempo	Ubicación en la ruta	Cálculo
1	100	$20 + 80$
3	260	$20 + 80 \cdot 3$
4	260 + 80 = 340	$20 + 80 \cdot 4$
5	340 + 80 = 420	$20 + 80 \cdot 5$
6	420 + 80 = 500	$20 + 80 \cdot 6$
6,5	500 + 40 = 540	$20 + 80 \cdot 6{,}5$
6,75	540 + 20 = 560	$20 + 80 \cdot 6{,}75$

A partir de un análisis de la estructura del cálculo será posible plantear la fórmula $P = 20 + 80t$, donde P representa la posición del auto y t, el tiempo en horas desde que partió. La fórmula resulta necesaria para hallar cuánto duró el viaje sin necesidad de probar con muchos valores:

> Al finalizar el viaje, la posición P vale 564. Si se sustituye ese valor en la fórmula se obtiene una ecuación de donde se puede hallar el valor de t:

$$
\begin{aligned}
20 + 80t &= 564 \\
80t &= 564 - 20 \\
80t &= 544 \\
t &= 544 \div 80 \\
t &= 6{,}8
\end{aligned}
$$

La estrategia que utiliza la fórmula debería quedar registrada en las carpetas de los alumnos, incluyendo tanto la producción de la fórmula como el planteo y la resolución de la ecuación.

> Como el valor del tiempo para el cual el automóvil se encontraba en el kilómetro 564 de la ruta no era "redondo", resultó difícil calcularlo haciendo aproximaciones con la velocidad.
>
> Para hallar ese valor de una manera más eficiente, primero obtuvimos la fórmula que permite calcular la posición del auto en función del tiempo, a partir de los cálculos que realizamos para hallar distintas posiciones:
>
> $$P = 20 + 80t$$
>
> Luego utilizamos esa fórmula para plantear y resolver una ecuación cuya solución fuera el valor del tiempo buscado.
>
> $$
> \begin{aligned}
> 20 + 80t &= 564 \\
> 80t &= 564 - 20 \\
> 80t &= 544 \\
> t &= 544 \div 80 \\
> t &= 6{,}8
> \end{aligned}
> $$
>
> En ocasiones, para hallar valores exactos de manera más eficiente, es conveniente construir una fórmula y plantear y resolver una ecuación.

Gráficos de funciones lineales y ecuación de la recta

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Hallar imágenes y preimágenes en problemas que describen procesos de variación uniforme situados en contextos intramatemáticos.
- Producir gráficos de funciones lineales a partir de su fórmula.
- Identificar si un punto dado como par ordenado pertenece al gráfico de una función lineal dada.
- Reconocer e interpretar la relación entre los valores de los parámetros de la fórmula de una función lineal o de la ecuación de una recta y su gráfico.

El siguiente problema permite trabajar sobre la confección del gráfico de una función lineal y sobre su concepción como el conjunto de puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación o están relacionadas por la fórmula.

Problema

Realizá el gráfico de la función lineal representada por la fórmula $f(x) = 2x + 1$.

a) ¿Es cierto que el punto A = (500 ; 1001) pertenece al gráfico de la función?
b) Completá las coordenadas faltantes de estos pares ordenados de manera que representen puntos pertenecientes al gráfico de la función. Luego ubicalos en el gráfico.
   › (2,25 ; …)
   › (–0,5 ; …)
   › (… ; 20)
   › (… ; –11)

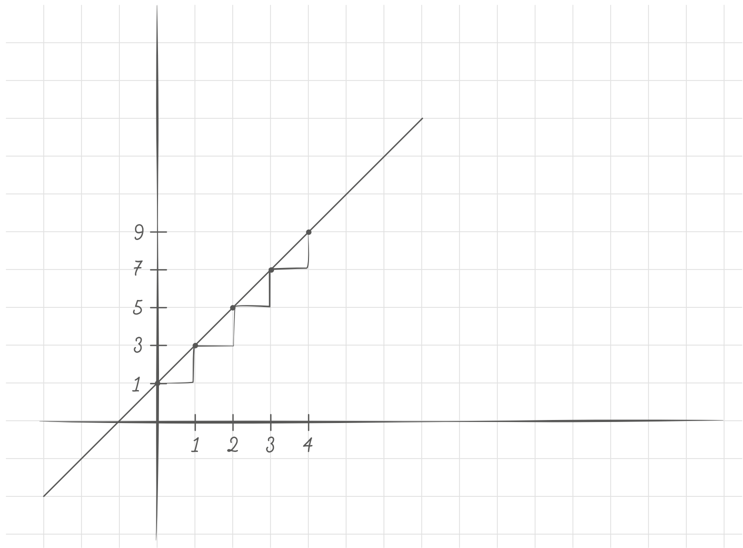
Para el aprendizaje de la confección de gráficos es necesario que cada alumno se involucre en la construcción de manera individual y lo haga en variadas oportunidades, con distintos tipos de gráficos y fórmulas. Los gráficos se deben diferenciar en sus características –creciente y decreciente, por ejemplo– y las fórmulas en sus parámetros –pendiente y ordenada al origen–, de manera que ofrezcan diversidad en la magnitud y el signo de los números involucrados, la escala a elegir, etc. Esto no quiere decir que los estudiantes no puedan discutir en parejas o grupos sobre cómo realizar los gráficos y cuál es la manera más conveniente de hacerlo. Pero sí se quiere remarcar que, además de esas instancias, es necesaria la producción concreta individual de cada alumno. El foco no está puesto en dibujar, sino en la relación entre los parámetros, las características y el gráfico.

Con el objetivo de realizar el gráfico de la función, es probable que algunos estudiantes confeccionen una tabla de valores utilizando la fórmula, para luego ubicar los puntos en un sistema de ejes cartesianos. Para finalizar, es posible que tracen la recta que pasa por esos puntos. Sin embargo, existe la posibilidad de que los puntos marcados no les queden alineados, a causa de distintos errores cometidos. Algunos de estos pueden ser:

- No ubicar bien los puntos por interpretar de manera incorrecta cuál coordenada corresponde a cada eje.
- No tener en cuenta una escala en alguno de los ejes o no utilizarla de manera correcta.
- No ubicar bien los puntos que se deben colocar sobre los ejes, debido a que una de sus coordenadas es cero.
- Realizar una mala estimación de los valores que no están presentes de manera explícita en la escala.

Otros alumnos podrían obtener las coordenadas de dos puntos mediante la fórmula y trazar una recta que pase por ellos. Estos estudiantes se basan en que el gráfico de una función lineal es una recta y, por lo tanto, alcanza con dos puntos para graficarla.

Dependiendo de los conocimientos de los alumnos y del momento en que se plantee este problema en el recorrido de enseñanza, los estudiantes también podrían producir el gráfico a partir de la ordenada al origen y la pendiente. Por ejemplo, ubicando primero la ordenada al origen sobre el eje *y*, y luego marcando al menos un punto utilizando la noción de que la pendiente es el valor de la variación de la coordenada correspondiente al eje *y* por una unidad que varía la coordenada correspondiente al eje *x*. Al realizar el gráfico de esta manera puede suceder que los alumnos utilicen de manera incorrecta la escala, utilizando una longitud del eje *y* para el valor de la ordenada al origen y otro valor para la variación de la segunda coordenada de los puntos. Este error se puede evidenciar al intentar marcar un punto de la recta cuya primera coordenada sea negativa, dado que no se podrá ubicar sobre ella. Por ejemplo, el punto (–0,5 ; 0) que se pide obtener en el ítem b).



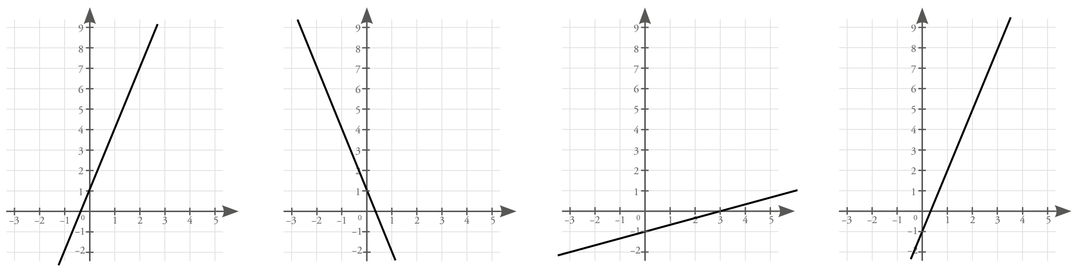
El ítem a) tiene el propósito de movilizar la noción ligada a que las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta tienen que verificar su ecuación. Por ese motivo se pregunta por un punto que no es posible graficar. Algunos alumnos podrían manifestar que no es posible responder la pregunta porque no se puede hacer un gráfico tan grande. Otros podrían realizar otro gráfico con una escala que les permita marcar ese punto, aunque la pérdida de precisión no les posibilite efectivamente saber si el punto pertenece al gráfico. También habrá estudiantes que afirmen que sí pertenece a la recta porque si se reemplaza *x* por 500 en la fórmula se obtiene el valor 1001. Resultaría importante comparar estos tres abordajes en un espacio colectivo de trabajo, y concluir que para afirmar que un punto pertenece o no a una recta no es necesario realizar el gráfico.

El ítem b) tiene distintos propósitos. El docente puede utilizar esta instancia para que los alumnos revisen los gráficos producidos al comienzo del problema. Otro de los propósitos es que los estudiantes hallen preimágenes de la función. El profesor podría luego invitar a los alumnos a verificar, de manera aproximada, que los puntos hallados pertenecen al gráfico de la recta.

El problema que se presenta a continuación tiene por objetivo que los alumnos pongan en juego diferentes características de las funciones lineales estudiadas para reconocer cuál es su gráfico.

Problema

Indicá cuál puede ser el gráfico de la función determinada por la fórmula $f(x) = 3x - 1$. Explicá por qué lo elegiste y por qué rechazaste los demás.



Los estudiantes podrán resolver el problema de a pares, luego de lo cual se podrá debatir acerca de la elección del gráfico y las razones.

Los estudiantes podrán poner en juego diferentes estrategias:

- Determinar las coordenadas de al menos un par de puntos a través del gráfico y comprobar si verifican la ecuación de la recta.
- Analizar qué gráficos tienen ordenada al origen -1, lo cual permite descartar al primero y al segundo de ellos.
- A partir de las coordenadas conocidas de un punto, usar la pendiente –correcta o incorrectamente– para hallar uno o varios puntos más.
- Considerar que la pendiente positiva implica que la recta es creciente, lo que lleva a descartar el segundo gráfico.
- Combinar algunas de las estrategias anteriores.

Seguramente, los estudiantes llegarán a la conclusión de que no alcanza con considerar uno solo de los aspectos anteriores, debido a que no permiten descartar por sí solos tres de los gráficos. Esto podrá retomarse en la puesta en común, luego de la cual podría dejarse registrada alguna estrategia que permite seleccionar el gráfico adecuado. Por ejemplo:

Para resolver el problema se analizaron diferentes características de los gráficos para saber cuál correspondía a la función lineal presentada. Por ejemplo:

- El punto (0 ; –1) debe pertenecer al gráfico porque $f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$.
- La función lineal de fórmula $f(x) = 3x - 1$ tiene ordenada al origen –1, lo cual significa que su gráfico corta al eje y en el punto (0 ; –1).
- La pendiente de la recta es 3. Como es positiva, la función es creciente. Además, por cada unidad que aumenta el valor de x, el valor de y aumenta 3 unidades.

Más en general, podemos decir que existen distintas características de los gráficos de las funciones lineales que se vinculan con sus fórmulas:

- Los puntos que pertenecen a un gráfico deben verificar la fórmula.
- La ordenada al origen es el valor de y del punto de intersección entre el gráfico y el eje y.
- El signo y el valor de la pendiente se relacionan con el crecimiento o el decrecimiento de la función.

Generalmente no alcanza con considerar uno solo de los aspectos anteriores, debido a que no brindan por sí solos todas las características del gráfico y de la función.

En el problema resuelto una sola de las características no permitía descartar tres de los gráficos para poder elegir uno.

Ecuaciones e inecuaciones

Una de las formas en que se espera que las ecuaciones lineales sean presentadas es a partir del trabajo con funciones, en la búsqueda de aquellos valores de la variable independiente donde la función toma un cierto valor predeterminado. Sin embargo, uno de los objetivos finales es que los alumnos logren conceptualizar a las ecuaciones como la expresión de una condición sobre un conjunto de números que tiene asociada un conjunto solución, en contraposición a que sea interpretada como una "igualdad con incógnita". Es por este motivo que se propone el tratamiento de las ecuaciones sin solución y las ecuaciones con infinitas soluciones al mismo tiempo que las que poseen solución única, y no solamente como casos "raros". Se propone también el tratamiento de inecuaciones con una variable.

Tanto para resolver ecuaciones como inecuaciones, es posible apelar a las representaciones gráficas. Pero para poder realizar resoluciones de este tipo es necesario tener conocimientos que permitan coordinar los registros de representación gráfico y algebraico. No se trata solo de "mirar". Por este motivo es esencial que se presenten situaciones en donde se ponga en cuestión la relación entre la representación gráfica y la resolución de una ecuación y/o de una inecuación.

Intervenciones de enseñanza

A continuación se presentan situaciones referidas al trabajo con la *resolución de ecuaciones* y con la coordinación entre la *resolución algebraica y gráfica de problemas que se modelizan con ecuaciones o inecuaciones lineales con una variable*.

La intención es proponer algunos ejemplos de cierto tipo de actividades que abonan a la comprensión de distintas cuestiones referidas a las ecuaciones:

- La noción de ecuación como una función proposicional, es decir que al sustituir la/s variable/s por valores se transforma en una afirmación que puede ser verdadera o falsa.
- La noción de solución de una ecuación como el conjunto de valores que hacen verdadera la igualdad.
- La existencia de ecuaciones con distinta cantidad de soluciones: con solución única, con varias soluciones, con infinitas soluciones y sin solución.
- La existencia de distintas estrategias de resolución: ligadas a relaciones aritméticas, por medio de cálculo mental, por medio del análisis de la estructura de un cálculo y a partir de transformaciones algebraicas.
- La noción de ecuaciones equivalentes y la existencia de distintas operaciones que dejan invariante el conjunto solución.

Cabe aclarar que en este caso no se refiere a la enseñanza de las ecuaciones en tanto un conjunto de técnicas algorítmicas que permiten resolverlas. Sin embargo, esto no invalida que los alumnos deban aprender y poseer un repertorio de técnicas algebraicas que les permitan resolver ecuaciones. Lo que se intenta poner de manifiesto es que estas técnicas deben estar ligadas a conocimientos previos, a estrategias de resolución y a objetivos que las doten de sentido.

Resolución de ecuaciones

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Resolver ecuaciones del tipo

  $x + a = b$
  $x - a = b$
  $a \cdot x = b$ (con $a \neq 0$)
  $x : a = b$ (con $a \neq 0$)
  $a : x = b$

  apelando a operaciones inversas.

- Resolver ecuaciones del tipo $a \cdot x + b = c$ (con $a \neq 0$) a partir de analizar la estructura del cálculo.

- Resolver ecuaciones con solución única, sin solución y con infinitas soluciones del tipo $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ (con a y c no simultáneamente nulos) a través de transformaciones algebraicas.

En el siguiente problema se le propone a los alumnos determinar si un valor de la variable es o no solución de una ecuación. Se trata de que puedan interpretar que la letra puede tomar cualquier valor y que solo algunos de ellos (o todos, o ninguno) hacen verdadera la igualdad.

Los estudiantes podrán resolverlo en pequeños grupos.

Problema

Para cada una de las siguientes ecuaciones, indicá si $x = -2$ es o no solución.

a) $2x + 1 = -3$ b) $-3x + 2 = x - 6$ c) $x + 3 = 3 + x$ d) $x^2 + x - 2 = 2 + x$

Para todas las ecuaciones presentadas, los alumnos podrían reemplazar la variable por el valor -2 y comprobar si verifica o no la igualdad. De esta manera podrían decir que -2 es solución de las ecuaciones a), c) y d), pero que no lo es de la b).

Algunos estudiantes podrían intentar resolver las ecuaciones y comparar la solución obtenida con -2. Para la ecuación a) podrían utilizar conocimientos aritméticos y de cálculo mental, pensando que $2x$ debe ser -4, para que al sumarle 1 el resultado sea -3. Luego, a partir de allí, deducir que x debe valer -2. Para la ecuación b) no resulta tan sencillo utilizar conocimientos aritméticos y de cálculo mental. Sin embargo, podría ser que los alumnos ensayen distintos valores y los vayan "ajustando" hasta obtener la solución. La estrategia de reemplazar el valor de x por -2 en la ecuación c) también es válida, aunque a algunos estudiantes les llame la atención su estructura y digan que cualquier número que se reemplace va a dar lo mismo en ambos lados del signo igual. La introducción de la ecuación d) tiene como propósito obturar las estrategias algebraicas de resolución (en caso de que las tengan disponibles) o la de probar con varios valores, debido a que los cálculos implicados son más complicados.

Todos estos asuntos deberían discutirse en la puesta en común. Además, resulta importante e interesante dedicar algunos momentos a pensar acerca de la ecuación $x + 3 = 3 + x$. Al analizar su estructura, puede verse que ambos miembros son iguales para todo valor de x. Luego, al reemplazar a la variable por un número cualquiera, se obtiene en todos los casos una proposición verdadera. Es así que todos los números reales son solución, en particular $x = -2$. La técnica de reemplazar permite determinar si un valor es solución, pero no informa cuáles son todas las soluciones a menos que se haga un análisis más completo.

Como producto del trabajo colectivo se podría dejar registrado lo siguiente:

> Para saber si un número es solución de una ecuación, alcanza con sustituir la variable por ese número. Si se obtiene una proposición verdadera, entonces es solución. Si se obtiene una proposición falsa, no lo es.
>
> Por ejemplo, para analizar si 2 es solución de la ecuación $(2x - 1)^2 = 9$, se sustituye en lugar de la variable y se hace el cálculo:
>
> $$(2 \cdot 2 - 1)^2 = 9$$
>
> $$3^2 = 9$$
>
> Como 9 = 9 es una proposición verdadera, 2 es solución de la ecuación.
> En cambio, si se considera $x = 3$, se obtiene:
>
> $$(2 \cdot 3 - 1)^2 = 9$$
>
> $$5^2 = 9$$
>
> Como 25 = 9 es una proposición falsa, 3 no es solución de la ecuación.

El siguiente problema responde a la intención de poner en cuestión la propiedad uniforme, relacionándola con la conservación del conjunto solución de la ecuación. Como se dijo anteriormente, uno de los propósitos de enseñanza es dotar de sentido a las transformaciones algebraicas.

Problema

Una solución de la siguiente ecuación es 3:

$$-2x + 8 = 4x - 10$$

Sin hacer los cálculos, indicá si 3 también es solución de estas ecuaciones.

$$-2x + 8 + 10 = 4x - 10 + 10$$

$$-2x + 18 = 4x$$

$$-2x + 18 + 2x = 4x + 2x$$

$$18 = 6x$$

Los estudiantes podrán resolver este problema en parejas.

El enunciado propone responder sin hacer los cálculos, porque se busca que los alumnos desarrollen otras estrategias, en particular que realicen un análisis de las transformaciones. Podrían argumentar que el resultado al reemplazar x por 3 era el mismo en ambos miembros de la primera ecuación (antes de sumar 10), por lo que luego de sumar 10 también lo será.

Si bien el enunciado propone no realizar los cálculos, es posible que a algunos alumnos les resulte muy complejo pensar en la igualdad o no de los resultados de ambos miembros sin poder apoyarse en algunos cálculos concretos. Para situaciones de este tipo, una posible intervención consiste en acompañar los razonamientos generales con algunos cálculos en los cuales se reemplace la variable por valores y se hagan las cuentas. Es de suma importancia no perder de vista que el foco debe estar puesto en el análisis general, para concluir, por ejemplo, que el valor 3 también será solución de la otra ecuación porque el resultado de cada miembro se "modifica de la misma manera" sumando 10. Por ejemplo:

Evaluamos qué pasa con las expresiones de las ecuaciones para $x = 3$.

$$-2x + 8 = 4x - 10 \longrightarrow -2 \cdot 3 + 8 = 4 \cdot 3 - 10$$

$$2 = 2$$

Cuando $x = 3$ las expresiones de la primera ecuación en ambos miembros valen 2.

$$\underbrace{-2x + 8}_{2} + 10 = \underbrace{4x - 10}_{2} + 10 \longrightarrow 2 + 10 = 2 + 10$$

$$-2x + 18 = 4x \qquad\qquad 12 = 12$$

Luego de haber sumado 10 a ambos miembros, las expresiones valen 12, pero siguen siendo iguales.

Del mismo modo que se analizó anteriormente, las transformaciones que siguen a la primera también conservan el conjunto solución porque, para el valor que es solución, la proposición sigue siendo verdadera. Sin embargo, en algunas de estas transformaciones hay una diferencia que debe ser tenida en cuenta. Por ejemplo, en una de ellas se suma en ambos miembros $2x$, que es una expresión y no un número. En este caso se podrá razonar de manera general que, sin importar el valor de x, la expresión $2x$ tendrá el mismo valor cuando se suma en ambos miembros, por lo que no modificará la veracidad de la proposición. De la misma manera que se mencionó anteriormente, también se podría realizar un análisis no tan general. En el caso que se está analizando el valor de x es 3, por lo que cuando se suma $2x$ se estaría sumando 6 en ambos miembros.

Otro asunto para discutir en la puesta en común es pensar en que si todas las ecuaciones anteriores tienen el mismo conjunto solución, entonces es posible resolver cualquiera de ellas para hallarlo. El docente podrá preguntar a los estudiantes cuál elegirían y por qué.

A partir de las respuestas será posible concluir que la última de las ecuaciones tiene la particularidad de que es posible saber cuál es su solución sin volver a transformarla, solo analizando el cálculo.

El objetivo de los problemas de este estilo, en donde se ponen en cuestión las transformaciones algebraicas, es que los alumnos puedan generalizar la validez de la transformación y construir la técnica. En este caso, se podría fundamentar la validez general afirmando que sin importar el valor de x que hace verdadera la primera proposición, si se realiza la misma operación[16] en ambos miembros los resultados seguirán siendo iguales, por lo que la proposición resultante también será verdadera para ese valor de x.

En la siguiente situación se propone analizar el caso de una ecuación sin solución y otra con infinitas soluciones.

Problema

a) Malena dice que la ecuación $2x + 1 = 2x + 3$ no tiene solución porque, sin importar el valor de x, el resultado en ambos miembros va a dar siempre distinto. ¿Tiene razón? ¿Por qué? Discutilo con algunos compañeros.

b) ¿Es posible utilizar un razonamiento similar al de Malena para analizar si la ecuación $2x + 1 = x + 1 + x$ tiene o no solución?

Este problema busca que los alumnos analicen el conjunto solución de la ecuación sin necesidad de realizar transformaciones algebraicas. Se espera que lo hagan por medio del análisis de la información que portan las expresiones en cada miembro. Para la parte a), comparando los dos cálculos que implican las expresiones, podrían establecer que ambos poseen el término $2x$, que en ambos casos tendrá el mismo resultado para cualquier valor de x. Luego, a esas dos expresiones se le suman números distintos, 1 en el miembro izquierdo y 3 en el miembro derecho, por lo que nunca podrán dar resultados iguales. De todas maneras, los alumnos también podrían realizar transformaciones algebraicas, si es que las conocen y las tienen disponibles. Por ejemplo, operando podrían llegar a la ecuación $0 \cdot x = 2$. Cabe remarcar que para poder decidir que esta ecuación no tiene solución también es necesario realizar una lectura de la información que porta el cálculo o una interpretación aritmética: se debe poder establecer que no hay ningún número que al multiplicarlo por cero dé como resultado 2.

Para las ecuaciones que no tienen solución no será posible obtener un valor para la variable que la verifique. Tanto al leer la información que porta la ecuación como al transformarla en otra equivalente, se obtendrá una expresión que muestre una contradicción, una proposición que es falsa para todos los valores de x.

[16] En este momento no se analizará la imposibilidad de multiplicar ambos miembros por cero.

Luego de debatir acerca de la resolución de la parte a), los estudiantes podrán resolver la parte b) en grupos con esos mismos compañeros.

Se espera que puedan reinvertir el análisis que se discutió a propósito de la parte a). En este caso, los estudiantes podrán leer que las expresiones de cada miembro son equivalentes, porque son iguales para todos los valores de x. Otros podrán transformar el miembro de la derecha y llegar a la misma conclusión:

$$2x + 1 = x + 1 + x$$

$$2x + 1 = 2x + 1$$

Seguramente habrá alumnos que sigan transformando la ecuación para obtener $0 \cdot x = 0$ y luego leer la expresión e interpretar que cualquier número multiplicado por cero da cero.

En la ecuación que tiene por solución a todos los números, tanto al leer la información que porta como al transformarla en otra equivalente, se obtendrá una expresión que muestre una proposición que es verdadera para todos los valores de x.

Se sugiere dejar registrado en el pizarrón y en las carpetas lo siguiente:

> Cuando las ecuaciones no tienen solución o tienen infinitas soluciones es necesario realizar interpretaciones.
>
> Por ejemplo, para determinar que la ecuación $2x + 1 = 2x + 3$ no tiene solución, se puede establecer que $2x$ tendrá el mismo resultado para cualquier valor de x y que, al sumarle dos números diferentes en cada miembro, nunca darán el mismo número, por lo que nunca se verifica la igualdad. Por lo tanto, su conjunto solución es vacío, y se simboliza como $S=\emptyset$.
>
> Para determinar que la ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones, es necesario interpretar que cualquier número multiplicado por cero da como resultado cero, por lo que la igualdad se verifica para cualquier valor de x.

Es importante recordar que los problemas aquí presentados no constituyen una secuencia de enseñanza, por lo que no resultan suficientes para que los estudiantes construyan un nuevo contenido. Es necesario que los alumnos tengan distintas instancias en las que se enfrenten a la resolución de distintos tipos de problemas que traten el mismo contenido.

Por ejemplo, luego del trabajo con un problema como el anterior, se les podría proponer realizar una actividad como la siguiente.

Actividad

Inventá tres ecuaciones:

a) Una cuyo conjunto solución sea $S=\{-2\}$.
b) Una cuyo conjunto solución sea $S=\varnothing$.
c) Una para la cual cualquier número sea solución.

A propósito de la última conclusión, se puede retomar una cuestión que se mencionó en el eje correspondiente a Números y álgebra. Una práctica algebraica que es necesario explicitar y poner en cuestión con los estudiantes es la de prever la "forma" que debe tener la expresión que permite resolver un problema. En algunos casos, cuando se realizan transformaciones en un sentido algebraico ya se sabe a lo que se quiere llegar. Por ejemplo, cuando se resuelve una ecuación, generalmente se pretende arribar a una expresión de la que pueda leerse directamente la solución. Reflexionando en conjunto con los estudiantes acerca de la manera en que se puede obtener una expresión de ese tipo, será necesario poner en cuestión la conveniencia de realizar unas transformaciones sobre otras. Además, como sucede en el caso de las ecuaciones sin solución o con infinitas soluciones, se deberán considerar también los "momentos" en los que no conviene hacer más transformaciones, pues resulta necesario detenerse a interpretar las expresiones.

Resolución algebraica y gráfica de problemas que se modelizan con ecuaciones o inecuaciones lineales con una variable

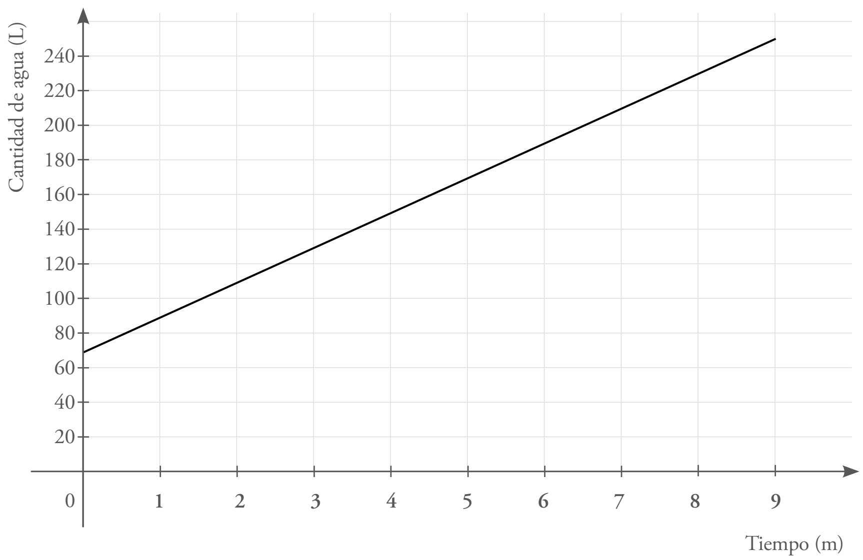
Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Resolver ecuaciones del tipo $ax + b = c$ (donde $f(x) = ax + b$, en problemas en contextos intra- y extramatemáticos.
- Resolver gráficamente inecuaciones del tipo $ax + b < c$ a partir del análisis del gráfico de la función $f(x) = ax + b$, en problemas en contextos intra- y extramatemáticos.[17]
- Resolver ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$ (donde $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$), en problemas en contextos intra- y extramatemáticos.
- Resolver gráficamente inecuaciones del tipo $ax + b < cx + d$ (donde $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$), en problemas en contextos intra- y extramatemáticos.

[17] Con fines de facilitar la lectura y sin pérdida de generalidad, en todos los indicadores de aprendizaje y problemas en los que se incluyen inecuaciones se consideran desigualdades con el uso del signo "<". En todos los casos se podrían expresar inecuaciones análogas utilizando los signos ">", "≤" y "≥".

Problema

Una pileta se llena de manera uniforme mediante una bomba. La fórmula $f(x) = 20x + 70$ representa la cantidad de agua que posee la pileta (medida en litros) en función del tiempo (medido en minutos) que transcurre desde que comenzó el proceso, donde $0 \leq x \leq 9$. A continuación se presenta el gráfico de la función.



a) Si la bomba permaneció encendida hasta que la pileta se llenó, ¿cuál es la capacidad de la pileta?
b) En qué intervalo la cantidad de agua en la pileta fue menos que 160 litros?

Los estudiantes podrán resolver, de a dos, la parte a) del problema, luego de lo cual se sugiere hacer una puesta en común.

El inicio del problema tiene por objetivo, por un lado, que los estudiantes se familiaricen con el modelo. Por el otro, poner en discusión la limitación del uso de la percepción para obtener coordenadas de puntos que pertenecen al gráfico de una función.

Los alumnos tendrán que tomar una primera decisión para pensar en una estrategia de resolución: que la bomba estuvo prendida durante 9 minutos, que es un dato proveniente del dominio de la función dado en el enunciado y que también pueden corroborar a partir del gráfico.

Una vez decidido cuál es el punto a considerar, algunos estudiantes hallarán sus coordenadas a ojo, mientras que otros usarán la fórmula de la función.

En la puesta en común se puede plantear la falta de precisión y datos para leer la segunda coordenada del punto, por lo que es necesario usar la fórmula. Puede dejarse registrado lo siguiente:

> No siempre es posible saber cuáles son las coordenadas de un punto mirando el gráfico de la función. Si no hay datos que permitan conocerlas ni están marcadas, es necesario usar la fórmula de la función para determinarlas.
>
> En este problema, sabemos que la bomba estuvo prendida hasta $x = 9$. Para hallar la cantidad de agua es posible hallar la imagen de ese valor de x:
>
> $$f(9) = 20 \cdot 9 + 70 = 250$$
>
> Luego, la capacidad de la pileta es de 250 litros.

Los estudiantes podrán resolver en parejas la parte b) del problema.

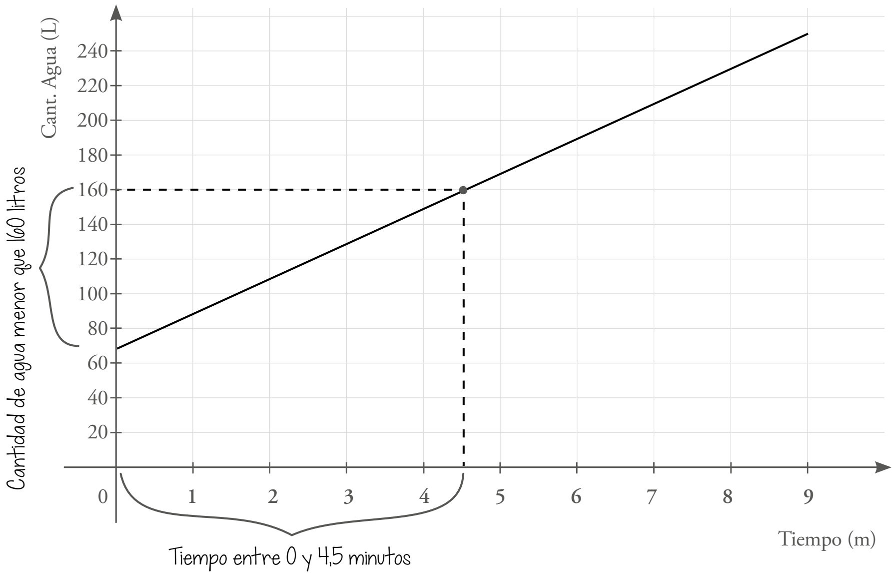
Seguramente, primero hallarán el valor del tiempo en el que la cantidad de agua es de 160 litros, para lo cual podrán:

- Estimar que el punto (4,5 ; 160) pertenece al gráfico de la función porque lo observan "a ojo".
- Determinar que el punto (4,5 ; 160) pertenece al gráfico de la función y luego afirmar que el momento en que la pileta posee 160 litros es 4 minutos y medio porque su imagen a través de la función es 160, ya que $20 \cdot 4{,}5 + 70 = 160$.
- Plantear y resolver la ecuación $20x + 70 = 160$.

Luego, podrán afirmar que el intervalo en el que la cantidad de agua fue menor que 160 litros es desde 0 hasta 4 minutos y medio, porque las imágenes de esos valores a través de la función f son menores que 160. Desde una interpretación perceptual y un lenguaje no preciso, podrán decir que para esos valores de tiempo los puntos de la recta están por debajo de 160. También podrían basarse en que la función f es creciente, por lo que antes de los 4 minutos y medio la cantidad de agua es menor que 160 litros.

En la puesta en común podrá retomarse que primero fue necesario saber en qué momento la cantidad de agua era exactamente 160 litros. Y que luego se utilizó el crecimiento o decrecimiento de la función para determinar si el intervalo para el cual la cantidad de agua era menor fue antes o después de ese momento. De haber surgido, sería también necesario recordar que las resoluciones "a ojo" no son suficientes. Si bien pueden servir para realizar una estimación, luego es necesario verificar si el valor es o no solución.

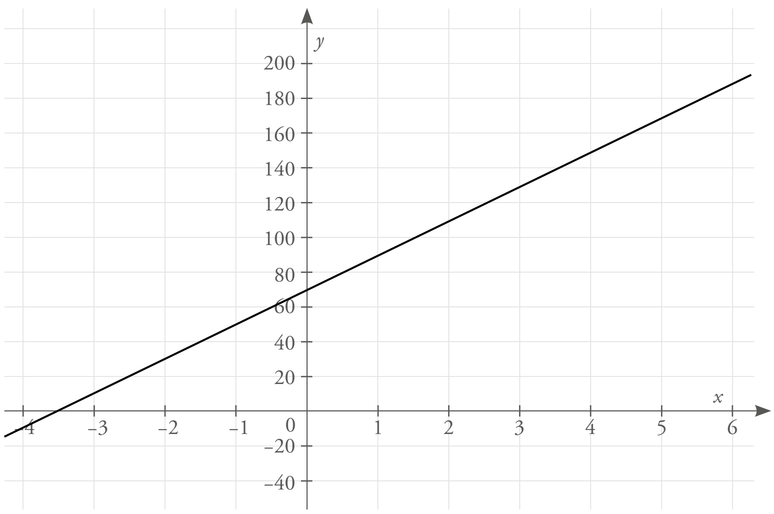
Como uno de los objetivos del trabajo con ecuaciones y funciones es el de conversión y coordinación entre registros de representación, es importante mostrar el razonamiento en un gráfico.



Este tipo de problema se puede plantear también en una situación intramatemática, ligado directamente a la resolución de una inecuación. Por ejemplo, a partir de un problema como el siguiente.

Problema

En el siguiente sistema de coordenadas se ha representado el gráfico de la función $f(x) = 20x + 70$. Usando el gráfico, hallá la solución de la inecuación $20x + 70 < 160$.



De este modo se podría trabajar de manera específica la resolución de ecuaciones e inecuaciones, desligándolas del contexto extramatemático. Para ello el profesor deberá disponer de instancias colectivas de trabajo en el aula en donde se vinculen y se pongan en relación las resoluciones de ambos problemas. Es importante que el docente explicite que el objetivo es generalizar estas resoluciones de manera que sirvan para cualquier problema similar, lo que se constituye como uno de los objetivos del trabajo matemático en el aula.

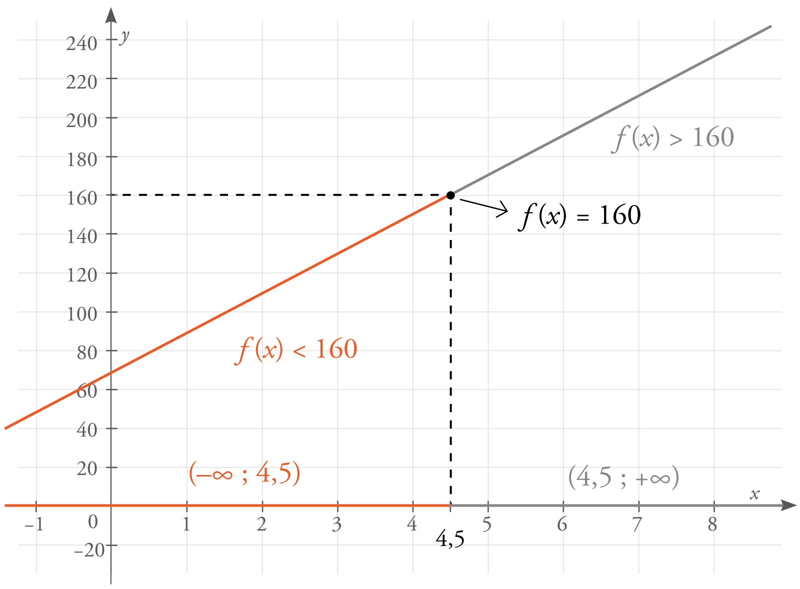
Al finalizar la puesta en común de algunos de estos problemas podría dejarse registrada alguna estrategia que permita resolver una inecuación lineal apoyándose en un gráfico. Por ejemplo, a partir de este último problema podría concluirse:

Para resolver la inecuación $20x + 70 < 160$ es posible apoyarse en el gráfico de la función $f(x) = 20x + 70$.

Primero es necesario hallar el valor de x para el cual $f(x) = 160$ y reconocer el punto que representa. En este caso, el punto es (4,5 ; 160).

Luego, a partir de observar si la función es creciente o decreciente, determinar si los valores de x para los cuales $y < 160$ son menores o mayores al valor de x hallado. En este caso, como la función es creciente, los valores de x que son solución de la inecuación son los menores a 4,5. Por lo tanto, la solución es $(-\infty\ ;\ 4{,}5)$.

De manera análoga, la solución de la inecuación $20x + 70 > 160$ está compuesta por todos los valores de x mayores que 4,5. Es decir, es el intervalo $(4{,}5\ ;\ +\infty)$.



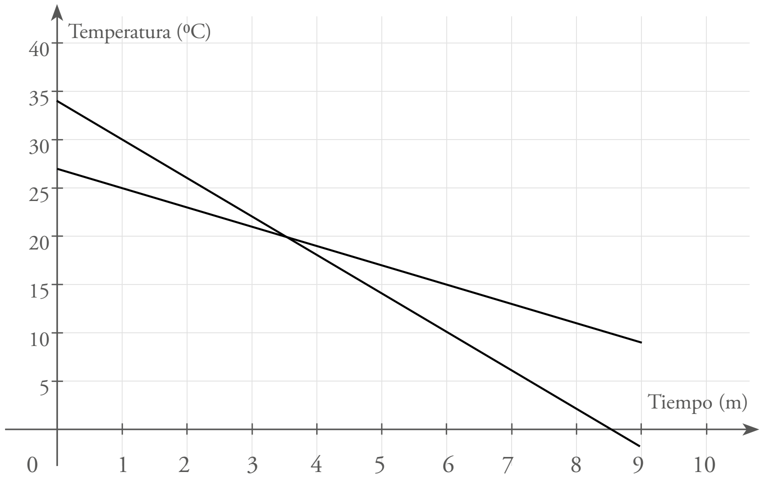
Se puede decir, entonces, que el dominio de la función queda partido en tres conjuntos:

- los valores de x para los cuales $f(x) = 160$, {4,5};
- los valores de x para los cuales $f(x) < 160$, $(-\infty\ ;\ 4{,}5)$;
- los valores de x para los cuales $f(x) > 160$, $(4{,}5\ ;\ +\infty)$.

El siguiente problema se propone trabajar sobre la resolución de un sistema de ecuaciones a partir de la intersección del gráfico de dos funciones lineales, identificando el valor de la variable independiente para el cual el valor de la variable dependiente es el mismo. Luego, sobre la base de este dato y de la posición relativa de los gráficos, poder resolver también inecuaciones.

Problema

Las fórmulas $f(x) = -2x + 27$ y $g(x) = -4x + 34$ permiten calcular la temperatura de dos sustancias (medida en °C) en función del tiempo (medido en minutos) que transcurre desde que comenzó un experimento, donde $0 \leq x \leq 9$. A continuación se presenta el gráfico de ambas funciones.



a) ¿En qué momento la temperatura de ambas sustancias fue la misma?
b) ¿En qué intervalo la temperatura de la sustancia correspondiente a f fue mayor que la de la sustancia correspondiente a g?

Los estudiantes podrán resolver la parte a) del problema de a pares, para luego hacer una puesta en común.

El inicio del problema tiene por objetivo que los alumnos puedan reconocer que el punto de intersección entre los dos gráficos representa el momento en que ambas sustancias tienen la misma temperatura. Esta es una de las primeras cuestiones que debería ser explicitada en la puesta en común. De ser necesario, también podría utilizarse para poner en discusión de manera colectiva la limitación del uso de la percepción para obtener valores de una función, pues, una vez decidido cuál es el punto a considerar, algunos estudiantes hallarán sus coordenadas “a ojo”, mientras que otros usarán la fórmula de la función. Por ejemplo, podrán:

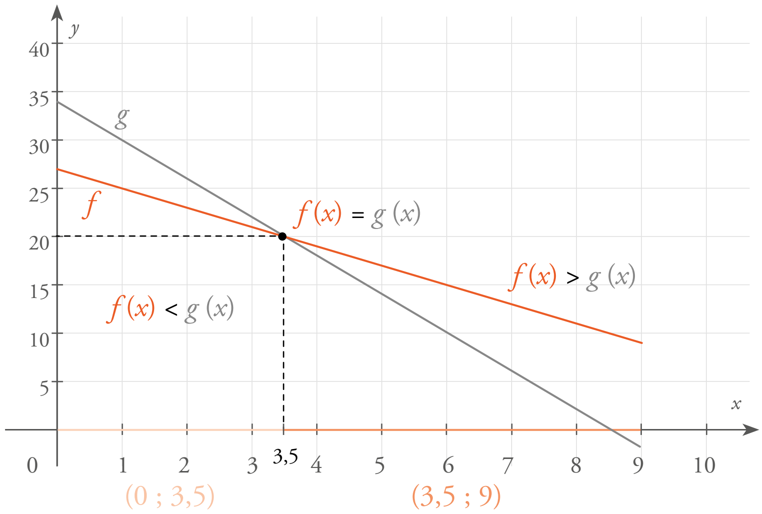
- Estimar “a ojo” que el punto (3,5 ; 20) pertenece a los gráficos de ambas funciones.
- Determinar que el punto (3,5 ; 20) pertenece al gráfico de ambas funciones y luego afirmar que el momento en que la temperatura de ambas sustancias es 20 °C es 3 minutos y medio porque su imagen a través de ambas funciones es 20, ya que $-2 \cdot 3,5 + 27 = 20$ y $-4 \cdot 3,5 + 34 = 20$.
- Plantear y resolver la ecuación $-2x + 27 = -4x + 34$.

Durante la puesta en común también se podrán comparar las distintas maneras en que se pueden utilizar las fórmulas para resolver este problema, retomando las resoluciones de los estudiantes. Por ejemplo, se podrá mostrar una resolución que parta de una interpretación gráfica, que establezca primero las coordenadas del punto de intersección y luego utilice las fórmulas para validar los resultados. También se podrá mostrar una resolución que utilice directamente las fórmulas de las funciones, que plantee una ecuación y que la resuelva para obtener el tiempo en el que ambas temperaturas fueron iguales. En este último caso, de no haber surgido, se les podría proponer a los alumnos comparar los resultados algebraicos con la ubicación en los ejes cartesianos del punto de intersección y establecer su coherencia.

Los estudiantes podrán retomar la resolución del ítem b) en parejas. Para responder a la pregunta, en primer lugar deberán determinar cuál es el gráfico que corresponde a cada una de las funciones. Luego podrán afirmar que el intervalo es desde 3 minutos y medio hasta 9, porque las imágenes de esos valores a través de la función f son mayores que las imágenes a través de la función g. Desde una interpretación perceptual y un lenguaje no preciso, podrán decir que para esos valores de tiempo los puntos de la recta que representa a la función f están por encima de la recta que representa a la función g.

En la puesta en común podrá retomarse que primero fue necesario saber en qué momento la temperatura de ambas sustancias era la misma. Y que luego se utilizó la posición relativa de ambas rectas para determinar si el intervalo para el cual la temperatura de una de las sustancias era mayor fue antes o después de ese momento.

Como uno de los objetivos del trabajo con ecuaciones y funciones es el de conversión y coordinación entre registros de representación, es importante mostrar el razonamiento en un gráfico:



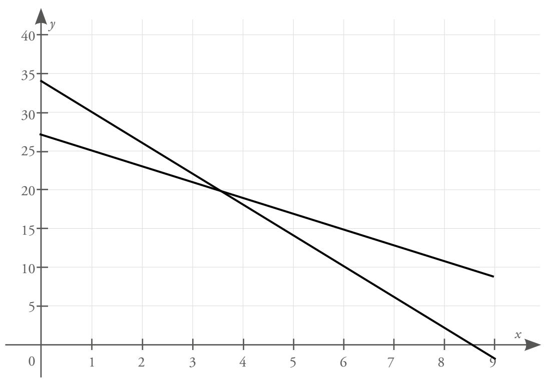
Se puede decir, entonces, que el dominio de la función queda partido en tres conjuntos:

- los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$, $\{3,5\}$;
- los valores de x para los cuales $f(x) < g(x)$, $(0 ; 3,5)$;
- los valores de x para los cuales $f(x) > g(x)$, $(3,5 ; 9)$.

Como se desarrolló a propósito del caso de las ecuaciones e inecuaciones en donde interviene una sola función lineal, este tipo de problema se puede plantear también en una situación intramatemática, ligada directamente a la resolución de una inecuación. Por ejemplo, mediante el siguiente problema.

Problema

En el siguiente sistema de coordenadas se han representado los gráficos de las funciones $f(x) = -2x + 27$ y $g(x) = -4x + 34$. Usando el gráfico, hallá la solución de la inecuación $-2x + 27 < -4x + 34$.



Geometría y medida

El eje Geometría y medida se muestra como un campo propicio para que los estudiantes produzcan argumentaciones deductivas. Es así que los problemas sobre los que se trabaja implican el uso y el establecimiento de propiedades de las figuras, no solo para anticipar resultados sino también para asegurar que otras se cumplen, sin necesidad de recurrir a la medición.

El trabajo deductivo supone tratar con la generalidad y no solo con figuras particulares. Esto conlleva el gran desafío de comunicar las estrategias de resolución y validarlas de modo que otros puedan comprenderlas. La validación se constituye como una cuestión transversal a todos los ejes y es necesario trabajarla en cada uno de ellos. No es lo mismo validar en álgebra, en funciones o en geometría.

Estudio de triángulos

Uno de los propósitos del trabajo geométrico en el Ciclo Básico es estudiar la congruencia de triángulos. Las tareas que se proponen tienen por objetivo elaborar criterios que permitan decidir acerca de la congruencia a partir de construcciones. El estudio de la posibilidad o no de construcción y la determinación de las condiciones necesarias para que una construcción sea única es la base sobre la cual apoyarse para lograr ese objetivo. Por ejemplo, se podrá afirmar que dos triángulos que tengan la misma medida de sus tres lados son congruentes, pues con esos datos no sería posible construir otro diferente.

Para el trabajo sobre semejanza de triángulos también se proponen situaciones de construcción. Se busca que sea necesario poner en juego la definición de la figura y que se elaboren criterios para establecer las condiciones mínimas suficientes para realizar la construcción.

Intervenciones de enseñanza

Para los fines de este texto, se han considerado problemas referidos a *construcción y congruencia de triángulos* y a *semejanza de triángulos*.

Construcción y congruencia de triángulos

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Establecer el rango de medidas que puede tener el lado de un triángulo a partir de la medida de sus otros dos lados, utilizando la desigualdad triangular.
- Establecer y fundamentar la posibilidad de construcción de un triángulo dadas las medidas de dos o tres de sus elementos.
- Determinar y fundamentar la unicidad de construcciones de triángulos dadas las medidas de dos o tres de sus elementos.
- Determinar si dos triángulos son congruentes.

Problema

Alejandro construyó la figura que se describe en el siguiente instructivo:

a) Trazá un segmento AB de 7 cm de longitud. Con centro en A, trazá una circunferencia de 6 cm de radio.
b) Marcá sobre la circunferencia un punto C que no se encuentre alineado con los puntos A y B.
c) Dibujá un triángulo con vértices en A, B y C.

Indicá, sin medir, cuál es la longitud que puede tener cada uno de los lados del triángulo construido por Alejandro.

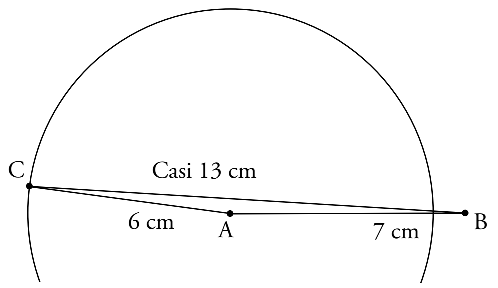
Los estudiantes podrán resolver el problema de manera individual durante un tiempo acotado, para luego discutir en parejas. Esta organización de la clase tiene por objetivo que cada alumno llegue a compartir con otro su propia resolución.

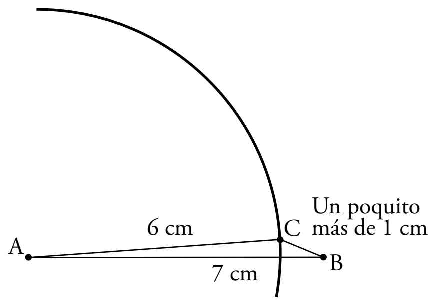
Es esperable que en una primera instancia realicen la construcción que describe el instructivo. Cabe aclarar que por medio de estas instrucciones se pueden construir distintos triángulos, ya que estas no determinan la posición del punto C. Entonces será necesario poner atención en la interpretación que los alumnos hagan de la figura. Desde una concepción estática, analizarán las medidas de los lados de la figura particular que quedó construida. En cambio, desde una concepción dinámica analizarán las distintas posibilidades dependiendo de la posición del punto C. Cabe aclarar que es interesante utilizar estas concepciones como categorías de análisis de las producciones de los estudiantes, pero que no son cuestiones matemáticas a enseñar en este momento. Por otro lado, sí es importante que los alumnos comprendan en qué casos un punto queda unívocamente determinado y en cuáles no, para así analizar qué sucede cuando varía su posición.

Al comenzar la puesta en común será necesario poner en relación las producciones realizadas desde estas dos concepciones, con el propósito de establecer que la medida del lado BC no está determinada. Se podrá leer la consigna en conjunto con toda la clase, con el objetivo de analizar que se explicita que se debe realizar “sin medir”. Se podría retomar la resolución de los alumnos que hayan medido con regla el lado BC para una construcción en particular, con el doble propósito de poner en cuestión la restricción de la medición y la variación de la medida del lado BC.

Luego de realizar la construcción, y dependiendo de la interpretación que hayan hecho de la figura, es posible que los alumnos establezcan la medida de los lados del triángulo de distintas maneras. Por ejemplo, podrían:

- Medir con regla –aunque la consigna indique que debe resolverse sin hacerlo– y hallar las medidas de los tres lados. Algunos también podrían afirmar que no es posible conocer la medida del lado BC porque el punto C podría encontrarse en otro lugar.
- Afirmar que las medidas de los lados AB y AC son 7 cm y 6 cm, respectivamente. La primera porque es el dato que se da para construir el segmento y la segunda porque el lado AC es radio de la circunferencia.
- Con respecto a la medida del lado BC:
  - › Desde una interpretación estática, pensando en la figura específica que construyeron, podrían medirla o bien afirmar que no se puede establecer su medida porque faltan elementos para poder determinarla.
  - › Desde una interpretación dinámica, podrían decir que no se puede establecer la medida porque existen muchas posiciones posibles para el punto C.
  - › También desde una interpretación dinámica y apoyándose en la construcción, podrían afirmar que la medida debe ser menor que 13 cm y mayor que 1 cm, porque cuando los segmentos quedan alineados no se forma el triángulo. Algunos podrían apelar directamente a la desigualdad triangular para indicar que la medida de $\overline{BC}$ puede ser como máximo 13 cm, ya que debe ser menor que la suma de las medidas de los otros dos lados, y como mínimo 1 cm, porque también debe ser mayor que la diferencia entre las medidas de los otros dos lados.
  - › Podrían acompañar los razonamientos con distintas construcciones, como las siguientes.





El trabajo con un solo problema de este tipo no es suficiente para formular propiedades generales, pues es necesario el estudio de distintas situaciones para que los estudiantes alcancen a identificar las relaciones que se conservan. Sin embargo, al finalizar la puesta en común de este problema, se podrá realizar una conclusión que retome el enunciado de la **desigualdad triangular** y muestre cómo se aplica a esta situación en particular.

Desigualdad triangular

En todo triángulo la medida de cualquiera de sus lados es siempre menor que la suma de las medidas de los otros dos lados.

En este caso, la medida del lado BC es menor que la suma de la medida de los lados AB y AC:

$$|\overline{BC}| < 7 \text{ cm} + 6 \text{ cm}$$
$$|\overline{BC}| < 13 \text{ cm}$$

En todo triángulo la medida de cualquiera de sus lados es siempre mayor que el valor absoluto de la diferencia entre las medidas de los otros dos lados.

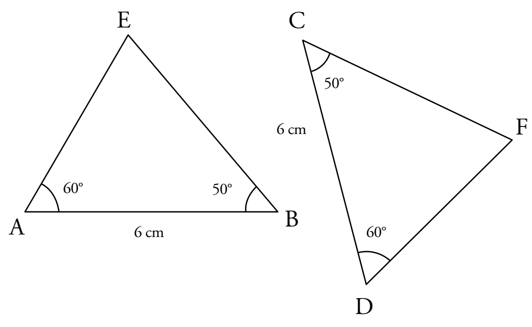
En este caso, la medida del lado BC es mayor que el valor absoluto de la diferencia entre las medidas de los lados AB y AC:

$$|\overline{BC}| > |7 \text{ cm} - 6 \text{ cm}|$$
$$|\overline{BC}| > 1 \text{cm}$$

El próximo problema propone el análisis de la cantidad de soluciones en una situación de construcción de triángulos. Luego plantea la comparación de dos triángulos particulares para determinar su congruencia, que se puede realizar sobre la base de las resoluciones anteriores.

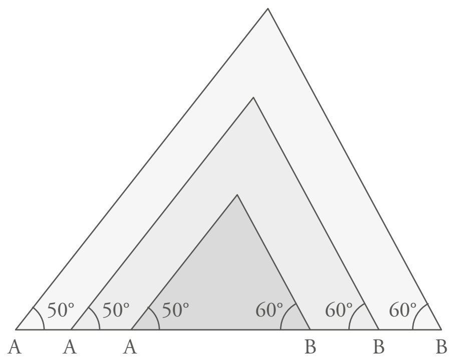
Problemas

1. a) ¿Cuántos triángulos ABC distintos se pueden construir con $|\hat{A}| = 50°$ y $|\hat{B}| = 60°$?
   b) ¿Y si se agrega el dato de que $|\hat{C}| = 70°$?
   c) ¿Y si se agrega el dato de que $|\overline{AB}| = 6$ cm ?
2. ¿Será cierto que estos dos triángulos son congruentes?



Los alumnos podrán resolver el ítem 1. a) de manera individual y los otros, en parejas. Es esperable que, para responder las preguntas, realicen distintas construcciones.

Las posibilidades de construcción para el ítem 1. a) son infinitas, porque es posible comenzar con un segmento de cualquier medida y luego trazar los ángulos con vértice en los extremos del segmento, por ejemplo. Sin embargo, puede ocurrir que algunos estudiantes realicen solamente una construcción que cumpla con lo pedido, algunos de ellos sabiendo que no es la única posible, mientras que otros tal vez no se planteen la unicidad de la construcción. Otros, en cambio, podrán construir más de uno. También existe la posibilidad de que realicen una sola construcción y la utilicen como soporte para razonar sobre la existencia de otros infinitos triángulos. En este punto, antes de pasar a la resolución del ítem 1. b), será necesario realizar una puesta en común exhibiendo y comparando las distintas construcciones. Se podrá utilizar el hecho de que todas ellas cumplen con las condiciones pedidas para concluir que las posibilidades son infinitas.



Para resolver el ítem 1. b), los alumnos podrán decir que las posibilidades de construcción no varían, dado que en todos los triángulos anteriores la medida del tercer ángulo ya era de 70°. Lo podrán fundamentar apelando a la propiedad de que en todo triángulo la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 180°. El profesor podrá retomar esta propiedad al interactuar con los alumnos durante la resolución en parejas y durante la puesta en común posterior.

En el ítem 1. c) los estudiantes podrán afirmar que, bajo estas condiciones, la construcción sí es única y lo podrán fundamentar sobre la base de los razonamientos que hayan utilizado para resolver el ítem anterior. Posiblemente hayan argumentado que se podían construir infinitos triángulos debido a que se podía empezar con un segmento de cualquier medida y luego trazar los ángulos con vértice en los extremos del segmento. En este caso, se comienza con un segmento determinado y luego se construyen los ángulos, por lo que queda una sola ubicación posible para el tercer vértice: en la intersección de esos otros dos lados (de los que a su vez quedan determinadas sus medidas).

Los problemas de construcción, como el planteado, constituyen una base para estudiar la congruencia entre triángulos. En función de eso, resulta importante que los estudiantes analicen –solos o en espacios colectivos– la cantidad de soluciones posibles.

En el problema 2, para determinar si son congruentes, se proponen dos triángulos cuyas medidas coinciden con los datos presentados en el problema 1, ítem c). Es posible que algunos alumnos no recuerden qué significa que dos triángulos son congruentes, por lo que el docente podrá recordarlo.

Como se mencionó en la introducción de esta sección, uno de los objetivos del trabajo con construcciones de triángulos es el de formular criterios de congruencia. Es por esto que se torna imprescindible discutir con los estudiantes que, si bien para que dos triángulos sean congruentes es necesario que todos sus elementos sean congruentes, para determinar si dos triángulos son congruentes no es necesario comparar todos sus elementos. Y que esto se debe a que la medida de algunos de estos elementos está determinada por la medida de los otros. Por ejemplo, a propósito del ítem 1. b) se podría discutir que, una vez que la medida de dos de los ángulos es conocida, queda determinada la medida del tercero. Luego, a propósito del ítem 1. c) y de que en este caso la construcción es única, se podría explicitar que a partir de conocer la medida de los ángulos y del lado sobre el que se apoyan, quedan determinadas las medidas de los otros dos lados.

Para resolver el problema 2, los estudiantes podrían:

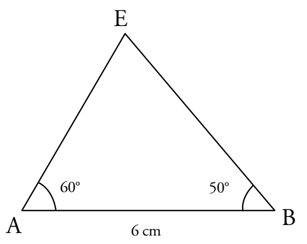
- Medir los lados y los ángulos de ambos triángulos con el objetivo de corroborar que tienen las mismas medidas.
- A partir de las medidas que se muestran, reconocer que se trata de dos triángulos como los que se analizaron en el ítem 1. b) y afirmar que son congruentes porque, debido a que la construcción con esos datos era única, son “el mismo triángulo” y tienen las mismas medidas.
- De manera general, afirmar que los dos triángulos son congruentes porque siempre que se sepan las medidas de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, se puede construir un solo triángulo, por lo que, si se construyen dos, ambos deben tener las mismas medidas.

No se espera que los estudiantes puedan construir estas propiedades generales y los criterios de congruencia a partir de la resolución de un solo problema como el presentado. Será necesario que el docente proponga la resolución de diversas situaciones en donde se estudie y se pongan en cuestión las condiciones necesarias para que las construcciones de triángulos sean únicas. A su vez, si bien son necesarias, las resoluciones por sí solas no generarán que los alumnos elaboren criterios de congruencia. La elaboración de los criterios de congruencia a partir del estudio de las condiciones necesarias y suficientes para que una construcción sea única supone un razonamiento lógico que debe ser sostenido y acompañado por el docente.

Un registro posible luego de la puesta en común puede ser el siguiente:

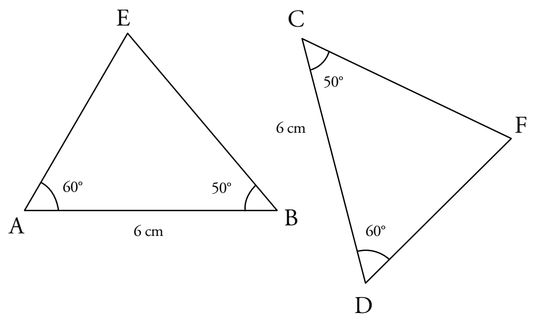
Dadas las medidas de dos ángulos y del lado comprendido entre ellos, es posible construir un único triángulo ABC.

Por ejemplo, a partir de: $|\hat{A}| = 60°$; $|\hat{B}| = 50°$; $|\overline{AB}| = 6$ cm



Por lo tanto, si dos triángulos poseen la misma medida de dos de sus ángulos y del lado comprendido entre ellos, ambos son "el mismo triángulo". Es decir, todos sus ángulos y sus lados correspondientes tienen las mismas medidas.

Por ejemplo, estos dos triángulos son "el mismo triángulo", por lo que es posible afirmar que las medidas que no están explicitadas también son iguales sin necesidad de medirlas:



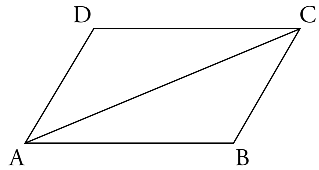
Criterio de congruencia

Dos triángulos que poseen las mismas medidas de dos de sus ángulos y del lado comprendido entre ellos son congruentes.

En el siguiente problema se requiere poner en juego criterios de congruencia para comparar triángulos. Como la propuesta de problemas no constituye una secuencia, es posible suponer que ya se ha desarrollado un trabajo que permitió elaborar diferentes criterios de congruencia.

Problema

En la figura, ABCD es un paralelogramo. ¿Es cierto que los triángulos ABC y ADC son congruentes? ¿Cómo podés asegurarte sin tomar medidas?



Los estudiantes podrán resolver el problema de a pares, luego de lo cual se podrá hacer una puesta en común.

En la figura no se presenta la medida de ningún elemento. El propósito es que los estudiantes resuelvan el problema apelando a las relaciones que existen entre los ángulos y lados de cada triángulo, a partir de distintas propiedades. Sin embargo, puede suceder que algunos alumnos le asignen medidas a los elementos, ya sea para poder razonar sobre ellas como valores genéricos, o bien porque no reconocen las relaciones que existen entre ellos. A continuación se describen algunas posibles resoluciones:

- Medir con regla y transportador los lados y los ángulos de los triángulos. Luego, afirmar que los dos triángulos son congruentes porque tienen la misma medida de sus lados y sus ángulos. También podría suceder que cometan algún error de medición y lleguen a la conclusión contraria.
- Completar la figura con medidas específicas para los ángulos y/o los lados respetando las relaciones que existen entre ellos. Por ejemplo, afirmar que si el lado AB midiera 5 cm y el AD, 4 cm, el lado DC también mediría 5 cm y el BC, 4 cm, porque son lados opuestos de un paralelogramo. Luego podrían fundamentar que los dos triángulos son congruentes de maneras distintas:
  - › Porque los tres lados tienen las mismas medidas, apelando a un criterio de congruencia previamente construido.
  - › Comparando las medidas de todos los elementos, apelando a la definición de congruencia y no a criterios.
- Establecer que el lado AB es congruente al lado DC y el lado AD es congruente a BC porque son lados opuestos de un paralelogramo y que el ángulo D es congruente al ángulo B por ser ángulos opuestos de un paralelogramo. Luego, fundamentar que los dos triángulos son congruentes porque tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos congruentes, apelando a un criterio de congruencia previamente construido.
- Establecer que el lado AB es congruente al lado DC y el lado AD es congruente a BC porque son lados opuestos de un paralelogramo y que ambos triángulos comparten

el lado AC. Luego, fundamentar que los dos triángulos son congruentes porque tienen los tres lados congruentes, apelando a un criterio de congruencia previamente construido.

Si algunos de los alumnos midieron con regla y/o transportador, será necesario poner en discusión los límites del uso de los instrumentos de medición para determinar si la medida de dos segmentos o dos ángulos son iguales.

Algunos de los objetivos que debería tener el trabajo durante la puesta en común son:

- Explicitar que es posible realizar la comparación de los elementos de los triángulos apelando a las propiedades de la figura y no a sus medidas concretas.
- Reflexionar acerca de que puede ser útil pensar en valores genéricos para los elementos, para luego pensar en sus relaciones, pero que estos deben ser coherentes con la figura.
- Concluir que para comparar triángulos y determinar su congruencia no es necesario comparar todos sus lados y todos sus ángulos, sino que se pueden utilizar distintos criterios que aseguran la congruencia de los restantes.
- Registrar en el pizarrón y en las carpetas la comparación entre los elementos, el uso de el/los criterio/s y el razonamiento deductivo de manera detallada. Por ejemplo:

Comparamos los triángulos ABC y CDA:

- El lado AB es congruente al lado DC porque son lados opuestos de un paralelogramo.
- El lado AD es congruente al lado CB porque ambos son lados opuestos de un paralelogramo.
- El lado AC y el lado CA son el mismo segmento.

Un criterio asegura que, si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados correspondientes de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes. Es decir, también tienen congruentes sus ángulos.

Como los tres lados del triángulo ABC son congruentes con los tres lados del triángulo CDA, entonces los dos triángulos son congruentes.

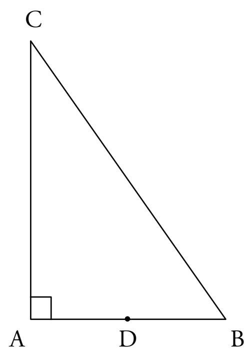
Semejanza de triángulos

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Determinar si dos triángulos son semejantes.

Problema

El triángulo ABC es rectángulo y D es el punto medio del lado AB. Dibujá sobre AC un punto F de manera que los triángulos ABC y ADF sean semejantes. Explicá cómo lo pensaste.



La progresión para establecer si dos triángulos son semejantes se ha planteado en este texto según si el estudiante necesita conocer las medidas de todos los lados y de todos los ángulos, solamente las medidas de algunos ángulos y/o lados (por ejemplo, la medida de dos ángulos) o si puede comparar los triángulos sin utilizar medidas concretas.

Este problema se podría utilizar para evaluar de qué manera resuelve un alumno con respecto a estos tres niveles e intervenir para hacerlo avanzar. En este caso es necesario realizar una comparación sin utilizar medidas. Para un estudiante que no pudiera hacerlo, se le puede sugerir que solicite al docente las medidas que necesita o que tome las medidas y se apoye en ellas para comparar, invitándolo luego a reflexionar si era necesario conocer las medidas para arribar a algunas de las conclusiones que formuló. Por ejemplo, que el punto F debe ser punto medio del lado AC para que las medidas de los lados correspondientes sean proporcionales.

Algunas resoluciones que pueden anticiparse son las siguientes:

- Sin apoyarse en medidas, por medio de relaciones, los estudiantes podrían:
  - › Trazar una recta paralela al lado BC que pase por el punto D para asegurarse de que el ángulo ADF tenga la misma medida que el ángulo ABC. Como ambos triángulos comparten el ángulo A, el tercer ángulo también será congruente.

- › Marcar F como el punto medio de AC para asegurarse de que los lados AD y AF sean proporcionales a los lados AB y AC, respectivamente. El punto medio del segmento puede marcarse a partir de la construcción de la mediatriz de lado AC. Pero también es posible que el estudiante afirme que F tiene que ser el punto medio del lado AC para que las medidas de los lados del nuevo triángulo sean la mitad de las medidas del triángulo original y lo ubique utilizando la regla. En este caso, si bien mide, su razonamiento no requiere de la medida.
- Apoyándose en las medidas, los estudiantes podrían:
  - › Medir el ángulo ABC y con transportador construir un ángulo de la misma medida de lado AD con vértice en D y llamar F a la intersección entre el otro lado del ángulo y el segmento AC.
  - › Medir los segmentos AB, AD y AC, y calcular a qué distancia del punto A debe colocar el punto F para que los lados correspondientes resulten proporcionales.

Como parte de la puesta en común no solo interesa compartir diferentes estrategias de resolución y poner en discusión los límites de la medida, sino también el modo de explicar y registrar las formas de resolución.

Estudio de cuadriláteros y ángulos

Los conocimientos relativos a los triángulos, su congruencia y semejanza serán un insumo sobre el cual se desarrollará el estudio de los cuadriláteros. A su vez, será en base al paralelogramo que se propondrá el análisis de ángulos entre paralelas.

Intervenciones de enseñanza

Los problemas que se presentan en este apartado responden a *construcción y congruencia de cuadriláteros* y a *ángulos entre paralelas cortadas por una transversal*.

Tal como se ha señalado, se incluye el contenido “Ángulos entre paralelas” en este apartado porque la enseñanza de las relaciones se propone a partir del estudio de las propiedades de los ángulos de un paralelogramo.

Construcción y congruencia de cuadriláteros

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Establecer si es posible construir un cuadrilátero dadas algunas medidas de sus elementos y si esa construcción en única.
- Analizar la congruencia entre dos cuadriláteros sobre la base de la unicidad de la construcción.

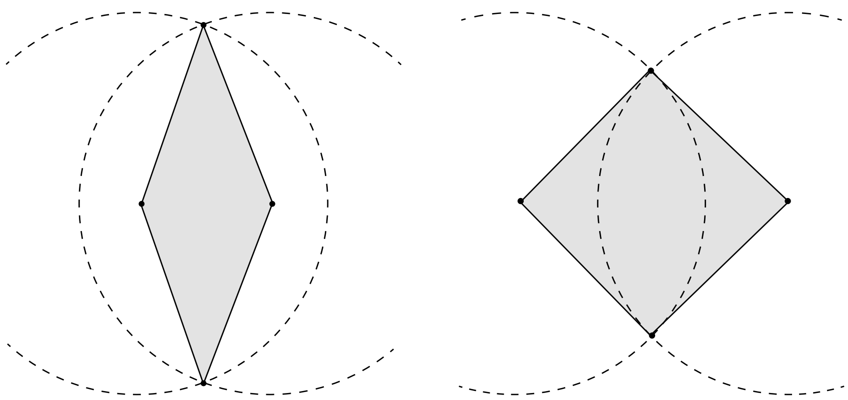
Problema

Construí un rombo cuyos lados midan 5 cm.
¿Cuántos rombos distintos se pueden construir con esa medida de lado?

A partir de la resolución de este problema, que puede realizarse inicialmente de manera individual y luego, en parejas, se espera llegar a la conclusión de que es posible construir infinitos rombos con un lado de una medida determinada.

Los estudiantes podrán construir el rombo de distintas maneras, lo que condicionará sus respuestas a la pregunta. Por ejemplo, podría suceder que:

- No logren construirlo porque no saben hacerlo sin las medidas de las diagonales.
- Afirmen que no es posible realizar la construcción porque los datos son insuficientes. Por ejemplo, porque no se conocen las medidas de los ángulos.
- Construyan dos triángulos isósceles cuyos lados congruentes midan 5 cm, de manera que compartan su lado restante. Luego, podrían afirmar que se pueden construir infinitos rombos porque la medida del lado que comparten los triángulos puede ser cualquier valor entre 0 y 10 cm.
- Dibujen dos puntos y dos circunferencias con centro en esos puntos y radio de 5 cm. Los dos puntos de intersección entre las circunferencias son los dos vértices faltantes, junto a los dos puntos iniciales. Luego, posiblemente afirmen que es posible construir infinitos rombos porque si se alejan o acercan los centros de las circunferencias, las medidas de los lados no varían, aunque sí las medidas de sus ángulos y de sus diagonales. Esto puede observarse en el siguiente gráfico, donde se varió la distancia entre los puntos iniciales.



En una puesta en común podrán exhibirse las distintas construcciones con dos objetivos. Por un lado, si fuese necesario, mostrar que es posible construir un rombo a partir de la medida de sus lados sin necesidad de conocer sus diagonales. Por otro lado, concluir que se pueden construir infinitos rombos analizando qué es lo que varía cuando se obtienen las distintas construcciones (los ángulos y las diagonales, por ejemplo).

Luego del espacio colectivo, el profesor podrá plantear una segunda pregunta, que requiere del trabajo hecho a propósito del problema discutido. No se presenta junto con la primera parte para no dar indicios a los alumnos de que la construcción no es única.

¿Qué dato o datos habría que agregar para que la construcción sea única?

Aunque la pregunta no hace referencia a hallar la cantidad mínima de datos necesarios para que la construcción sea única, interesa discutirlo de manera colectiva luego de la resolución. Se espera que los estudiantes desarrollen diversas formas de resolución, por ejemplo:

- Algunos alumnos sostienen que son necesarias las medidas de todos los elementos que constituyen la figura para poder construirla de modo único:

  › Como los 4 lados tienen la misma medida, afirman necesitar las medidas de los cuatro ángulos.
  › Consideran que necesitarían disponer de las medidas de los 4 ángulos, pero como conocen las relaciones entre ellos, solicitan saber la medida de uno solo.

- Otros estudiantes podrían responder en función de las condiciones bajo las cuales la construcción de un triángulo es única. En consecuencia dirían que:

  › Se podría agregar la medida de una de las diagonales. Esta respuesta puede estar ligada a una fundamentación perceptual, pensando que si una de las diagonales tiene una medida fija el rombo no se puede "abrir" ni "cerrar". También podría estar ligada a una interpretación del rombo como dos triángulos isósceles "pegados". La medida de una de las diagonales es también la medida del lado de los triángulos que no necesariamente mide 5 cm. De esta manera, los alumnos podrían decir que conocen las medidas de los tres lados de los triángulos y, por lo tanto, su construcción es única.
  › Se podría agregar la medida de uno de los ángulos. Al igual que para la otra resolución, esta respuesta puede estar ligada a una fundamentación perceptual, pensando que si uno de los ángulos tiene una medida fija, el rombo no se puede "abrir" ni "cerrar". También podría estar ligada a una interpretación del rombo como dos triángulos isósceles "pegados", considerando el ángulo del triángulo comprendido entre los lados de 5 cm. De esta manera, los alumnos podrían decir que su construcción es única porque es única la construcción de los triángulos que lo forman, ya que se conocen las medidas de dos de sus lados y del ángulo comprendido entre ellos.

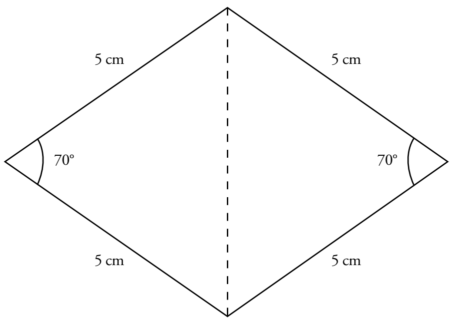
En una puesta en común será importante señalar que no son necesarias todas las medidas de los elementos del rombo para que quede unívocamente determinado. El docente podrá analizar junto con los alumnos que, por ejemplo, con la medida de un ángulo es posible conocer las medidas de los otros. Para esto es necesario disponer del conocimiento de que un rombo es un paralelogramo y, que, por lo tanto, sus ángulos opuestos tienen la misma medida.

Otra cuestión a destacar son las fundamentaciones que se hayan hecho sobre la base de las propiedades de los triángulos. En caso de no haber surgido, el docente podrá proponerlas como objeto de análisis.

Luego, como cierre, se podrá mencionar que al analizar cuadriláteros, como en este caso, es posible fundamentar algunas de sus propiedades sobre la base de las propiedades de los triángulos que los componen.

Como ya se ha mencionado, resulta pertinente que los estudiantes dejen registro de las conclusiones a las que se va llegando en el trabajo colectivo. Por ejemplo:

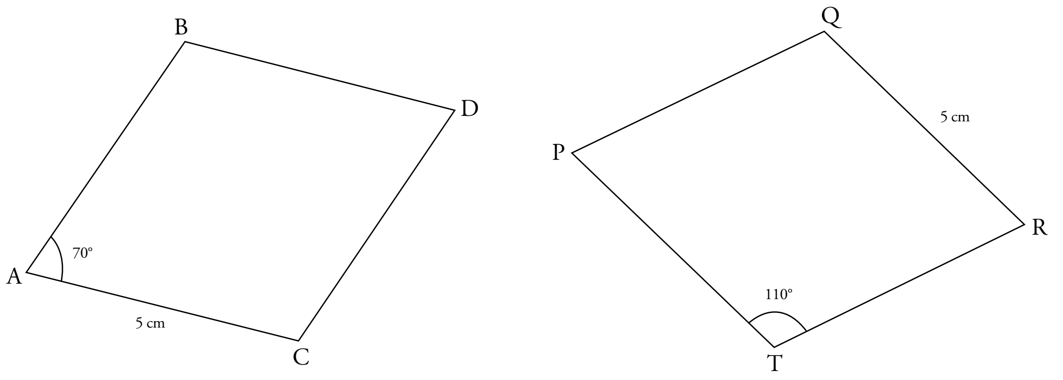
> Con el propósito de analizar las propiedades de un cuadrilátero resulta útil descomponerlo en triángulos, para luego estudiar las propiedades de esos triángulos que lo componen.
>
> Por ejemplo, para estudiar cuántos rombos con lados de 5 cm de longitud y un ángulo de 70° de amplitud se pueden construir, es posible realizar el siguiente análisis: como en cada uno de los triángulos es conocida la medida de dos de sus lados y del ángulo que forman, la construcción de cada uno de los triángulos es única, por lo que también será única la construcción del rombo.



El problema que sigue plantea el análisis de la congruencia entre dos rombos. Se supone que los estudiantes no disponen en este momento de criterios de congruencia de cuadriláteros, sino que uno de los propósitos del problema es construir colectivamente alguno.

Problema

¿Será cierto que estos dos rombos son congruentes?



Se propone que resuelvan el problema en parejas.

Es posible que algunos estudiantes no recuerden qué significa que dos figuras sean congruentes. Si lo considera necesario, el docente podrá aclararlo para todos y dejarlo registrado en el pizarrón.

A continuación se detallan algunas posibles estrategias de resolución y respuestas al problema que podrían realizar los alumnos:

- Afirmar que los rombos no son congruentes a partir de la percepción. El hecho de que estén presentados en distintas posiciones hace que no parezcan congruentes a simple vista.
- Decir que los rombos son congruentes porque los dos tienen lados de 5 cm. En este caso, el docente podría remitir a los alumnos a un problema como el que se presenta en la página 280, donde se discute que hay infinitos rombos diferentes con lados de 5 cm. En consecuencia, no alcanza con comparar las medidas de los lados para saber si los rombos son o no congruentes.
- Afirmar que no alcanza con comparar las medidas de los lados, por lo que se deben comparar sus ángulos. Como "ven" que no son iguales, entonces deciden que los rombos no son congruentes.
- Trazar los segmentos BC y PR, comparar los triángulos ABC y PTR y ver que no son congruentes, y por último decidir que los rombos tampoco lo son.
- Hallar los demás ángulos sabiendo que los ángulos consecutivos de los rombos –y, más en general, de los paralelogramos– son suplementarios y decir que son congruentes porque, además de los lados, los ángulos también son congruentes. Asimismo, podrían usar la propiedad de que los ángulos opuestos de un rombo son congruentes y hallar los ángulos D y Q. Luego, a partir de que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°, calcular las medidas del resto.

- Hallar primero la medida de todos los ángulos, considerar luego el par de triángulos que se forma al trazar el segmento BC y el que se forma al trazar el segmento QT y afirmar que los rombos son congruentes porque están formados por los mismos triángulos. Para fundamentar que esos triángulos son congruentes entre sí podrían apelar a un criterio de congruencia reconociendo que tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de las mismas medidas.

En la puesta en común se sugiere retomar algunas cuestiones generales y otras particulares de la resolución de este problema. Por ejemplo:

- Las figuras geométricas no se pueden comparar mirándolas. Es necesario usar propiedades que permitan decir si son o no congruentes con precisión.
- Los criterios de congruencia de triángulos sirven para comparar cuadriláteros, porque al trazar una diagonal quedan determinados dos triángulos. En el caso del rombo, esos dos triángulos son congruentes. Para poder llevar adelante este análisis es necesario trazar diagonales correspondientes en ambos rombos.
- Para comparar figuras, a veces resulta necesario trazar algún elemento que no está en la figura original. En este caso, se trazaron diagonales.
- Si dos rombos tienen los mismos lados y un ángulo de uno de ellos es suplementario de un ángulo del otro, entonces son congruentes. Esto puede afirmarse porque con la medida de un ángulo es posible hallar todas las de los demás.

Luego de realizar un estudio de los paralelogramos, en cuanto a las medidas de sus lados y de sus ángulos, será posible proponer el estudio de las relaciones entre los ángulos que quedan determinados por dos paralelas y una transversal.

Ángulos entre paralelas cortadas por una transversal

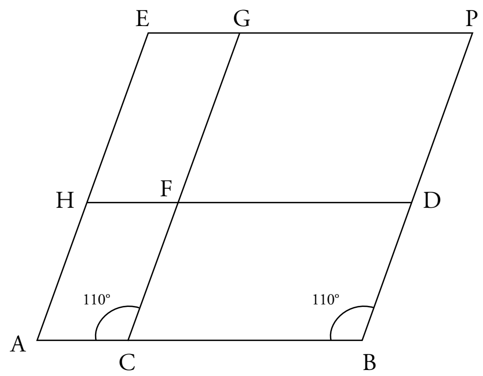
Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Hallar la medida de ángulos en figuras que incluyen paralelas y transversales, estableciendo relaciones entre los ángulos según sean opuestos por el vértice, correspondientes, alternos o conjugados.
- Establecer y fundamentar si dos ángulos entre paralelas cortadas por una transversal son congruentes o suplementarios, sobre la base de identificar si son opuestos por el vértice, correspondientes, alternos o conjugados.
- Reconocer distintas condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas cortadas por una transversal sean paralelas:
  - › que sus ángulos correspondientes sean congruentes;
  - › que sus ángulos alternos sean congruentes;
  - › que sus ángulos conjugados sean suplementarios.

El problema que se plantea a continuación presenta una situación que requiere utilizar las propiedades de los ángulos entre paralelas cortadas por una transversal. Además, los estudiantes necesitarán analizar si una figura determinada es un paralelogramo recurriendo al paralelismo entre sus lados.

Problema

ABPE es un paralelogramo. El segmento HD es paralelo al segmento AB.
Hallá la medida de los ángulos interiores del cuadrilátero FDPG y decidí si se trata de un paralelogramo.



Se propone a los estudiantes que resuelvan el problema en parejas.

Para hallar las medidas de los ángulos se espera que los alumnos pongan en juego estrategias como las siguientes:

- Ir "recorriendo" los ángulos y completando sus medidas sin explicitar las relaciones.
- Ir "recorriendo" los ángulos y completando sus medidas explicitando las relaciones, combinando las propiedades de ángulos adyacentes, opuestos por el vértice, de ángulos de un paralelogramo y de ángulos entre paralelas.
- Hallar las medidas utilizando las propiedades de ángulos entre paralelas a partir de la medida de los ángulos GCA y PBA. Por ejemplo, pueden decir que el ángulo GFH mide 110° porque es correspondiente entre paralelas al ángulo GCA.

Las intervenciones de enseñanza individuales podrían ir en busca de que los alumnos expliciten las relaciones que movilizaron para determinar la medida de cada ángulo. A nivel grupal, además de la explicitación de las relaciones, se podrían comparar las resoluciones y, tal vez, resaltar la economía de utilizar las propiedades de los ángulos entre paralelas, pensando en que la resolución basada en completar las medidas no se puede utilizar en problemas análogos a este, donde no se conocen las medidas de los ángulos, sino solamente las relaciones.

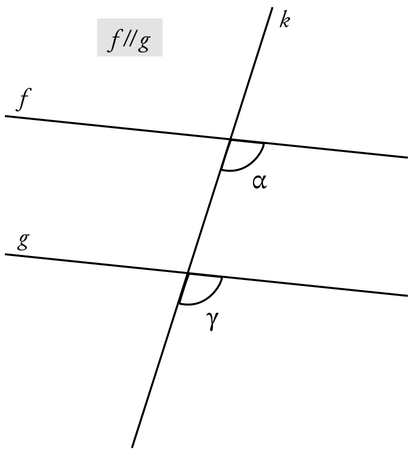
Para fundamentar que FDPG es un paralelogramo, los estudiantes podrán desarrollar diversas estrategias:

- Explicar de manera coloquial que los ángulos correspondientes tienen la misma medida porque tienen la misma inclinación.
- Utilizar las medidas para poder afirmar que se trata de un paralelogramo. Por ejemplo, decir que como los ángulos correspondientes miden 110° el segmento CG es paralelo al segmento PB. O, luego de haber hallado la medida de los ángulos PDF y DFG, afirmar que los segmentos PD y FG son paralelos porque las medidas de los ángulos suman 180°.
- Afirmar que los segmentos CG y BP son paralelos porque los ángulos GCA y PBA son correspondientes y congruentes.

Se podrían poner en común las resoluciones y, al escribir las justificaciones en el pizarrón, volver a hacer hincapié en que es posible no utilizar las medidas sino simplemente las relaciones.

Otro asunto a trabajar con todo el grupo son los distintos “usos” que se les puede dar a las relaciones entre ángulos determinados por paralelas cortadas por una transversal. En un caso, dadas las rectas paralelas y una transversal a ellas, el problema puede pedir hallar la medida de algunos ángulos. En este caso, es posible identificar ángulos opuestos por el vértice, adyacentes, conjugados, etc., y a partir de ellos determinar la medida de todos los ángulos de la figura. La propiedad puesta en juego puede enunciarse como:

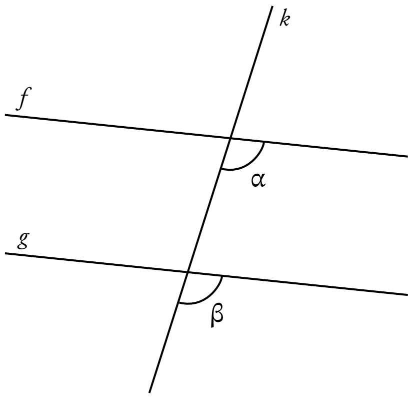
Dadas dos rectas paralelas cortadas por una transversal, si dos ángulos son correspondientes, entonces son congruentes. Lo mismo puede afirmarse para los ángulos alternos internos, externos, etcétera.



Como se menciona en el dibujo, las rectas f y g son paralelas.
Los ángulos α y γ son correspondientes entre las rectas paralelas f y g y la transversal k. Por lo tanto, los ángulos α y γ son congruentes.

Las relaciones mencionadas también pueden usarse como un “detector de paralelismo” entre rectas o segmentos. En ese caso, se comparan ángulos correspondientes, por ejemplo, y si son congruentes es posible concluir que las rectas que los forman son paralelas. También es importante sistematizar esta propiedad:

Dadas dos rectas cortadas por una transversal, si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas. Lo mismo puede afirmarse para los ángulos alternos internos, externos, etcétera.



α y β son congruentes

Como se menciona en el dibujo, los ángulos α y β son congruentes.

Los ángulos α y β son congruentes y correspondientes entre las rectas *f* y *g* y la transversal *k*. Por lo tanto, las rectas *f* y *g* son paralelas.

Áreas de triángulos y cuadriláteros

En la sección correspondiente al eje Números y álgebra se incluyó el análisis de la relación entre áreas de figuras desde un punto de vista algebraico. Se consideraron problemas e intervenciones vinculados a la resolución por medio de fórmulas y transformaciones algebraicas. En este caso las situaciones se analizarán teniendo en cuenta su abordaje desde una perspectiva geométrica.

Intervenciones de enseñanza

A continuación se presentarán diversos problemas que proponen la *comparación de áreas de triángulos y cuadriláteros* y el *estudio de la variación de áreas de figuras en función de la variación de alguna de sus medidas*. Los problemas seleccionados dan lugar a resoluciones e intervenciones que ponen el foco en las relaciones y propiedades geométricas, sin apelar a una modelización algebraica, aun en el caso en que esta sea una estrategia válida de resolución.

Comparación de áreas de triángulos y cuadriláteros

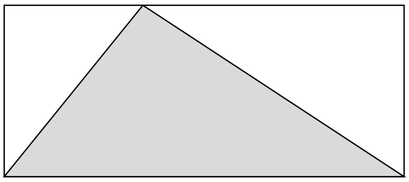
Se espera que cada estudiante sea capaz de:

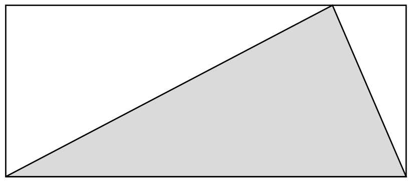
- Hallar el área de una figura sobre la base de compararla con otra figura de la que se conoce su área.
- Construir figuras cuya área cumple con una relación proporcional con respecto a otra figura dada.

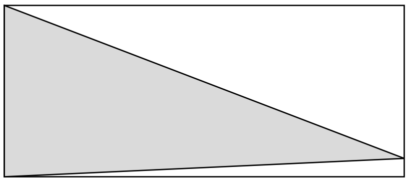
- Determinar relaciones proporcionales entre áreas de figuras (reconoce que una figura tiene el doble, el triple, la mitad de área que otra) apoyándose en descomposiciones.

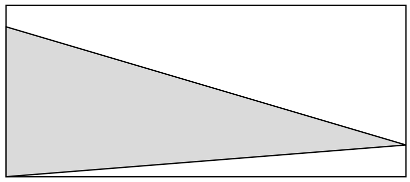
Problemas

1. Sin medir, indicá en cada uno de los siguientes rectángulos si el área sombreada es mayor, menor o igual que el área blanca.[18]

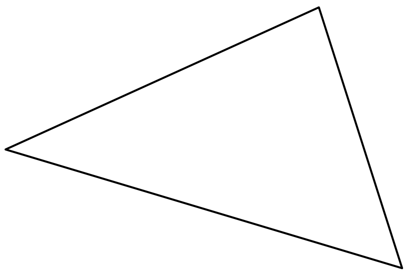
a) 

b) 

c) 

d) 

2. Construí dos rectángulos cuya área sea el doble que la del siguiente triángulo.



Se podrá proponer resolver primero el ítem 1. a) en pequeños grupos y realizar una puesta en común antes de comenzar con la resolución del resto de los apartados.

Las estrategias que los estudiantes puedan desarrollar dependerán de si previamente han resuelto problemas semejantes, si han explorado y elaborado relaciones entre las áreas de distintas figuras o si es la primera vez que se enfrentan a ello.

Si fuese la primera vez, el pedido de resolver sin medir puede convertirse en un gran obstáculo, especialmente para quienes han desarrollado prácticas más vinculadas al cálculo de

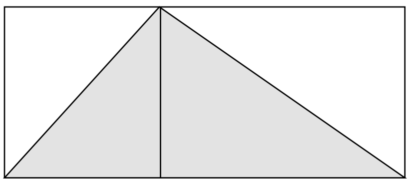
[18] Reelaboración de un problema tomado de Graciela Cappelletti, Marta García Costoya *et al.* (2008) *Matemática. Geometría.* Aportes para la enseñanza. Nivel Medio. Buenos Aires, Ministerio de Educación, GCABA.

áreas que a apelar a relaciones geométricas para compararlas con otras. Otra cuestión que irrumpe para resolver estos problemas es la necesidad de trazar elementos auxiliares. Se trata de elementos que no forman parte del enunciado, que los alumnos deben reconocer como una herramienta que permite llegar a la solución. Además es preciso analizar cuál es el elemento auxiliar conveniente para agregar y en qué posición.

Frente a aquellos grupos que no saben cómo empezar a resolver, el profesor podrá sugerirles que comparen las áreas de los dos triángulos que quedan determinados al trazar una diagonal de un rectángulo, explicando por qué son congruentes. Luego, podrán intentar reutilizar lo desarrollado para volver a pensar el problema dado. En caso de ser necesario, se les podrá habilitar la medida para que puedan elaborar una conjetura y luego ponerla a prueba. Tal como se ha señalado anteriormente ante otras situaciones, aunque no logren resolver el problema planteado, las relaciones que puedan elaborar los van a posicionar en buenas condiciones para participar de la puesta en común.

En situaciones donde la estrategia de resolución requiere de una práctica que puede resultar ajena a los estudiantes, no resulta conveniente dedicar demasiado tiempo al trabajo de exploración. Seguramente sea el profesor quien tenga que introducir el trazado del segmento como forma de resolver el problema, basándose en las relaciones que ellos hayan elaborado durante el trabajo.

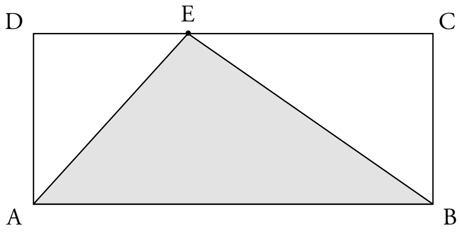
Como parte del trabajo colectivo, el docente podrá trazar un segmento perpendicular al lado del triángulo que es compartido con el rectángulo y que pase por el vértice opuesto. De esta manera, el rectángulo grande queda descompuesto en otros dos, cada uno con una diagonal dibujada. Como los dos triángulos que quedan determinados por la diagonal de un rectángulo son congruentes, resulta que para cada uno de los rectángulos, el área sombreada y no sombreada son iguales. Así es posible afirmar que, para el rectángulo grande, el área sombreada y el área blanca son iguales porque están compuestas por triángulos congruentes.



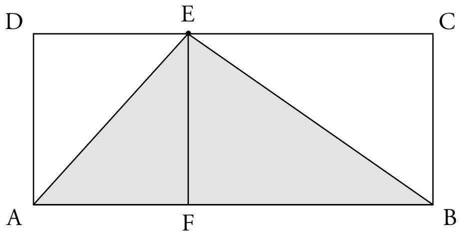
Luego de la puesta en común, los estudiantes podrán resolver la parte b) del problema en parejas. Se espera que puedan reutilizar la estrategia discutida a propósito de la parte a). El objetivo de la puesta en común será escribir entre todos una explicación e intentar una primera generalización.

El siguiente puede ser un ejemplo del registro a realizar:

Dado un rectángulo, si se elige un punto en el lado opuesto a la base y se traza un triángulo con un vértice en ese punto de modo que los otros dos sean también vértices del rectángulo, se obtiene una figura como la siguiente:



Si se traza un segmento perpendicular al lado AB que pase por el punto E, queda el siguiente gráfico:



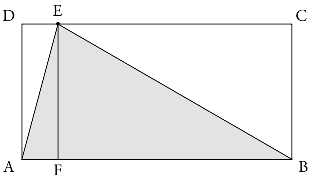
Quedan así determinados los rectángulos AFED y FBCE. Los segmentos AE y EB son diagonales de cada uno de los rectángulos, respectivamente. Entonces, el triángulo AED es congruente al triángulo AFE y el triángulo BCE es congruente al triángulo FBE.

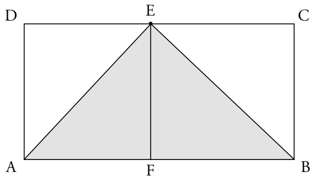
El área sombreada puede calcularse sumando las áreas de los dos triángulos que la forman:

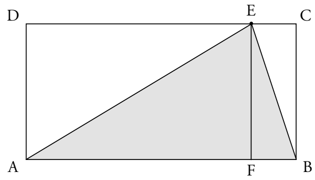
$$\begin{aligned} \text{Área sombreada} &= \text{Área de AFE} + \text{Área de FBE} \\ &= \text{Área de AED} + \text{Área de BCE} = \text{Área no sombreada} \end{aligned}$$

Como las áreas sombreada y no sombreada son iguales, entonces cada una representa la mitad del área del rectángulo.

Además, el punto E era un punto cualquiera del lado DC, por lo que el área de un triángulo construido de la manera indicada siempre tiene la mitad del área del rectángulo. Así, en cada uno de los casos, el triángulo sombreado AEB tiene la mitad del área del rectángulo ABCD y no es necesario medir ni calcular nada para saberlo.







Luego, los tres triángulos dibujados son diferentes y tienen igual área.

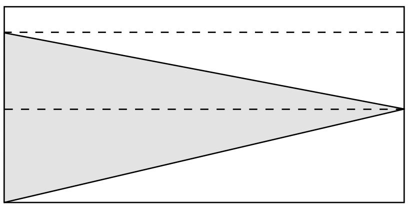
A continuación, los estudiantes podrán resolver el ítem c) en parejas. Es posible que los alumnos expresen que el área blanca es mayor que el área sombreada. Al estar uno de los vértices del triángulo muy cerca del vértice del rectángulo, puede que perciban que el área blanca superior es igual a la sombreada. Si algo como esto sucediera, resultará importante poner en discusión con toda la clase los dos tipos de estrategias, contrastando los argumentos basados en la percepción y los realizados sobre relaciones geométricas.

Otra dificultad que podría surgir es que los alumnos no se den cuenta de que es necesario trazar un segmento horizontal. La explicación de que el área es la mitad de la del rectángulo es análoga a la desarrollada en la puesta en común del apartado anterior, por lo que se espera que los alumnos puedan escribirla de manera autónoma.

Finalmente, se les solicitará que resuelvan el ítem d) en grupos de cuatro, debido a que se trata de una situación propicia para el debate.

Seguramente los estudiantes tracen un segmento auxiliar, como en los ítems anteriores, y verán que no se trata del mismo caso que los ya resueltos. Si los alumnos no pueden avanzar, el profesor podrá decir que es posible trazar más segmentos auxiliares. Luego de un tiempo de exploración, podrá proponer un momento de trabajo colectivo.

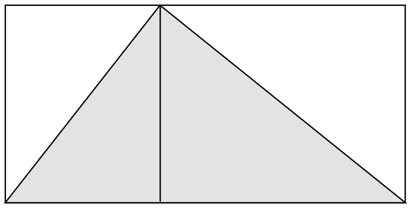
Se espera plantear la necesidad de trazar dos segmentos auxiliares, paralelos entre sí y a un par de lados del rectángulo. Como el área sombreada es igual al área no sombreada en el rectángulo inferior, podrán determinar que el área blanca total es mayor que el área sombreada porque el área blanca "tiene una franja más" que el área sombreada.



Finalmente, se podrán sistematizar dos cuestiones, una específica y otra más general. Por un lado, la relación que existe entre el área de un rectángulo y el área de un triángulo que tiene su misma base y su misma altura: el área del rectángulo es el doble del área del triángulo. A raíz de este hecho, se podrá también mencionar que la conveniencia de definir así a la altura de un triángulo se debe a que coincide con la altura de un rectángulo que tiene el doble de su área y su misma base. Por otro lado, de manera general se podrá resaltar la conveniencia de descomponer las figuras cuando el objetivo es realizar comparaciones de áreas. En este caso, la descomposición en triángulos congruentes. Por ejemplo, se podrá dejar asentado un registro como el siguiente:

Relación entre áreas de triángulos y rectángulos

El área de un rectángulo es el doble del área de un triángulo que tiene su misma base y su misma altura. Por ejemplo:



Trazando la altura del triángulo (un segmento perpendicular a la base que pase por el vértice opuesto) podemos descomponer la figura en dos pares de triángulos congruentes, de los cuales uno es blanco y otro sombreado. A causa de esto, el área blanca y el área sombreada son iguales.

El área del rectángulo está compuesta por el área blanca y el área sombreada. El área del triángulo está compuesta solamente por el área sombreada. Por lo tanto, el área del rectángulo es el doble de la del triángulo. O, lo que es equivalente, el área del triángulo es la mitad de la del rectángulo.

Importante

Para poder realizar la comparación se descompuso la figura en otras figuras (triángulos) que se pudieron comparar entre sí. Esta es una estrategia que puede ser muy útil para comparar el área de figuras.

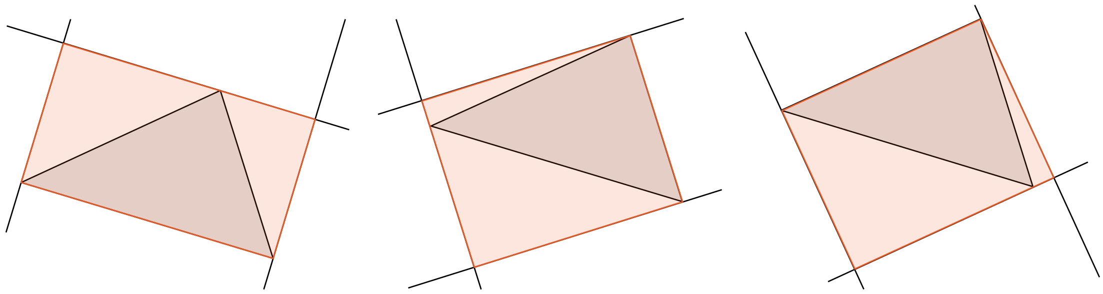
En el problema 2 se propone construir dos rectángulos que tengan el doble del área de un triángulo que ya está dibujado. El objetivo es que los estudiantes pongan en juego las conclusiones a las que se arribaron luego del trabajo con el problema 1. Se piden dos construcciones para que los alumnos exploren distintas soluciones.

En la puesta en común resulta importante tratar dos asuntos:

- Que es posible construir un rectángulo con la misma base y altura que el triángulo y así asegurarse de que su área será el doble. Esto se puede validar a partir de lo desarrollado en el problema 1.
- Que es posible construir tres rectángulos, dependiendo del lado elegido como base, y que, a pesar de que las medidas de sus lados pueden ser distintas, los tres tendrán la misma área porque todos tienen el doble del área de la del triángulo.

Seguramente resulte necesario discutir con los estudiantes acerca de cómo hacer la construcción. Puede dejarse registrado lo siguiente:

Dado un triángulo, es posible construir tres rectángulos que compartan un lado con él y cuya área sea el doble:



Es posible afirmar que cada uno de los rectángulos tiene el doble del área que el triángulo porque tienen igual base y altura.

Estudio de la variación de áreas de figuras en función de la variación de alguna de sus medidas

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

- Establecer regularidades con respecto a la variación del área de figuras y fundamentarlas sobre la base de comparaciones apoyadas en descomposiciones y/o relaciones conocidas entre áreas de figuras.

Tal como se señaló para el caso de comparación de áreas, los problemas de variación de áreas pueden trabajarse desde la lectura de información que porta una expresión o a partir de relaciones geométricas. Aquí se presentarán solo estrategias que se apoyan en propiedades de las figuras. En relación con el trabajo apoyado en la lectura de la información que porta una expresión puede consultarse lo presentado en las páginas 218 y 219.

Problema

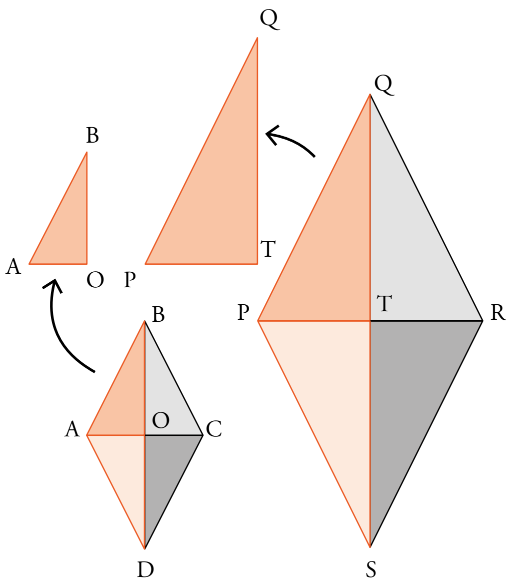
¿Es cierto que si a un rombo se le duplica la medida de sus dos diagonales, su área se cuadruplica?

El docente puede proponer a los estudiantes que trabajen un tiempo de manera individual y luego que se reúnan en pequeños grupos para compartir las relaciones que hayan elaborado y debatan acerca de la resolución. Resulta importante tener en cuenta que el problema requiere que en primer término los alumnos puedan determinar si es verdad o no que el área se cuadruplica y luego, que validen la afirmación.

Para decidir si efectivamente el área se cuadruplica es esperable que algunos alumnos prueben dibujando uno o más rombos particulares y calculen las áreas, con el objetivo de generalizar la propiedad para todos. Podrían elegir medidas arbitrarias de las diagonales, construir uno de los rombos con esas medidas y otro con el doble de ellas, para calcular y comparar sus áreas. Ante este tipo de resoluciones, el docente podrá preguntar cómo pueden asegurarse de que la propiedad es verdadera para otros rombos diferentes y solicitar que intenten buscar una explicación sin calcular áreas. Esta cuestión será uno de los asuntos a tratar en la puesta en común.

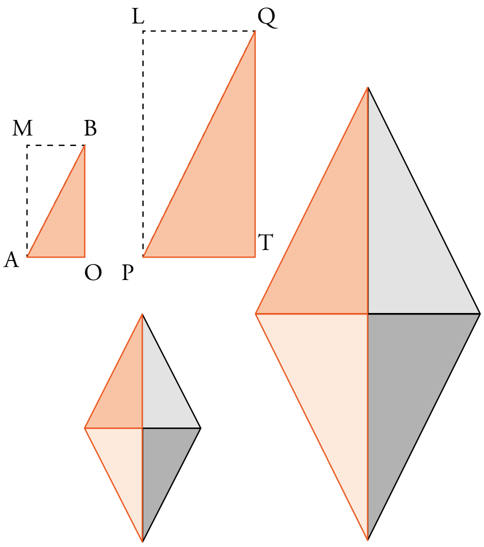
Desde una perspectiva geométrica existen diversas construcciones sobre las cuales basarse para realizar una validación.

El estudio de la variación se puede realizar apelando a la descomposición de los rombos en los cuatro triángulos rectángulos que quedan determinados por sus diagonales. Las medidas de la base y de la altura de los triángulos del rombo de mayor área ($\overline{PT}$ y $\overline{TQ}$, por ejemplo) miden el doble que la base y la altura de los triángulos que componen el otro rombo ($\overline{AO}$ y $\overline{OB}$), respectivamente.



Esta descomposición se puede utilizar para:

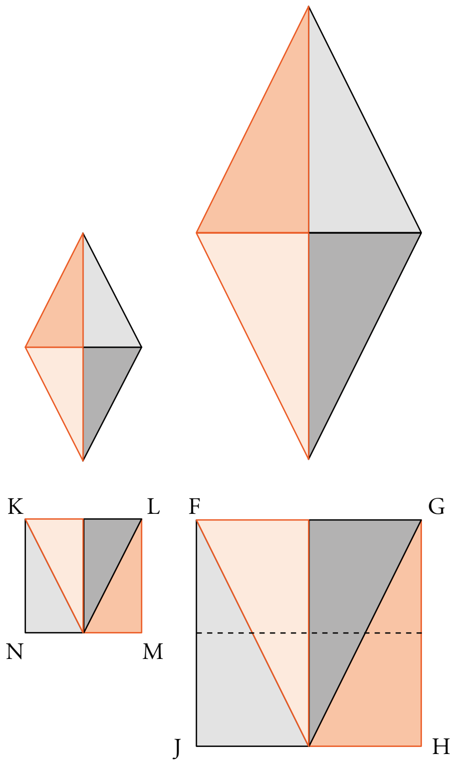
- Comparar el área de los triángulos de uno y otro rombo: si la base y la altura de un triángulo ($\overline{PT}$ y $\overline{TQ}$, por ejemplo) miden el doble que la base y la altura del otro ($\overline{AO}$ y $\overline{OB}$), el área del primer triángulo es el cuádruple de la del segundo. Esta relación puede ser conocida, pero también se puede fundamentar a través de identificar los triángulos rectángulos como "la mitad" de rectángulos.



Las áreas de los triángulos PQT y ABO son la mitad de la de los rectángulos PLQT y AMBO, respectivamente.

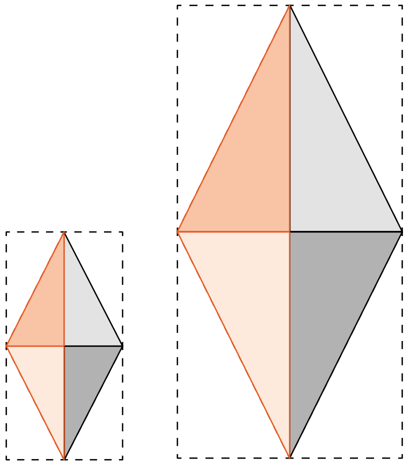
El área del rectángulo PLQT es el cuádruple de la del rectángulo AMBO, entonces el área del triángulo PQT es el cuádruple del área del triángulo ABO, es decir que guardan la misma proporción.

- Utilizar los dos conjuntos de cuatro triángulos para formar rectángulos y apelar a la relación entre estos: si las longitudes de la base y de la altura de un rectángulo son el doble de las longitudes de la base y de la altura de otro, el área del primer rectángulo es el cuádruple de la del segundo. Esta relación puede ser conocida, pero también se puede fundamentar a través de determinar cuántos rectángulos de los de menor área se necesitan para formar el otro.



Se necesitan cuatro rectángulos como KLMN para formar el rectángulo FGHJ.

Otra manera de realizar la comparación entre las áreas es construyendo dos rectángulos, uno que inscriba al primer rombo y otro que inscriba al segundo. A partir de esta construcción los alumnos podrían afirmar que es verdad que el área se cuadruplica porque ambos rombos tienen la mitad del área que el rectángulo que lo inscribe y el segundo de estos rectángulos tiene el cuádruple del área del primero.



Aunque no se espera que los estudiantes produzcan todas estas resoluciones ni que lo hagan de manera completa, cada una de ellas se basa en conocimientos que tienen disponibles y que resulta interesante recuperar. La presentación y la escritura de cada una de las validaciones pueden quedar a cargo del docente.

Los problemas presentados y analizados en este apartado ponen el foco en un trabajo deductivo donde se espera que los estudiantes trabajen con figuras y no necesariamente con un representante particular de ellas. En consecuencia, el tipo de tarea que necesitan desarrollar está vinculado a la validación, que es una práctica que está en pleno desarrollo. Por eso, no se espera que los alumnos produzcan validaciones completas ni del todo correctas. Esos intentos de validación serán objeto de reflexión en situaciones colectivas, donde se podrá discutir y acordar sobre cómo escribirlas de manera clara, qué decir y qué no, etc. Entre todos, el docente y los estudiantes podrán producir una validación acordada que servirá de modelo para otras situaciones semejantes.

Estadística y probabilidades

Si bien este apartado retoma el nombre del eje según el Diseño Curricular, aquí se propone un desarrollo concentrado en el tratamiento de algunos aspectos de la estadística.

Los tipos de tareas y actividad matemática de la estadística difieren de las desarrolladas a propósito del álgebra, las funciones y la geometría: no es determinista, interviene el azar y la inferencia estadística es una forma de razonar. A partir del estudio de estos contenidos se espera que los alumnos puedan reconocer la importancia del tratamiento de la información y reconozcan algunas de las características que presentan las representaciones mediante las cuales se organiza y presenta dicha información.

Lectura, interpretación y producción de representaciones gráficas

En esta sección se proponen situaciones de análisis y comparación de distintas representaciones, con el objetivo de que los estudiantes puedan establecer la pertinencia del uso de cada una de ellas, dependiendo de la situación planteada.

Se incluye tanto la lectura y la interpretación de distintos tipos de representaciones y gráficos así como su producción, poniendo el foco en la pertinencia, según la relación que se quiere ilustrar.

Intervenciones de enseñanza

Se espera que cada estudiante sea capaz de:

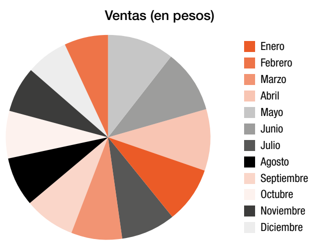
- Leer, interpretar y producir gráficos estadísticos usualmente utilizados en medios de comunicación.
- Interpretar distintas representaciones y decidir sobre la pertinencia y/o la conveniencia de cada una de ellas, dependiendo de la situación planteada.
- Producir gráficos tomando decisiones sobre la conveniencia de la representación a utilizar, dependiendo de la situación planteada.

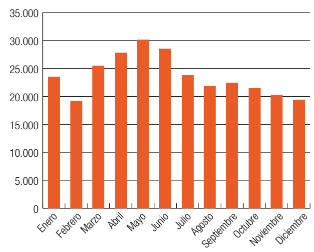
Problema

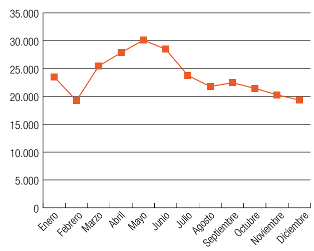
Antonio tiene un negocio de calzado. Compra pantuflas a un mayorista para luego venderlas. A continuación se presenta una tabla con las ventas y las compras de pantuflas (en pesos) en el negocio de Antonio.

Mes	Ventas	Compras
Enero	23.510	15.430
Febrero	19.250	14.380
Marzo	25.460	11.390
Abril	27.850	12.370
Mayo	30.120	14.580
Junio	28.490	15.390
Julio	23.760	14.270
Agosto	21.780	11.230
Septiembre	22.460	9.850
Octubre	21.450	11.760
Noviembre	20.280	9.360
Diciembre	19.360	10.260
Total	283.770	150.270

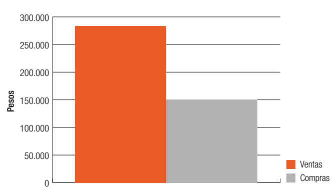
a) Indicá cuál o cuáles de los siguientes gráficos permite/n estudiar mejor la evolución de las ventas a lo largo de un año.

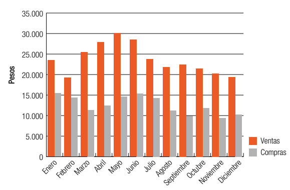






b) Indicá cuál de los siguientes gráficos permite estudiar mejor la ganancia de Antonio en la venta de pantuflas.





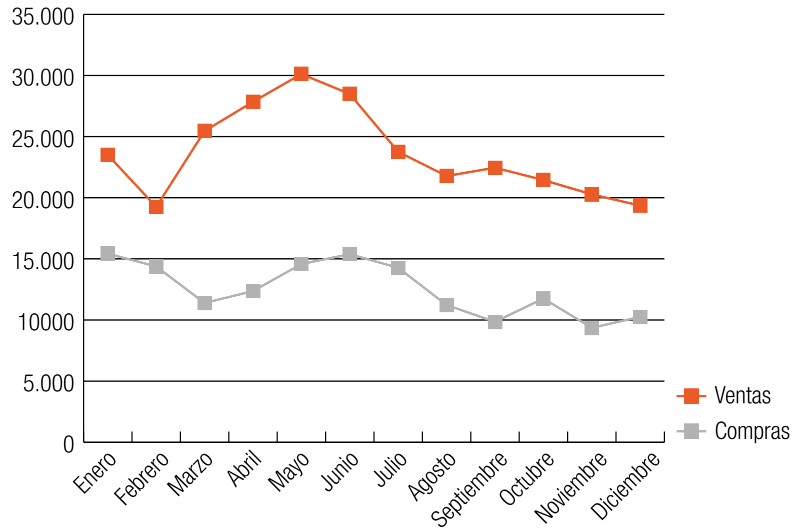
c) Realizá un gráfico que te permita indicar de manera directa si es cierto que cuando las ventas aumentaron también lo hicieron las compras y viceversa.

Los estudiantes podrán intentar resolver, en parejas, la parte a) del problema. Esta primera parte tiene como propósito poner en discusión que algunos gráficos y representaciones son más pertinentes que otros, dependiendo de la situación que se quiere estudiar.

Los alumnos podrán decir que, en este caso, el gráfico circular no permite identificar si de un mes a otro las ventas aumentaron o disminuyeron, porque las diferencias entre los sectores no son notorias. Además, al ser tantos sectores, resulta confuso identificar qué color se corresponde con cada mes. En cambio, en los otros dos gráficos se puede establecer si las ventas aumentan o disminuyen recorriéndolos de izquierda a derecha y observando si las barras o los puntos "suben" o "bajan". Los estudiantes podrían manifestar que el gráfico de puntos y líneas tiene el agregado de que las líneas describen de manera explícita si los valores aumentan o disminuyen. Luego de una puesta en común se podría concluir que cuando se quiere estudiar la variación de una serie de datos a los largo del tiempo es más pertinente representar esos datos por medio de gráficos de barra o puntos y líneas, ya que consideran la variación del tiempo de manera cuantitativa.

En el ítem b) se pone nuevamente en cuestión el tema de la pertinencia. En este caso ambos gráficos permiten estudiar la ganancia. El primero agrupa las ventas y las compras de todo el año. Los estudiantes podrán decir que con este gráfico se puede determinar que las ganancias fueron menores que un 50% con respecto a las ventas, ya que la columna gris sobrepasa la mitad de la naranja, o la naranja es menor que el doble de la gris. Esto se puede observar gracias a las líneas guía horizontales que hay en el gráfico. Con respecto al segundo gráfico, podrán expresar que también permite estudiar la ganancia, pero en cada uno de los meses. Sin embargo, como la rentabilidad es bastante variable a medida que transcurre el tiempo, no permite estimar cómo resulta en todo el período. A partir de este análisis se podrá discutir nuevamente con toda la clase la diferencia entre los gráficos que permiten ver la evolución de una serie de datos y los que permiten comparar dos cantidades, como ya se hizo en el ítem a) con respecto al gráfico circular y los de puntos y líneas y barras.

El ítem c) propone a los alumnos producir un gráfico. Se solicita que sea uno conveniente para comparar el aumento o la disminución de las compras con la variación de las ventas. Sobre la base del trabajo realizado y discutido en los problemas anteriores, los estudiantes podrán elegir realizar un gráfico que exprese la variación en el tiempo. Podrían elegir el mismo gráfico de barras que se muestra en el ítem anterior o podrían realizar uno de líneas y puntos en donde las compras y las ventas se representen con distintos colores. Como se mencionó anteriormente, se podría dialogar acerca de que el gráfico con líneas expresa de manera explícita los aumentos y los descensos.



Por ejemplo, mediante este gráfico se puede determinar que entre febrero y marzo las ventas aumentaron, pero sin embargo las compras cayeron.

Resulta importante dejar registrado, en cada caso, por qué se eligió una representación determinada. Así, resultará un insumo para los estudiantes al tener que resolver otros problemas.

Análisis y descripción de datos

El propósito de este apartado es poner en discusión la idea de experimento aleatorio, variables aleatorias, recolección y organización de datos con el objetivo de realizar inferencias y comprender posibles relaciones entre ellos. Por un lado, se propone pensar sobre la elaboración de tablas de frecuencias y porcentajes y, por el otro, sobre cómo resumir y representar mediante un valor un conjunto de datos observados. En el Ciclo Básico se trabaja sobre medidas de tendencia central como el promedio, la moda y la mediana.

Intervenciones de enseñanza

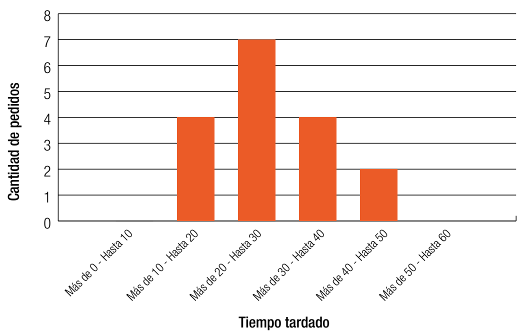
Se espera que cada estudiante sea capaz de:

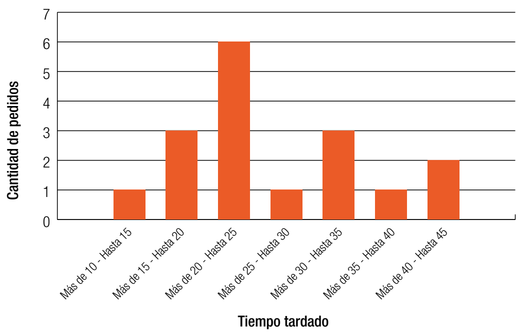
- Definir las variables a considerar y su rango a partir de anticipar posibles resultados de un experimento aleatorio.
- Recolectar y organizar datos estadísticos de manera que le permita calcular las medidas de tendencia central.
- Utilizar las frecuencias de los valores de una variable en una muestra y las medidas de tendencia central para analizarla y elaborar conclusiones sobre ella, decidiendo qué medida de tendencia central es la más adecuada para representarla.

Problema

En un restaurante están evaluando el tiempo que se tarda en servir la comida a los clientes una vez que hayan realizado el pedido. Durante un día se tomaron los tiempos de todos los pedidos durante el almuerzo y se obtuvieron los siguientes datos (expresados en minutos): 22; 15; 34; 21; 17; 22; 35; 29; 41; 24; 22; 14; 19; 33; 40; 31; 23.

a) ¿Cuál fue el tiempo promedio que tardaron en servir la comida durante ese almuerzo?
b) En el restaurante establecieron que un pedido fue entregado a tiempo si se tardó menos de 25 minutos en servirlo. ¿Se puede decir que durante ese almuerzo la mayoría de los pedidos fue entregado a tiempo? ¿Por qué?
c) ¿Cuál de estos gráficos utilizarías para representar los intervalos de tiempo transcurridos entre los pedidos y la entrega de los platos en las mesas, que te permita identificar los que fueron entregados a tiempo?





Uno de los propósitos de este problema es poner en discusión cuál es la medida de tendencia central más adecuada para representar una muestra, dependiendo de lo que se quiere analizar o representar de ella.

Los estudiantes podrán resolver el ítem a) de manera individual para luego hacer una breve puesta en común para recordar cómo calcular el promedio. Seguramente no tendrán dificultades para determinar que su valor es de 26 minutos.

El ítem b) podrá resolverse en parejas y así dar lugar al intercambio de distintas maneras de responder al enunciado. Algunos estudiantes podrán ordenar los datos agrupándolos según si el tiempo es menor o mayor a 25 minutos. Luego, como la cantidad de pedidos en los que se tardó menos de 25 minutos es 9, podrán afirmar que se puede decir que la mayoría de los pedidos se entregó a tiempo, porque la cantidad total de pedidos es 17. Es posible que otros alumnos utilicen el promedio como representante de la muestra y contesten que no es posible afirmar que la mayoría se entregó a tiempo, ya que el promedio es mayor que 25 minutos. Esta instancia será propicia para organizar un debate con el propósito de poner en discusión el alcance del promedio como representante de una muestra. De no haber surgido como una estrategia de resolución, el profesor podrá proponer hallar la mediana y reflexionar sobre cómo puede ser utilizada para resolver este ítem del problema. Esta medida de tendencia central es más adecuada para poder dividir los datos en dos partes iguales, sin que se vea afectada por valores extremos. Como conclusión se podrá dejar asentada la **definición de mediana, cómo calcularla** y cómo se puede utilizar para contestar la pregunta.

Mediana

La mediana es un valor central que se obtiene cuando los valores de la variable están ordenados.

Para comenzar a calcularla, se ordenan los datos de menor a mayor. Si la serie tiene un número impar de medidas, la mediana es la puntuación central. Si la serie tiene un número par de medidas, la mediana es el promedio entre las dos puntuaciones centrales.

En este caso la mediana es 23:

14 - 15 - 17 - 19 - 21 - 22 - 22 - 22 - **23** - 24 - 29 - 31 - 33 - 34 - 35 - 40 - 41

A lo sumo, **la mitad de los valores de la variable es mayor que la mediana**.

En este caso, permite afirmar que como máximo la mitad de los pedidos fue entregada en más de 23 minutos. Como la cantidad de pedidos es impar (17), esto es equivalente a decir que la mayoría fue entregada en menos de 25 minutos.

En el ítem c) los estudiantes deberán considerar los rangos de valores que se proponen en cada caso. Será importante destacar que estos deben ser excluyentes, por ejemplo, analizando que un pedido que haya sido entregado en 30 minutos está contabilizado en la columna que en su etiqueta dice: “Hasta 30”. A partir de analizar el contexto, podrán decir que los rangos del primer gráfico no son pertinentes. El restaurante se propuso diferenciar los tiempos según si son mayores o menores que 25 minutos y, en ese gráfico, se agrupan valores de tiempo entre 20 y 30 minutos. Además, se podrá discutir si es pertinente considerar el rango entre 0 y 10 minutos, ya que pueden ser valores imposibles para entregar una comida en un restaurante.

En cambio, en el segundo gráfico sí se diferencia entre los tiempos de entrega menores y mayores que 25 minutos. Sin embargo, la última columna solamente agrupa valores hasta 45 minutos. Se podría poner en discusión qué sucede si un pedido se demora más de 45 minutos, para llegar a la conclusión de que sería conveniente agregar una última columna que agrupara a todos los pedidos que tarden más de 45 minutos.

En la puesta en común se podría concluir que:

> Cuando se precisa relevar valores (por ejemplo, por medio de una encuesta) o representarlos en un gráfico, muchas veces es conveniente agruparlos.
>
> Para establecer los rangos en los cuales serán agrupados se debe tener en cuenta que:
>
> - Se cubran todos los valores posibles de la variable.
> - El “corte” se haga de manera tal que queden separados los valores que no se quieren “mezclar” debido a la situación (por ejemplo, en el caso del restaurante, los tiempos menores y mayores que 25 minutos).

Los problemas presentados en este apartado trabajan sobre colecciones de datos incluidas en los enunciados, a veces en forma de listas o tablas y otras en forma de gráficos. Será necesario complementar estas actividades proponiendo situaciones que requieran de la recolección y la organización de datos, promoviendo el análisis de las características que deben poseer: para qué se buscan datos, de dónde es pertinente extraerlos, mediante qué herramientas es posible recabar la información que se precisa, entre otras.

Bibliografía sugerida

Todos los documentos aquí citados están disponibles en la Biblioteca Digital de Evaluación: http://bde.operativos-ueicee.com.ar.

ANSES, Programa Conectar Igualdad, Plan Escuelas de Innovación de la Dirección de Comunicación y Contenidos, Equipo de Matemática: Andrea Novembre, Mauro Nicodemo y Pablo Coll (2015) *Matemática y TIC. Orientaciones para la enseñanza.*

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, DEGPLEDU (2018) *Matemática. Función lineal: variación uniforme. Segundo año.* 1a ed. Serie Profundización NES.

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, DEGPLEDU (2018) *Matemática. Construcciones de cuadriláteros con GeoGebra. Segundo año.* 1a ed. Serie Profundización NES.

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, DGPLEDU (2018) *Matemática. Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 1. Segundo año.* 1a ed. Serie Profundización NES.

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, DGPLEDU (2018) *Matemática. Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 2. Segundo año.* 1a ed. Serie Profundización NES.

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, DGPLEDU (2018) *Matemática. Números racionales I. Densidad en Q+. Primer año*. 1a ed. Serie Profundización NES.

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, DGPLEDU (2018) *Matemática. Números racionales II. Producto en Q+. Primer año*. 1a ed. Serie Profundización NES.

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, DGPLEDU (2018) *Matemática. Números racionales III. Proporcionalidad y orden en Q+. Primer año.* 1a ed. Serie Profundización NES.

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, DGPLEDU (2019) *Matemática. Funciones de proporcionalidad inversa. Segundo año*. 1a ed. Serie Profundización NES.

GCABA, Ministerio de Educación, DGPLINED, GOC (2015) *Diseño Curricular. Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires. Formación General. Ciclo Básico.* 2ª ed., pp. 510- 534.

GCABA, Secretaría de Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento (2005) *Apoyo a los alumnos de primer año en el inicio del nivel medio. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar Matemática. Documento Nº 2.* 1ª ed., 1ª reimp.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente (2010) *Entre Nivel Primario y Secundario. Una propuesta de articulación. Cuaderno para el docente.*

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente, Programa de Capacitación Multimedial (2010) *De inferencias y conclusiones: ¿cómo decidir si es válido? Matemática.* Versión preliminar. Explora - Las ciencias en el mundo contemporáneo.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente, Programa de Capacitación Multimedial (2010) *¿Qué permite y qué no permite hacer el cero? Matemática.* Versión preliminar. Explora - Las ciencias en el mundo contemporáneo.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente, Programa de Capacitación Multimedial (2010) *De números y medidas. ¿Qué es posible, qué es necesario? Matemática.* Versión preliminar. Explora - Las ciencias en el mundo contemporáneo.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, Secretaría de Educación, Subsecretaría de Equidad y Calidad Educativa (2007) *Matemática: Leer, escribir, argumentar. Último año primaria/ Inicio secundaria*. Serie Cuadernos para el aula. Docentes. NAP (Núcleos de Aprendizajes Prioritarios). 1ª ed.

Se terminó de imprimir en el mes de febrero de 2020,
en Imprenta G.C.B.A., Diógenes Taborda 933,
(C1437EGA) Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Vamos Buenos Aires