

PROGRESIONES DE LOS APRENDIZAJES

Educación Secundaria

Ciclo Orientado

Matemática



Buenos Aires Ciudad



Vamos Buenos Aires

PROGRESIONES DE LOS APRENDIZAJES

Educación Secundaria

Ciclo Orientado

Matemática

ISBN: en trámite.

© Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires

Ministerio de Educación

Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa (UEICEE), 2021

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.

Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa

Av. Paseo Colón 255

(C1063ACC) Ciudad Autónoma de Buenos Aires

ueicee@bue.edu.ar

Permitida la transcripción parcial de los textos incluidos en este documento, hasta 1000 palabras, según Ley 11.723, art. 10º, colocando el apartado consultado entre comillas y citando la fuente; si este excediera la extensión mencionada, deberá solicitarse autorización a la UEICEE.

Distribución gratuita. Prohibida su venta.

Jefe de Gobierno
Horacio Rodríguez Larreta

Ministra de Educación
María Soledad Acuña

Jefe de Gabinete
Luis Bullrich

Subsecretario de Carrera Docente
Manuel Vidal

**Subsecretaria de Coordinación Pedagógica
y Equidad Educativa**
María Lucía Feced Abal

**Subsecretario de Gestión Económico Financiera
y Administración de Recursos**
Sebastián Tomaghelli

Subsecretario de Tecnología Educativa y Sustentabilidad
Santiago Andrés

Subsecretaria de la Agencia de Aprendizaje a lo Largo de la Vida
Eugenia Cortona

**Director Ejecutivo de la Unidad de Evaluación Integral
de la Calidad y Equidad Educativa**
Gabriel Sánchez Zinny

Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa

Coordinadora General de Evaluación Educativa

Lorena Landeo

Autores/as

Andrea Roxana Novembre

Mauro Fernando Nicodemo

Lectura crítica y discusión del material

Carla Cabalcabué (UEICEE-GOC)

Carolina Benito (UEICEE)

Federico Maciejowski (UEICEE)

Orientación para la estructura de las progresiones

Celina Armendariz

Alejandro Rossetti

Fernando Bifano

Equipo Editorial de Materiales y Contenidos Digitales (DGPLEDU)

Coordinación general

Silvia Saucedo

Coordinación editorial

Marcos Alfonzo

Edición y corrección

María Laura Cianciolo

Corrección de estilo

Vanina Barbeito

Diseño gráfico y diagramación

Ignacio Cismondi

Colaboración

Octavio Bally, Patricia Peralta

Índice

Presentación	7
Introducción	11
Condiciones didácticas	15
¿Qué observar para recabar información sobre los aprendizajes de los/as estudiantes? ..	16
Números y álgebra	19
Combinatoria	21
Valor absoluto	25
Actividades para relevar los aprendizajes	29
Funciones y álgebra	35
Introducción	36
Función cuadrática	37
Función polinómica	55
Función exponencial y función logarítmica	63
Función trigonométrica	85
Actividades para relevar los aprendizajes	102
Geometría y medida	117
Semejanza de triángulos y teorema de Thales	119
Trigonometría	125
Posiciones relativas entre una recta y una circunferencia, y ángulos inscritos	133
Actividades para relevar los aprendizajes	143
Estadística y probabilidades	151
Probabilidades	153
Actividades para relevar los aprendizajes	161
Situaciones didácticas e intervenciones docentes	167
Introducción	169
Contenidos y aspectos de la enseñanza trabajados en este apartado	171
Números y álgebra	173
Funciones y álgebra	178
Función cuadrática	178
Función polinómica	184
Función exponencial y función logarítmica	188
Función trigonométrica	198
Geometría y medida	206
Estadística y probabilidades	214
Bibliografía sugerida	219

Presentación

¿Qué saben y son capaces de hacer los/as estudiantes en una asignatura en cierto momento de su recorrido escolar?

¿Cómo podemos ayudarlos/as a avanzar en su proceso de aprendizaje apoyándonos en lo que ya saben?

¿Cómo abordar en el aula la diversidad de cada grupo, reconociendo las diferencias en los niveles de aprendizaje, y ofrecer a distintos/as estudiantes las oportunidades adecuadas para que continúen aprendiendo?

¿Qué hacemos con los/as estudiantes que están en un año y que requieren completar aprendizajes de años anteriores?

Estas y muchas otras preguntas similares atraviesan las progresiones para la enseñanza y el aprendizaje que aquí se presentan y que han orientado el proceso de su elaboración. Se trata de interrogantes típicos para quienes nos dedicamos a la enseñanza y compartimos el desafío de fortalecer la calidad y la equidad en el acceso al conocimiento para los/as estudiantes.

El material propone una mirada sobre el aprendizaje que parte del reconocimiento de la heterogeneidad de la clase escolar como rasgo constitutivo de la realidad del aula, y se propone colaborar con el diseño de la enseñanza atendiendo a la singularidad de los avances que cada estudiante manifiesta.

¿Qué son las progresiones?

Se entiende por *progresiones* la descripción de recorridos posibles y pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos fundamentales de la trayectoria escolar. Estas descripciones se sustentan en el enfoque didáctico adoptado por el *Diseño Curricular* para cada área. Por lo tanto, las progresiones no representan líneas de desarrollo natural, sino que reconocen un contexto escolar situado en el marco de las definiciones propias del sistema educativo de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Sin embargo, como están basadas en evidencia de aula, son verificables y proporcionan criterios claros y compartidos para el monitoreo de los aprendizajes con una perspectiva formativa, orientada a la toma de decisiones para la enseñanza.

Las progresiones en desarrollo corresponden al área de Matemática, en los niveles Primario y Secundario. La decisión de desarrollarlas para esta área atiende a su carácter básico, transversal e instrumental en el recorrido formativo de la educación obligatoria. Al interior se establecen ejes (tomados de los respectivos diseños curriculares) que permiten organizar la descripción de aprendizajes prioritarios, con secuencia y complejidad creciente. En ese sentido, no se toman todos los contenidos del currículum, sino aquellos respecto de los cuales resulta posible, a la vez que necesario, establecer algunas pautas para la evaluación formativa.

Un aspecto contemplado en la elaboración es el progreso relativamente dispar o desperejo que las trayectorias escolares ponen frecuentemente de manifiesto aun al interior de una misma área o asignatura. Los avances en un área de conocimiento no siempre son homogéneos. Un/a estudiante puede progresar más rápidamente en su dominio de los distintos tipos de funciones que en el trabajo geométrico, por ejemplo. Por ello, las progresiones se han organizado asumiendo que cada estudiante puede avanzar con ritmo dispar en los diversos recorridos que se proponen según los ejes.

¿Cómo se relacionan las progresiones con el marco curricular?

Las progresiones ponen en relación los contenidos de enseñanza y objetivos establecidos en los documentos curriculares de la jurisdicción (*Diseño Curricular para la Escuela Primaria; Diseño Curricular. Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires; Metas de aprendizaje. Niveles Inicial, Primario y Secundario de las escuelas de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires*) y los aprendizajes manifestados por los/as estudiantes, considerando la heterogeneidad de los puntos de partida. En este sentido, como instrumento para la evaluación formativa, las progresiones resultan un complemento del marco curricular en el que se basan y dialogan con los materiales de desarrollo curricular que apuntan a fortalecer la intervención didáctica.

¿Para qué se pueden usar en la escuela las progresiones de aprendizaje?

El desarrollo del material busca contribuir a la tarea docente en el proceso de observación y análisis del aprendizaje de los/as estudiantes, relevando elementos centrales en cada área curricular. Ayuda a poner en diálogo las prescripciones curriculares con la realidad de los grupos para responder de manera oportuna y pertinente a las necesidades heterogéneas de aprendizaje que se identifican en el aula.

A la vez, esta mirada sobre los aprendizajes permite también a maestros/as y profesores/as establecer expectativas desafiantes y viables para cada estudiante, en función de las condiciones de enseñanza generadas en el aula y en la escuela.

Es indudable que para la configuración de mejores trayectorias escolares resulta fundamental incorporar en la escuela estrategias de trabajo y herramientas que reconozcan los distintos ritmos de aprendizaje, así como los puntos de partida de cada estudiante.

¿Cuál es la relación entre los niveles de las progresiones y los grados o años escolares?

Las progresiones se plantean por ciclo. Esta decisión fue adoptada con el propósito de alentar una mirada más amplia que el año como horizonte de intervención, contemplar los logros de los/as estudiantes en perspectiva y favorecer su uso para la definición de secuencias de trabajo específicas que se ajusten a las necesidades reales de aprendizaje. Al mismo tiempo, permiten plasmar la idea ya expresada de que los avances no se dan de manera pareja u homogénea en relación con las diversas áreas ni ejes de una misma área. Las progresiones deben ayudar, en este sentido, a individualizar las intervenciones en el aula y romper con la expectativa de homogeneidad en la clase escolar.

Desarrollo de las progresiones del aprendizaje

El siguiente esquema representa las progresiones del aprendizaje a desarrollar en Matemática. Comprende la educación primaria y la educación secundaria en una lógica de trayectoria o recorrido extenso por la escolaridad obligatoria. Las progresiones se organizan en ejes, establecidos a partir de los diseños curriculares.

Área	Educación Primaria		Educación Secundaria	
	Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Ciclo Básico	Ciclo Orientado

Matemática	Números y operaciones <i>Sistema de numeración</i> <i>Suma y resta</i> <i>Multiplicación y división</i>	Números y operaciones <i>Números naturales</i> <i>Números racionales</i> Geometría	Números y álgebra Funciones y álgebra Geometría y medida	Números y álgebra Funciones y álgebra Geometría y medida
	Espacio, formas y medida <i>Espacio</i> <i>Formas geométricas</i> <i>Medida</i>	Medida <i>Medidas de longitud, capacidad, peso y tiempo</i> <i>Perímetro, área y volumen</i>	Estadística y probabilidades	Estadística y probabilidades

Este documento presenta las progresiones de aprendizaje en Matemática para el Ciclo Orientado de la escuela secundaria.

Introducción

A continuación, se presentan las progresiones de los aprendizajes esperados para el área de **Matemática** durante el Ciclo Orientado de la escuela secundaria.

Este documento se propone aportar herramientas para planificar la enseñanza desde el reconocimiento de la diversidad de los conocimientos que van construyendo los/as estudiantes en Matemática a lo largo de su trayectoria educativa, y, particularmente, poniendo foco en la transición entre el Ciclo Básico y el Ciclo Orientado, y en los tres años de este último. Las progresiones permiten identificar avances en los conocimientos de los/as estudiantes, y ofrecen indicios del tipo de estrategia y práctica que se espera que desarrollen.

Para la elaboración de las progresiones se han considerado asuntos centrales del Ciclo Orientado, en el que se espera desarrollar una gran diversidad de aprendizajes complejos. Por ejemplo, que los/as estudiantes inicien el recorrido que les permita avanzar en el aprendizaje de los distintos tipos de funciones, no solo para reconocerlos o aplicar las fórmulas vinculadas a ellos, sino también para construir un sentido funcional, imbricado con el algebraico. En esta línea, las ecuaciones adquieren distintos sentidos según el marco desde el que se las interprete para resolverlas. Asimismo, se complejiza el tipo de tarea esperada, por ejemplo, elaborar conjeturas y argumentar sobre su validez, hallar contraejemplos para las afirmaciones falsas y validar las verdaderas, tanto en el ámbito del álgebra como en el de las funciones o en el de la geometría. Uno de los desafíos consiste, entonces, en planificar la enseñanza de modo que permita acompañar a los/as estudiantes en la construcción de los nuevos objetos matemáticos y las prácticas asociadas. La transición entre el Ciclo Básico y el Ciclo Orientado es un punto de partida, teniendo en cuenta que, en ese pasaje, los contenidos que no hayan logrado construir en el Ciclo Básico deberán constituir objeto de enseñanza en el Ciclo Orientado. Y aun en el caso de que sí hayan sido tratados en el Ciclo Básico, es necesario proponer actividades que permitan recuperarlos, reinvertirlos y resignificarlos.

Para la elaboración de las progresiones para el Ciclo Orientado del Nivel Secundario se ha realizado una selección de algunos contenidos fundamentales del *Diseño Curricular* de la jurisdicción, afianzando un criterio de continuidad con la producción curricular del área y de la Ciudad. El recorte de los contenidos que se han considerado centrales para el desarrollo de este material no implica de ninguna manera la intención de que los demás no sean enseñados. Simplemente se comunican algunas prioridades frente a otras posibles.

Las progresiones para Matemática en el Ciclo Orientado se presentan organizadas en capítulos que se corresponden con los cuatro ejes del *Diseño Curricular*: Números y álgebra; Funciones y álgebra; Geometría y medida; y Estadística y probabilidades.

El capítulo **Números y álgebra** comprende dos progresiones. La primera, “Combinatoria” da cuenta de los aprendizajes correspondientes a problemas de conteo, teniendo en cuenta aquellos que se resuelven con permutaciones, variaciones con y sin repetición y combinaciones. La segunda progresión, “Distancia entre números reales”, considera el valor absoluto como expresión de la distancia de un número al cero y el módulo de una resta como expresión de la distancia entre dos números o expresiones. Si bien este contenido está referido al eje Números y Álgebra, se ha considerado también su interpretación y trabajo en el marco funcional.

El capítulo **Funciones y álgebra** incluye cinco progresiones: “Función cuadrática”, “Función polinómica”, “Función exponencial”, “Función logarítmica” y “Función trigonométrica”. Para cada uno de los casos, se ha considerado la producción de gráficos, la relación entre los parámetros de una fórmula y las características del gráfico correspondiente, el estudio de una función, la resolución de ecuaciones e inecuaciones y la resolución de situaciones extramatemáticas mediante modelizaciones. Además de estas cuestiones generales, se consideraron también aspectos particulares referidos a cada tipo específico de función.

El capítulo **Geometría y medida** comprende tres progresiones. La primera de ellas, “Semejanza de triángulos y teorema de Thales”, parte de la semejanza para trabajar sobre la proporcionalidad de las longitudes de los segmentos y, luego, sobre el teorema. En la progresión correspondiente a “Trigonometría” se considera la definición de las razones trigonométricas como los cocientes entre lados de triángulos rectángulos semejantes, para luego adentrarse en los teoremas del seno y coseno. Finalmente, en “Posiciones relativas entre una recta y una circunferencia, y ángulos inscritos”, se reinvierten los conocimientos sobre circunferencia y clasificación, construcción y congruencia de triángulos, para elaborar relaciones entre distintos ángulos.

Por último, el capítulo **Estadística y probabilidades** incluye solo una progresión para “Probabilidades”. Allí, por un lado, se plantean problemas que se pueden resolver por medio de conteo, mientras que, por el otro, se analizan propiedades de la probabilidad, sucesos mutuamente excluyentes, independientes y la probabilidad condicional.

Debe advertirse que el desarrollo de cada eje es más extenso en algunos casos que en otros. Esto se debe a que hay contenidos centrales del ciclo que demandan varios años de trabajo y que no tienen presencia en el Ciclo Básico –por ejemplo, la gran variedad de funciones– y, por lo tanto, requieren de un tratamiento más prolongado y mayor detalle en la progresión de los aprendizajes esperados.

Para cada eje y subeje de contenidos se presentan diferentes niveles de progreso, que resultan necesariamente cortes arbitrarios del proceso. No se espera que los/as estudiantes

se ubiquen precisamente en un nivel, sino que pueden estar también en tránsito de uno a otro. Las progresiones están pensadas para orientar la interpretación de sus conocimientos, pero no deben leerse los cortes como límites rígidos. Se busca que estas descripciones sirvan a la comprensión de los aprendizajes ya logrados y contribuyan a delinear recorridos posibles para la enseñanza. A partir de la planificación de estos recorridos, incluyendo actividades e intervenciones docentes, entre otras cuestiones, se espera que los/as estudiantes vayan evolucionando en los niveles de apropiación de los contenidos.

Asimismo, es preciso explicitar que los niveles no suponen una correspondencia con los años o cursos que componen el Ciclo Orientado. Según el contenido, un/a estudiante puede estar en distintos niveles, dado que, por ejemplo, manifiesta menor avance al trabajar con funciones cuadráticas, y mayor avance al hacerlo con funciones logarítmicas. Por otro lado, los niveles no constituyen una secuencia fija y necesaria por la que tienen que pasar de manera graduada los/as estudiantes. Se asume que los puntos de partida y las actitudes hacia la matemática, su vínculo con la escuela y el estudio, y los puntos de llegada nunca son homogéneos en un grupo escolar, lo que implica que frente a una misma secuencia de enseñanza algunos/as estudiantes habrán alcanzado un nivel y otros/as, uno diferente. En algunos casos, las situaciones que plantean los enunciados de los problemas que corresponden a los distintos niveles de un mismo contenido son las mismas y cambian las preguntas. Para otros contenidos, los problemas son los mismos, mientras que cambian las estrategias que se espera que desarrolle un/a estudiante en cada nivel. La intención de la inclusión de ejemplos es acompañar la lectura de las descripciones con actividades propias del aula que permiten poner en evidencia las paulatinas adquisiciones que realizan los/as estudiantes.

Una consideración adicional sobre los niveles: en este documento se ha incluido una columna previa al primer nivel que se identifica como “Ciclo Básico”. Allí se incluyen aquellos conocimientos necesarios para poder avanzar en los aprendizajes específicos del Ciclo Orientado. Al ser considerados previos, es posible que los/as estudiantes no dispongan de todos ellos o no los recuerden. En cualquier caso, como se anticipó previamente, la escuela debe hacerse cargo de su enseñanza. No se trata de volver a trabajarlos como la primera vez, sino de plantear situaciones o secuencias que permitan recuperarlos. En este sentido, se recomienda la lectura de *Progresiones de los aprendizajes. Educación Secundaria. Ciclo Básico. Matemática*¹, ya que las progresiones allí presentadas constituyen un punto de anclaje para pensar la articulación entre ciclos.

De esta forma, el material busca ser un punto de apoyo para la escuela y los/as profesores/as en la organización de propuestas de trabajo que contemplen el total de los/as estudiantes. A partir del diagnóstico del estado de los conocimientos, es posible organizar agrupamientos con estudiantes de tercer año, de cuarto y de quinto que tienen que aprender los mismos

¹ Ministerio de Educación e Innovación. Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa (2019). *Progresiones de los aprendizajes. Educación Secundaria. Ciclo Básico. Matemática*. Buenos Aires, Argentina: GCABA. Disponible en: <https://www.buenosaires.gob.ar/calidadyequidadeducativa/evaluacion/progresiones> [consultado el 30/12/2020].

contenidos, diseñar dispositivos de reingreso para quienes hayan interrumpido su trayectoria escolar, pensar y explorar acciones de integración o adecuación curricular. Se espera que estas progresiones sean herramientas que se usen en la escuela para diseñar dispositivos específicos de enseñanza asentados en aquello que “sí saben los/as estudiantes”, más que en “lo que les falta” o “lo que no saben”.

Además de las progresiones con forma de tabla, para cada eje se proponen ejemplos de actividades posibles destinadas a relevar los aprendizajes alcanzados. Se trata de ejemplos de problemas para trabajar en clase, que permiten hacer una lectura e interpretación sobre los estados de conocimientos logrados en determinado momento del proceso. Cada capítulo se completa además con la inclusión de situaciones didácticas e intervenciones docentes destinadas a enriquecer el diseño de propuestas de enseñanza que propicien avances en los aprendizajes.

Condiciones didácticas

Se ha mencionado ya que estas progresiones no implican niveles de desarrollo espontáneo ni habilidades o capacidades que evolucionan a partir del paso del tiempo, como tampoco son el único recorrido de aprendizaje posible. Se trata de aprendizajes escolares que solamente pueden lograrse a partir de la enseñanza sistemática y organizada. En otras palabras, estos aprendizajes se producen bajo ciertas condiciones didácticas.

Entre las condiciones didácticas resulta central el rol de el/la docente, quien selecciona, planifica y propone secuencias de problemas para el aprendizaje de los diversos contenidos y el desarrollo de prácticas. Durante las clases, los/as estudiantes disponen de un espacio para resolver los problemas de manera individual o en grupos, según lo requiera la situación y en función de la planificación docente, usando diversos recursos. El/la docente interactúa con los/as estudiantes, organiza espacios para difundir y analizar estrategias de resolución correctas e incorrectas y resultados obtenidos, explica, propone escrituras y formas de representación, favorece la identificación de relaciones y permanentemente ayuda a una progresiva toma de conciencia de aquello que espera que esté disponible para ser reutilizado en problemas siguientes. También propone registrar aquello que resulta importante retener, ayudando a que la carpeta sea una herramienta de estudio. Algunos problemas tendrán por objetivo construir nuevos conocimientos, mientras que otros contribuirán a afianzar, reutilizar o evaluar aprendizajes ya alcanzados.

Durante la enseñanza es importante propiciar espacios de debate e intercambio que beneficien a todo el grupo de estudiantes. Para que estos espacios sean productivos, resulta importante que el/la docente registre las conclusiones y las nuevas estrategias en el pizarrón, mientras los/as alumnos/as lo hacen en sus carpetas, a fin de promover la disponibilidad de los nuevos recursos para su uso en los problemas siguientes. Se espera que en la escuela secundaria los/as estudiantes vayan ganando autonomía en el uso de su carpeta, que no solo debería incluir lo que el/la docente sugiere sino también anotaciones personales, recuadros, marcas, etcétera.

En este enfoque didáctico es central diferenciar la producción colectiva de la individual. Los/as estudiantes exploran de manera individual formas de resolución de cada tipo de problema, pero es en el ámbito colectivo donde se dirimen las direcciones hacia las cuales conducir los esfuerzos. Por otro lado, a partir de los debates sobre diferentes estrategias de resolución tendrán que defender su postura, convencer al resto —o ser convencidos/as—,

dar razones que se apoyan en conocimientos matemáticos para las decisiones que tomaron, etcétera. Lo individual alimenta lo colectivo, y lo colectivo alimenta lo individual. Sin embargo, la resolución colectiva de un problema no necesariamente implica que cada estudiante podrá luego resolver individualmente una situación semejante. Resulta esencial que el/la profesor/a tenga información acerca de quienes no pueden avanzar para intervenir con ayudas que les permitan desarrollar alguna estrategia. Estas intervenciones necesitan ser pensadas y planificadas, porque de acuerdo con la cantidad de información que se le brinde, el/la estudiante puede seguir pensando o puede lograr que la situación deje de ser un problema. En todos los casos es necesario que las ayudas surjan de comprender cómo el/la estudiante está pensando el problema, y solo funcionan si pueden anclarse en las relaciones que haya realizado o en aquello que haya producido. Las ayudas “genéricas” no siempre resultan útiles para todos/as. Para quienes no logran iniciar una resolución, puede resultar clave ayudarles a buscar en su carpeta otro problema parecido ya resuelto, proponerles uno similar pero con menor nivel de complejidad para luego retomar el problema original, o incluso sugerirles alguna estrategia específica (“podés hacer un esquema”, “¿te servirá hacer una figura de análisis?”, “fijate si te conviene resolver algebraicamente o desde el punto de vista funcional”, “¿hay algún par de triángulos semejantes?”, “¿te sirve para hallar la medida que falta?”, “¿probaste trazando algún elemento auxiliar?”, etcétera). Si bien en estos casos el/la estudiante recibe cierta información, tiene a su cargo una porción relevante de responsabilidad. La ayuda no le resuelve el problema sino que funciona como un andamiaje para atreverse a proponer una solución o una estrategia, punto de partida para seguir produciendo.

Otra consideración merece el tratamiento de los errores que aparecen en las resoluciones. Desde la perspectiva didáctica adoptada, esos errores no solo permiten ver qué es lo que un/a estudiante no sabe, sino que también informan qué sabe. Muchos errores tienen una lógica que es posible develar, una razón de ser que implica una cierta idea o teoría errónea que es preciso revisar. Algunos son típicos, anticipables por los/as docentes y producidos simultáneamente por diferentes estudiantes y por varios grupos. También hay errores menos habituales o menos estudiados que responden a lógicas que es importante conocer. En todos los casos, cuando un error es importante, significativo, y no es una simple equivocación, merece ser analizado colectivamente para promover interacciones que ayuden a avanzar a todo el grupo. Justificar por qué una solución es incorrecta, rechazar alguna idea equivocada, identificar alertas y cuidados a considerar en el tratamiento de un tipo de problemas implica, también, un progreso en los conocimientos.

¿Qué observar para recabar información sobre los aprendizajes de los/as estudiantes?

En el trabajo cotidiano en el aula, observar el desempeño de los/as estudiantes mientras resuelven los problemas que se les plantean y analizar el tipo de intervenciones y preguntas que hacen, los comentarios o explicaciones que pueden dar de su trabajo, las validaciones que producen, son indicadores para conocer qué saben. Sin embargo, en la escuela secundaria no siempre resulta fácil obtener información sobre todo el grupo de estudiantes

durante los momentos de intercambio, por lo que se hace necesario también plantear momentos específicos de trabajo individual o evaluaciones formativas para mirar más detenidamente la producción de cada uno/a. Esas instancias permiten reconocer qué es lo que pueden hacer solos/as y realizar interpretaciones sobre cuál es el estado de sus conocimientos respecto de cierto contenido. Esta información es central para poder determinar cómo continuar la tarea de enseñanza con el grupo y, además, planificar intervenciones particulares con estudiantes que así lo necesiten. En el desarrollo del material, para cada uno de los ejes establecidos se incluyen ejemplos de problemas para ser resueltos en clase de manera individual que podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos. Se trata de situaciones que permiten diagnosticar lo que han logrado aprender sobre algunos contenidos de enseñanza.

Es necesario que para el diseño de las evaluaciones se considere qué contenidos y tipos de tareas han sido objeto de enseñanza. Las actividades elegidas para evaluar deben implicar tareas semejantes y de complejidad similar a las realizadas en clase. En el trabajo en Matemática, no solo se ponen a disposición de los/as estudiantes principios, conceptos e información propios del área, sino también, y principalmente, *formas de trabajo y tipos de prácticas*. Para los/as alumnos/as, el sentido de los conceptos está dado por el tipo de prácticas que se despliegan a propósito de ese objeto matemático. Por ejemplo, si se trabajó con funciones cuadráticas en problemas que apuntan a la *producción de un gráfico*, no sería adecuado presentar por primera vez en una evaluación un problema en el que se deba *modelizar una situación a través de una función cuadrática*, porque implica encarar una tarea muy diferente y nueva. Los aprendizajes involucrados en la producción de un gráfico no necesariamente alcanzan para interpretarlo como el modelo de una situación. Para poder hacer una interpretación de lo que sabe cada estudiante a partir de sus producciones, es necesario solicitarle que muestre su resolución, que registre de alguna manera el procedimiento llevado a cabo para la solución de cada problema y que dé cuenta de por qué tomó cada decisión. Solamente así se tendrá la oportunidad de analizar las estrategias usadas y detectar las cuestiones centrales sobre las que hay que seguir trabajando. En ese sentido, es necesario recordar que el desempeño de cada estudiante dependerá, entre otras cuestiones, de su punto de partida y de la enseñanza sistemática que haya recibido.

Números y álgebra

Los Números Naturales, Enteros y Racionales han sido objeto de trabajo en el Ciclo Básico. En el Ciclo Orientado se incorpora el análisis de los números irracionales, el último conjunto necesario para poder definir los Números Reales. Sin embargo, no se ha incluido una progresión para su aprendizaje, porque se lo considera transversal a otros contenidos.

Para estas progresiones se han considerado dos subejjes:

- Combinatoria
- Valor absoluto

Combinatoria

El trabajo sobre combinatoria gira en torno a situaciones de conteo que se diferencian de la siguiente manera: si al considerar qué casos son distintos se debe tener en cuenta o no el orden de los elementos, y cómo es posible contar esos casos. Las estrategias construidas a partir de estos problemas serán necesarias para resolver situaciones que no requieren específicamente del uso de permutaciones ni de variaciones o de combinaciones.

Combinatoria

Ciclo Básico

Ciclo Orientado

Nivel I

Reconoce si un problema trata de permutaciones, variaciones sin repetición o variaciones con repetición.

Por ejemplo, al resolver este problema:

¿Cuántas contraseñas de 4 caracteres se pueden formar usando las letras “m”, “f”, “n” y los números “4”, “8” y “0” sin repetir ninguna letra ni ningún número?

El/la estudiante reconoce que se trata de una situación de variaciones sin repetición de 6 elementos tomados de a 4. Resuelve utilizando la fórmula $\frac{6!}{(6-4)!}$, o bien por medio del cálculo $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, interpretando que se tienen que completar cuatro lugares y que para el primero de esos lugares hay 6 posibilidades, para el segundo 5, etcétera.

- Problemas de conteo.
- Problemas que involucran permutaciones, variaciones sin repetición y con repetición, y combinaciones.
- Generalización de estrategias para el cálculo de la cantidad de casos.

Ciclo Orientado

Nivel II

Reconoce situaciones de conteo en las que no se debe tener en cuenta el orden, y las interpreta como problemas que tratan de combinaciones.

Por ejemplo, al resolver este problema:

De los/as 20 estudiantes de una división de una escuela se necesita elegir un grupo de 5 representantes en una asamblea. ¿De cuántas maneras distintas se podría formar el grupo?

El/la estudiante reconoce que se trata de una situación de combinaciones de 20 elementos tomados de a 5. Resuelve utilizando la fórmula $\frac{20!}{(20-5)! \cdot 5!}$, o bien por medio del cálculo $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$, interpretando que por cada 5 estudiantes existen $5! = 120$ grupos que son equivalentes y que, en consecuencia, para calcular la cantidad de grupos distintos es necesario dividir por ese valor.

Nivel III

Resuelve problemas de conteo que requieren de la utilización combinada de permutaciones, variaciones sin repetición, variaciones con repetición y combinaciones.

Por ejemplo, ante el siguiente problema:

De todos/as los/as integrantes de dos divisiones de una escuela se necesita elegir un grupo de 3 estudiantes para que los representen en una asamblea. Una de las divisiones está formada por 15 estudiantes y la otra por 18. ¿De cuántas maneras distintas se podría formar el grupo si es necesario que esté formado por estudiantes de ambas divisiones?

El/la estudiante establece que una manera de hallar la cantidad de grupos consiste en calcular primero la cantidad total sin tener en cuenta la restricción, para luego restarle la cantidad de grupos que solo tienen miembros de una de las dos divisiones. Para hallar la primera cantidad utiliza el combinatorio $C_3^{33} = 5456$. Para las otras dos utiliza los combinatorios $C_3^{15} = 455$ y $C_3^{18} = 816$. De esta manera, obtiene: $5456 - 455 - 816 = 4185$.

Valor absoluto

Si bien la noción de valor absoluto se trabaja desde el Ciclo Básico, en el Ciclo Orientado se propone una profundización de lo visto. Se parte de una noción numérica, a partir de considerarlo como la distancia al cero o entre dos valores, para avanzar hacia una noción de tipo algebraica y una de tipo funcional. En particular, interesa que los/as estudiantes puedan resolver una ecuación o inecuación desde un marco numérico, algebraico o funcional, analizando las relaciones entre ellos.

Valor absoluto

Ciclo Básico

Ciclo Orientado

Nivel I

Cálculos y operaciones en los conjuntos de los Números Naturales, Enteros y Racionales.

Aproximación a las funciones a través de gráficos cartesianos.

Interpreta el módulo como una distancia entre números para resolver ecuaciones e inecuaciones.

Por ejemplo, frente a la ecuación $|x - 3| + 5 = 4$, el/la estudiante inicia el proceso de resolución de la siguiente manera:

$$|x - 3| = 4 - 5$$

$$|x - 3| = -1$$

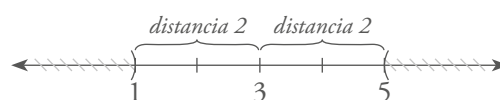
para afirmar que no hay solución porque la distancia entre dos números no puede ser negativa.

O bien, frente a la inecuación $|x - 3| + 5 > 7$, el/la estudiante opera de la siguiente manera:

$$|x - 3| > 7 - 5$$

$$|x - 3| > 2$$

para afirmar que el conjunto solución es $S = (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$ debido a que los números que pertenecen a esos intervalos son los que se encuentran a una distancia mayor que 2 de 3. Para llegar a esta última conclusión podría apoyarse en la recta numérica.



- Valor absoluto de un número.
- Distancia entre dos números: el módulo de su diferencia.
- Resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto apelando a la noción de distancia.

Ciclo Orientado

Nivel II

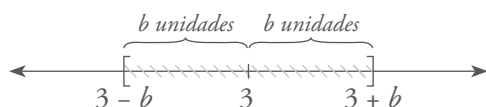
Interpreta el módulo como una distancia entre números para anticipar la existencia y el tipo de solución de una inecuación.

Por ejemplo, al resolver este problema:

¿Es posible que el conjunto solución de la siguiente inecuación sea una unión de intervalos disjuntos?

$$|x - 3| \leq b$$

El/la estudiante interpreta que si b es positivo el conjunto solución es un único intervalo centrado en 3, con los extremos a b unidades de distancia.



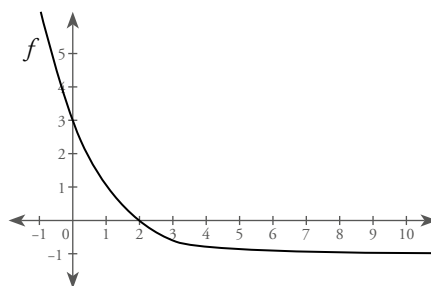
Luego analiza que si b es igual a 0 la única solución es 3 y que si b es menor que 0 la inecuación no tiene solución. Para finalizar responde que, entonces, no es posible que el conjunto solución de la inecuación sea una unión de intervalos disjuntos.

Nivel III

Interpreta el módulo como el valor absoluto de un número para estudiar funciones.

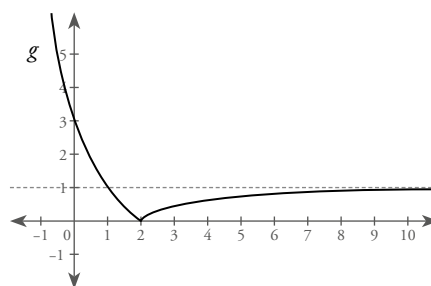
Por ejemplo, al resolver este problema:

El siguiente es el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$.



Analiza si el gráfico de la función definida por la fórmula $g(x) = |f(x)|$ posee una asíntota.

El/la estudiante realiza un gráfico como el siguiente, a partir de interpretar que los valores de las imágenes de la función g son “los mismos” que los de f , pero positivos.



Analiza que cuando x tiende a infinito los valores de la imagen de g “se acercan” a 1 como consecuencia de que los de la imagen de f “se acercan” a -1 . Afirma, como conclusión, que la función g posee una asíntota de ecuación $y = 1$.

Actividades para relevar los aprendizajes

Como se señaló en la introducción de este documento, se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que podrían ser útiles a la hora de reunir información sobre el estado de conocimientos de los/as estudiantes en relación con el eje Números y álgebra. Se puede obtener parte de esta información durante el trabajo en el aula, al observar a los/as estudiantes mientras resuelven problemas, analizar sus intervenciones y preguntas durante las instancias colectivas y las explicaciones que pueden dar de su trabajo. Sin embargo, resulta necesario también disponer de datos acerca de sus producciones en situaciones de trabajo individual, que permitirán analizar más detalladamente la producción de cada estudiante. Las situaciones propuestas a continuación responden a este propósito.

Combinatoria

Situación. Combinaciones de elementos con restricciones

El siguiente problema propone contar una cantidad de grupos que deben cumplir con restricciones, con el objetivo de evaluar si los/as estudiantes son capaces de considerarlas y cómo las incorporan a las estrategias de conteo que utilicen.

Del total de estudiantes de dos divisiones de una escuela se necesita elegir un grupo de tres representantes para una asamblea. Una de las divisiones está formada por 15 estudiantes y la otra por 18. ¿De cuántas maneras distintas se podría formar el grupo si es necesario que esté formado por al menos un/a estudiante de cada división?

Para este problema se puede observar si el/la estudiante:

- » No considera la restricción de que debe haber al menos un/a estudiante de cada división en el grupo ni reconoce que no se debe tener en cuenta el orden en el que se los/as elige. Por ejemplo, toma los/as 33 estudiantes y afirma de manera incorrecta que la cantidad de grupos es el resultado del cálculo $33 \cdot 32 \cdot 31$, interpretando que se tienen que completar tres lugares y que para el primero de esos lugares hay 33 posibilidades, para el segundo 32 y para el tercero, 31.

- » No considera la restricción de que debe haber al menos un/a estudiante de cada división en el grupo (o no sabe cómo hacerlo) pero sí reconoce que no se debe tener en cuenta el orden en el que se los/as elige. Por ejemplo, podría tomar el total de 33 estudiantes y calcular de manera incorrecta la cantidad de casos con el combinatorio C_3^{33} . También podría afirmar que la cantidad de grupos es el resultado de dividir por 6 a $33 \cdot 32 \cdot 31 = 32736$, interpretando que por cada 3 estudiantes existen $3! = 6$ grupos que son equivalentes.
- » Considera la restricción de que debe haber al menos un/a estudiante de cada división en el grupo pero no tiene en cuenta cuestiones referidas al orden en el que se elige. Por ejemplo, interpreta que se tienen que completar tres lugares y que para el primero de esos lugares hay 15 posibilidades, para el segundo 18 y para el tercero 31, esta última cantidad debido a que es el total de estudiantes que se pueden elegir luego de haber elegido uno/a de cada división. De manera incorrecta, responde a la pregunta del problema con el cálculo $15 \cdot 18 \cdot 31 = 8370$.
- » Considera la restricción de que debe haber al menos un/a estudiante de cada división en el grupo y reconoce que no se debe tener en cuenta el orden en el que se elige. Por ejemplo, en primer lugar interpreta que se tienen que completar tres lugares y que para el primero de esos lugares hay 15 posibilidades, para el segundo 18 y para el tercero 31, esta última cantidad debido a que es el total de estudiantes que se pueden elegir luego de haber elegido uno/a de cada división. Luego reconoce que de esta manera cada posible grupo se está contando 2 veces, porque se están considerando como distintos los grupos que tienen intercambiado el/la primer/a y el/la tercer/a estudiante, y los/as que tienen intercambiado/a el/la segundo/a con el/la tercer/a. Halla la cantidad pedida por medio del cálculo: $\frac{15 \cdot 18 \cdot 31}{2} = 4185$.
- » Considera la restricción de que debe haber al menos un/a estudiante de cada división en el grupo y para calcular la cantidad de casos divide el grupo en dos: los que tienen dos estudiantes de la primera división y uno/a de la segunda por un lado, y los que tienen un/a estudiante de la primera división y dos de la segunda, por otro. Halla la cantidad de grupos usando los combinatorios $C_2^{15} \cdot C_1^{18} = 1890$ para el primer conjunto y $C_1^{15} \cdot C_2^{18} = 2295$ para el segundo. Para responder a la pregunta suma las dos cantidades: $1890 + 2295 = 4185$. También podría hallar la cantidad de grupos correspondiente al primer conjunto por medio del cálculo $\frac{15 \cdot 14 \cdot 18}{2} = 1890$, estableciendo que se debe dividir por 2 porque, como no importa el orden, si no se hiciera se estarían considerando como distintos los grupos que tienen intercambiado el/la primer/a y el/la segundo/a estudiante. De manera análoga, para el segundo conjunto podría hallar la cantidad de grupos por medio del cálculo $\frac{15 \cdot 18 \cdot 17}{2} = 2295$.
- » Considera la restricción de que debe haber al menos un/a estudiante de cada división en el grupo y, para calcular la cantidad de casos, halla primero la cantidad de grupos posibles sin tener en cuenta la restricción para luego restarle

la cantidad que no cumple con lo pedido. Por ejemplo, para hallar la primera cantidad utiliza el combinatorio $C_3^{33} = 5456$. Luego, establece que los grupos que no cumplen con lo pedido son los que tienen los/as tres estudiantes de la primera división o los/as tres estudiantes de la segunda. Halla estas cantidades por medio de los combinatorios $C_3^{15} = 455$ y $C_3^{18} = 816$. Para finalizar, halla la cantidad pedida por medio de la resta: $5456 - 455 - 816 = 4185$.

Valor absoluto

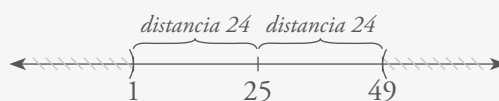
Situación. Resolución de inecuaciones con módulo

Mediante este problema se podrá evaluar qué tratamiento del módulo realizan los/as alumnos/as al resolver inecuaciones, cómo consideran el argumento, si realizan o no anticipaciones y si son capaces de hacer interpretaciones desde el marco algebraico y/o desde el marco funcional.

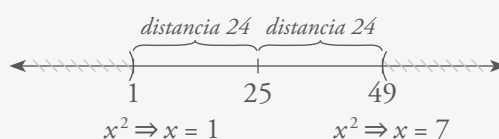
Hallá todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple $|x^2 - 25| > 24$.

Para este problema se puede observar si el/la estudiante:

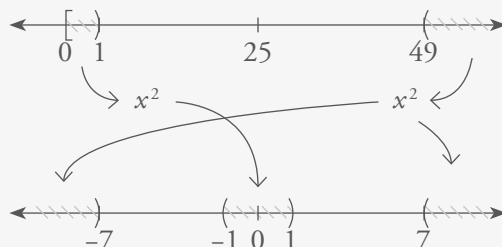
- » Interpreta el módulo de la resta como una distancia entre números sin considerar que la variable está elevada al cuadrado. Afirma de manera incorrecta que $(-\infty; 1) \cup (49; +\infty)$ es el conjunto de valores de x que cumplen con la desigualdad debido a que son los que se encuentran a distancia mayor que 24 del número 25. Es posible que confeccione y se apoye en una recta numérica como la siguiente.



- » Interpreta el módulo de la resta como una distancia entre los números que representan x^2 y 25 y analiza para qué valores de x se cumple la condición. Afirma de manera incorrecta que $(-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$ es el conjunto de valores de x que cumplen con la desigualdad debido a que son los que se encuentran a distancia mayor que 24 del número 25 luego de ser elevados al cuadrado. Solo considera la expresión x^2 al analizar los extremos de los intervalos. Es posible que confeccione y se apoye en una recta numérica como la siguiente.



- » Interpreta el módulo de la resta como una distancia entre los números que representa x^2 y 25 y analiza para qué valores de x se cumple la condición. Por ejemplo, analiza que los resultados de x^2 son positivos y deben estar a distancia mayor que 24 de 25, por lo que deben pertenecer al conjunto $[0; 1) \cup (49; +\infty)$. Concluye, entonces, que los valores absolutos de x que son solución deben ser mayores que 7 y menores que 1. Afirma que la solución es el conjunto $(-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (7; +\infty)$. Es posible que confeccione y se apoye en distintas rectas numéricas como las siguientes.



- » Resuelve de manera algebraica, ya sea correcta o incorrectamente. Es posible que para realizar algunos pasos se apoye en la noción de módulo como distancia o valor absoluto. Por ejemplo, podría abrir el módulo interpretando que se están buscando valores absolutos mayores que 24, por lo que su argumento debe ser menor que -24 o mayor que 24.

$$\begin{aligned}
 |x^2 - 25| &> 24 \\
 x^2 - 25 < -24 &\vee x^2 - 25 > 24 \\
 x^2 < -24 + 25 &\vee x^2 > 24 + 25 \\
 x^2 < 1 &\vee x^2 > 49 \\
 |x| < 1 &\vee |x| > 7
 \end{aligned}$$

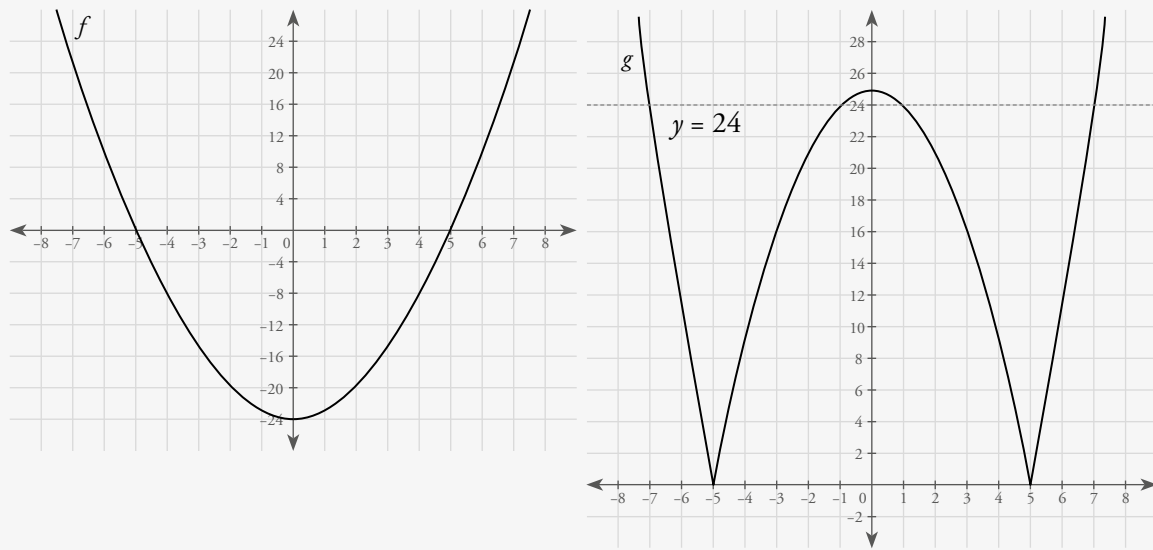
En este paso, con respecto a $|x| < 1$, podría abrir el módulo interpretando que se está buscando que el valor absoluto debe ser menor que 1, por lo que x debe ser mayor que -1 y menor que 1.

$$(x > -1 \wedge x < 1) \vee (x < -7 \vee x > 7)$$

$$x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (7; +\infty)$$

- » Interpreta el módulo como el valor absoluto de los valores de la imagen de la función definida por la fórmula $x^2 - 25$, y emplea gráficos de funciones para resolver. Por ejemplo, realiza el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = x^2 - 25$ y, a partir de este, el de $g(x) = |x^2 - 25|$.

Luego, a partir de observar el gráfico y de verificar con la fórmula, determina que $g(-7) = g(-1) = g(1) = g(7) = 24$. Sobre la base de estos valores y del comportamiento del gráfico afirma que si $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (7; +\infty)$, entonces $g(x) = |x^2 - 25| > 24$.



Funciones y álgebra

Introducción

En el *Diseño Curricular. Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires* se proponen diversas entradas al álgebra. En el Ciclo Básico, en el eje Números y álgebra, la mirada se centra en el manejo de expresiones algebraicas para conjeturar y validar propiedades de los números y en la producción de fórmulas en el conjunto de Números Naturales. En el eje Funciones y álgebra se plantea el trabajo con expresiones algebraicas a partir del estudio de las funciones; una de las tareas sugeridas consiste en analizar las relaciones entre los gráficos, las fórmulas y las situaciones que podrían modelizar. El álgebra se presenta así de manera transversal a ambos ejes. Estas mismas ideas se retoman en el Ciclo Orientado.

En este ciclo se suponen ciertos conocimientos de los/as estudiantes que les permiten tratar con funciones en general, como por ejemplo la noción de variable y variabilidad, la relación que existe entre una fórmula y el gráfico de la función que define, la noción de imagen y preimagen, etcétera. A partir de ellos, se busca que los/as estudiantes puedan comprender otros modelos funcionales enfrentándose a su estudio desde diferentes marcos: funcional, geométrico, algebraico y numérico. El recurso gráfico será, del mismo modo que en el Ciclo Básico, un apoyo para el estudio de los distintos tipos de funciones, mientras que el desarrollo de las técnicas algebraicas se plantea a partir del estudio de su comportamiento.

Uno de los contenidos que se retoman del Ciclo Básico, que es transversal a los diferentes tipos de funciones, es el vinculado con la resolución de ecuaciones e inecuaciones a partir del análisis del gráfico de las funciones asociadas, lo que requiere de realizar un juego de marcos. Si bien se espera que este tipo de trabajo se realice con todos los tipos de funciones, en las progresiones solo se considera el aspecto vinculado al tipo de función particular que se está abordando.

Los subejos que se han considerado para estas progresiones son los siguientes:

- Función cuadrática
- Función polinómica
- Función exponencial y función logarítmica
- Función trigonométrica

Función cuadrática

Como ya se ha señalado, cada docente puede decidir el camino de inicio para el estudio de un objeto matemático. Una de las maneras de iniciar el estudio de las funciones cuadráticas consiste en analizar procesos que involucran ciertas características de estas funciones, como por ejemplo la simetría y la existencia de un máximo o mínimo.

Se espera que los/as estudiantes puedan interpretar las distintas formas en las que se expresa la fórmula de una función cuadrática para obtener información a partir de ellas. Así, podrán reconocer los diferentes datos que aportan respecto de su gráfico.

Función cuadrática

Ciclo Básico

Ciclo Orientado

Nivel I

Lectura de información que se encuentra en gráficos.

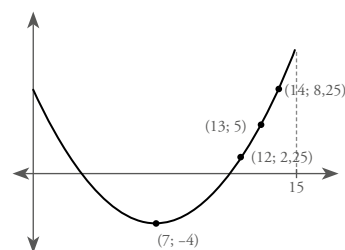
Análisis de la variación de una variable en función de otra variable.

Relación entre una tabla de valores, el gráfico cartesiano y una situación.

Utiliza la simetría para hallar la segunda coordenada de puntos que pertenecen a una parábola y/o la imagen de valores del dominio de una función cuadrática, en problemas situados en contextos intra- y extramatemáticos.

Por ejemplo, al resolver este problema:

A continuación se presenta el gráfico de una función cuadrática cuyo vértice es el punto $(7; -4)$. La función describe la temperatura registrada (medida en $^{\circ}\text{C}$) entre las 0 y las 15 horas de un día de otoño en la ciudad de Río Gallegos. ¿Cuál fue la temperatura a la 1 de la madrugada?



El/la estudiante reconoce que lo que debe hallar es la segunda coordenada de un punto que pertenece a la parábola y cuya primera coordenada es 1, y lo marca de manera estimada en el gráfico. Luego identifica que este punto está a la misma distancia del eje de simetría que el punto $(13; 5)$, ya que tanto 1 como 13 se encuentran a 6 unidades de distancia de 7 (el valor del eje de simetría), y utiliza esta relación para establecer que su segunda coordenada es 5.

El ejemplo continúa en página 40.

- Producción de fórmulas y sus distintas escrituras.
- Vértice y eje de simetría. Relación entre su gráfico y una fórmula.
- Variaciones de los gráficos en función de las variaciones de las fórmulas y viceversa. Incidencia en el vértice y en el eje de simetría.
- Estudio de la función cuadrática: factorización, ceros, crecimiento, decrecimiento, conjunto imagen, positividad, negatividad.
- Problemas que se modelizan mediante funciones cuadráticas.
- Análisis de soluciones de la ecuación cuadrática.

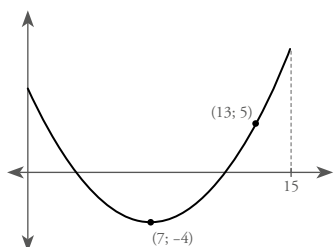
Ciclo Orientado

Nivel II

Utiliza la simetría para hallar la primera coordenada de puntos que pertenecen a una parábola y/o preimágenes en una función cuadrática, en problemas situados en contextos intra- y extramatemáticos.

Por ejemplo, al resolver este problema:

A continuación se presenta el gráfico de una función cuadrática cuyo vértice es el punto $(7; -4)$. La función describe la temperatura registrada (medida en $^{\circ}\text{C}$) entre las 0 y las 15 horas de un día de otoño en la ciudad de Río Gallegos. ¿A qué hora de la madrugada la temperatura fue de 5°C ?



El/la estudiante reconoce que lo que debe hallar es la primera coordenada de un punto que pertenece a la parábola y cuya segunda coordenada es 5, la misma que la del punto $(13; 5)$, y lo marca en el gráfico apoyándose en él. Luego identifica que ambos puntos equidistan del eje de simetría y utiliza esta relación para establecer que la primera coordenada del punto buscado es 1, ya que se encuentra a 6 unidades de distancia de 7 (el valor del eje de simetría), al igual que ocurre con la primera coordenada del punto $(13; 5)$.

El ejemplo continúa en página 41.

Nivel III

Utiliza la simetría y otras características de las funciones cuadráticas al modelizar y resolver problemas situados en contextos intra- y extramatemáticos.

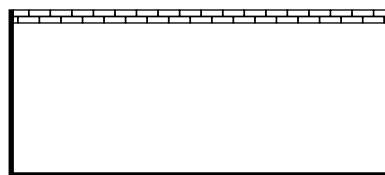
Por ejemplo, al resolver el siguiente problema:

Se consideran todos los posibles rectángulos cuyo perímetro es de 20 cm. ¿Cuál de ellos es el que tiene mayor área?

El/la estudiante llama x a la longitud de uno de los lados de los rectángulos y produce una fórmula que calcula el área de ellos: $x \cdot (10 \text{ cm} - x)$. Reconoce que se trata de la fórmula de una función cuadrática y que, por lo tanto, el valor máximo lo alcanza en $x_v = 5$. Luego reemplaza el valor en la fórmula y obtiene el área máxima: $5 \text{ cm} \cdot (10 \text{ cm} - 5 \text{ cm}) = 25 \text{ cm}^2$.

O bien, al resolver la siguiente situación:

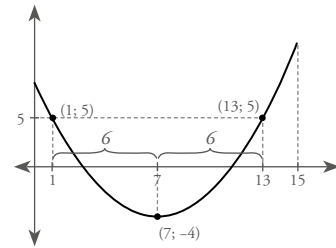
Lucía y Ana quieren armar un puesto en una feria. Para hacerlo tienen 10 m de madera que deben colocar de manera rectangular contra una pared, como muestra la figura.



¿De qué medidas deben armar el puesto si quieren que la superficie tenga la mayor área posible?

El ejemplo continúa en página 41.

Continúa el ejemplo de página 38.



Por último concluye que a la 1 de la madrugada la temperatura fue de 5°C .

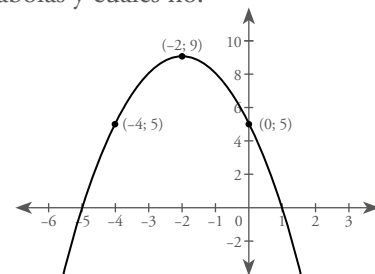
También podría analizar la simetría y hallar la imagen de 1 utilizando una tabla de valores confeccionada a partir de los datos del gráfico.

6		6		
1	7	12	13	14
5	-4	2,25	5	8,25

Utiliza la simetría para establecer si un gráfico puede corresponder a una función cuadrática o si se trata de una parábola.

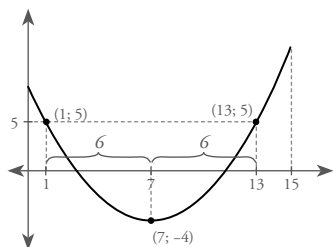
Por ejemplo, resuelve problemas como el siguiente:

Decidí cuáles de estos gráficos pueden ser parábolas y cuáles no.



El problema continúa en página 42.

Continúa el ejemplo de página 39.



Por último concluye que la temperatura fue de 5 °C a la 1 de la madrugada.

O bien, para resolver problemas como el siguiente:

Completá la siguiente tabla de valores sabiendo que corresponde a una función cuadrática cuyo eje de simetría es $x = 3$.

x	$f(x)$
3	16
4	15
-1	0
0	7
5	12
	7
	12
	0
	15

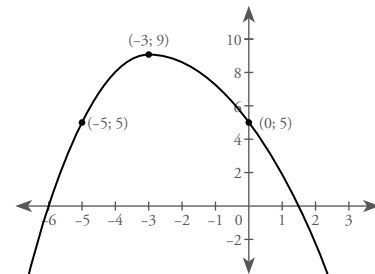
El/la alumno/a reconoce que la tabla contiene valores de la imagen que se repiten y utiliza la simetría para completar los valores de las preimágenes. Podría primero organizar la tabla de manera de que “muestre” la simetría y luego completar los valores de las preimágenes.

El ejemplo continúa en página 43.

Continúa el ejemplo de página 39.

El/la estudiante llama x a la longitud de los lados iguales (laterales) del rectángulo que representa el puesto y produce una fórmula que permite calcular su área: $x \cdot (10 - 2x)$. Reconoce que se trata de la fórmula de una función cuadrática y que, por lo tanto, el valor máximo lo alcanza en $x_v = 2,5$. Luego utiliza este valor para hallar las medidas del puesto: 2,5 m la longitud de los laterales y 5 m la longitud del lado restante.

Continúa el problema de página 40.



Utiliza la simetría para hallar el vértice de una parábola.

Por ejemplo, a partir de la fórmula de una función cuadrática $f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$ y de sus raíces, 1 y 5, el/la estudiante establece que el vértice de su gráfico es el punto (3; -8) dado que $x_v = 3$ por estar a la misma distancia de 1 que de 5 y que $y_v = -8$ porque $f(3) = -8$.

Reconoce que existen valores de la variable que tienen la misma imagen a través de fórmulas cuya variable está elevada al cuadrado, y es capaz de hallarlos.

Por ejemplo, para la función de fórmula $f(x) = (x - 1)^2 + 3$ reconoce que si se reemplaza x por 3 o por -1 el resultado será el mismo, ya que en un caso el primer término es $(2)^2 = 4$ y en el segundo caso $(-2)^2 = 4$.

Produce gráficos de funciones cuadráticas ubicando puntos en el plano cartesiano a partir de valores relacionados de las variables, previendo su forma y sus características.

La fila continúa en página 44.

Continúa el ejemplo de página 41.

x	$f(x)$
-1	0
0	7
1	12
2	15
3	16
4	15
5	12
6	7
7	0

Produce gráficos de funciones cuadráticas ubicando puntos importantes a partir de su fórmula: halla el vértice y, si existen, las raíces, leyendo la información de la fórmula y operando con ella.

Por ejemplo, para realizar el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = (x - 1)^2 - 4$, el/la estudiante halla las coordenadas (1; -4) del vértice “leyendo” la fórmula y las raíces resolviendo la ecuación $(x - 1)^2 - 4 = 0$.

El ejemplo continúa en página 45.

Reconoce e interpreta la relación entre los valores de los parámetros de una fórmula de una función cuadrática y su gráfico.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

Identificá cuál de los siguientes gráficos podría ser el de la función definida por la fórmula $f(x) = -3(x - 2)(x + 6)$.

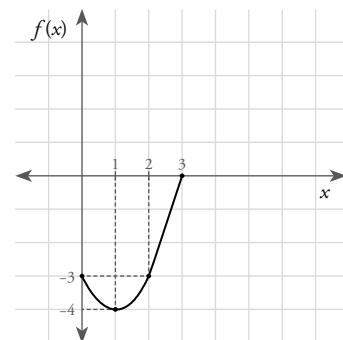
El problema continúa en página 45.



Continúa la fila de página 42.

Por ejemplo, para realizar el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = x^2 - 2x - 3$, el/la estudiante produce la siguiente tabla y el siguiente gráfico, anticipando que al tratarse de una parábola posee un vértice, que es máximo o mínimo, y que es simétrica con respecto a la recta vertical que pasa por él. En consecuencia, realiza una exploración controlada buscando valores de x que tengan la misma imagen, sabiendo que están a la misma distancia de la primera coordenada del vértice.

x	$f(x)$
0	-3
1	-4
2	-3
3	0



Lee la información que porta un cálculo o una expresión.

Resuelve ecuaciones a partir de analizar la estructura del cálculo.

Resuelve ecuaciones del tipo $ax^2 + c = k$, sin anticipar la existencia o cantidad de soluciones.

Por ejemplo, frente a la ecuación $-2x^2 + 5 = 13$, el/la estudiante inicia el proceso de resolución de la siguiente manera:

$$-2x^2 = 13 - 5$$

$$-2x^2 = 8$$

$$x^2 = -4$$

El ejemplo continúa en página 46.

Nivel II

Continúa el ejemplo de página 43.

O bien, para el caso de la fórmula

$$f(x) = (x - 3)(x + 1)$$

halla primero las raíces 3 y -1. Luego las utiliza para determinar la primera coordenada del vértice a partir de su promedio $\frac{3+(-1)}{2} = 1$, que sustituye en la fórmula de la función para hallar la segunda coordenada del vértice.

En el caso de una fórmula como

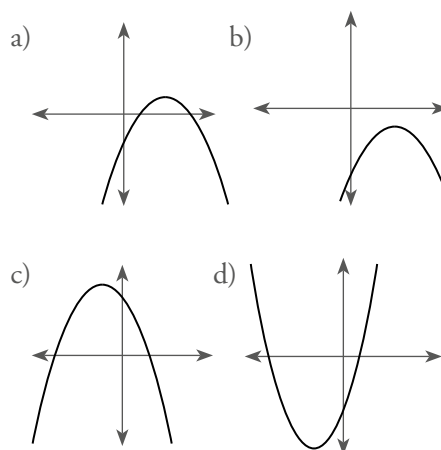
$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

el/la estudiante utiliza los coeficientes para hallar las raíces, la primera coordenada del vértice y, a partir de ella, la segunda coordenada del vértice.

En los tres casos marca esos puntos como referencia y luego traza el gráfico. También puede suceder que obtenga más puntos simétricos que pertenezcan a la parábola y los utilice para realizar el gráfico con mayor precisión.

Nivel III

Continúa el problema de página 43.



El/la estudiante reconoce que 2 y -6 son las raíces de la función e interpreta que el gráfico interseca al eje x en dos valores, uno positivo y otro negativo, lo que le permite descartar los gráficos a) y b). Reconoce también que el coeficiente principal de la fórmula es negativo (-3) y lo relaciona con la concavidad de la parábola, lo que le permite interpretar que el gráfico de la función no puede ser el d). Por último, afirma que el gráfico c) puede corresponder a la función porque “corta” al eje x en un valor positivo y en otro negativo, y tiene las ramas “hacia abajo”.

Anticipa la cantidad de soluciones de una ecuación del tipo $ax^2 + c = k$.

Por ejemplo, frente a la ecuación

$$-2x^2 + 5 = 13$$

el/la estudiante afirma que no tiene solución porque $-2x^2$ es negativo o cero, por lo tanto, al sumarle 5 el resultado será menor o igual que 5.

Determina los valores de k para los cuales las ecuaciones del tipo $a(x - p)^2 + q = k$ tienen dos, una o ninguna solución desde un marco algebraico.

Por ejemplo, frente a la ecuación

$-2(x - 1)^2 + 5 = k$, el/la estudiante afirma que tiene una única solución para $k = 5$ porque en ese caso $-2(x - 1)^2$ debe ser 0 y la única posibilidad que existe es $x = 1$.

El ejemplo continúa en página 47.

Continúa el ejemplo de página 44.

Una vez que obtiene esta expresión, reemplaza la variable con algunos valores (posiblemente con -2) o utiliza la calculadora con la intención de hallar $\sqrt{-4}$ y, ante los resultados que obtiene, reconoce y afirma que no hay solución porque un cuadrado no puede ser negativo.

Resuelve ecuaciones del tipo $a(x - p)(x - q) = 0$ a partir de leer la información que porta el cálculo.

Por ejemplo, en la ecuación $-2(x - 1)(x - 5) = 0$, el/la estudiante interpreta la expresión como un producto entre dos números cuyo resultado es 0 y establece que, para que se cumpla la condición, alguno de los dos factores tiene que ser 0. Deduce que los valores de x que hacen que se cumpla la condición sean 1 o 5, y determina que, por lo tanto, esas son las soluciones de la ecuación.

Resuelve ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ sacando factor común y leyendo la información que porta el cálculo.

Por ejemplo, el/la estudiante transforma la ecuación $3x^2 - 6x = 0$ en la ecuación $3x(x - 2) = 0$ sacando factor común e interpreta la expresión como un producto entre dos números cuyo resultado es 0. Luego establece que, para que se cumpla la condición, alguno de los dos factores tiene que ser 0. Deduce que los valores de x que hacen que se cumpla la condición son 0 o 2, y determina que, por lo tanto, esas son las soluciones de la ecuación.

Nivel II

Resuelve ecuaciones del tipo $a(x - p)^2 + q = k$, pudiendo anticipar –en algún paso de la resolución– la existencia y cantidad de soluciones.

Por ejemplo, resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2(x - 1)^2 - 3 &= 5 \\ 2(x - 1)^2 &= 5 + 3 \\ 2(x - 1)^2 &= 8 \\ (x - 1)^2 &= \frac{8}{2} \\ (x - 1)^2 &= 4 \\ |x - 1| &= \sqrt{4} \\ x - 1 &= 2 \text{ ó } x - 1 = -2 \\ x &= 3 \text{ ó } x = -1 \\ S &= \{-1; 3\} \end{aligned}$$

Podría suceder que ante la expresión $(x - 1)^2 = 4$, el/la estudiante anticipe que existen dos soluciones, y que en el siguiente paso escriba directamente:

$$x - 1 = 2 \text{ ó } x - 1 = -2$$

O bien, para resolver la ecuación $2(x - 3)^2 + 5 = 3$, el/la alumno/a realiza transformaciones hasta llegar a la expresión $(x - 3)^2 = -1$, y establece que la ecuación no tiene solución debido a que no existe ningún número real que elevado al cuadrado dé como resultado un número negativo.

Resuelve ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) utilizando la fórmula “resolvente”.

Resuelve ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = k$ (con a y k no nulos), lo que implica realizar una transformación y aplicar la fórmula “resolvente”.

Resuelve ecuaciones del tipo $a(x - p)(x - q) = k$ (con $k \neq 0$), lo que implica desarrollar la expresión y utilizar la fórmula “resolvente”.

Nivel III

Continúa el ejemplo de página 45.

También analiza que si, en cambio, se reemplaza x por un valor distinto de 1, $-2(x - 1)^2$ será un número negativo y el resultado del miembro izquierdo será menor que 5. Concluye entonces que para cualquier valor de k mayor que 5 la ecuación no tendrá solución. Sobre el mismo razonamiento, el/la alumno/a determina que para cualquier valor de k menor que 5 la ecuación tendrá dos soluciones, porque el resultado del miembro izquierdo será el mismo si se reemplaza x por dos valores que se encuentren a la misma distancia de 1.

Determina los valores de k para los cuales las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = k$ tienen dos, una o ninguna solución desde un marco algebraico.

Por ejemplo, frente a la ecuación $x^2 - 2x - 3 = k$, el/la estudiante la transforma en $x^2 - 2x - 3 - k = 0$ y determina que su discriminante tiene que ser 0 para que la ecuación posea una única solución. Luego plantea la ecuación $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3 - k) = 0$ que resuelve para concluir que si $k = 4$ la ecuación cuadrática tiene una única solución.

Determina la existencia y la cantidad de soluciones en ecuaciones cuadráticas del tipo $f(x) = k$ desde el marco funcional.

Por ejemplo, para resolver problemas como el siguiente:

Hallá todos los valores de k para los cuales la ecuación $x^2 - 2x - 3 = k$ tiene exactamente dos soluciones diferentes.

El/la estudiante interpreta la expresión $x^2 - 2x - 3$ como la fórmula de una función y k como un posible valor de la imagen. Luego halla la imagen de la función a partir de considerar la concavidad y la coordenada y del vértice y/o produciendo y analizando su gráfico: $[-4; +\infty)$.

El ejemplo continúa en página 49.

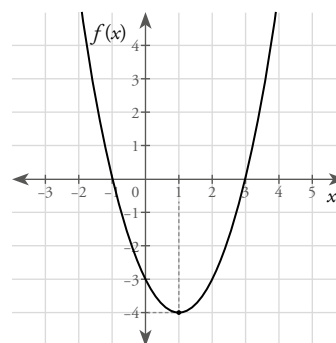
Produce fórmulas en diferentes contextos en los que la variable requiere ser elevada al cuadrado.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

En un cuadrado de 8 cm de lado se trazan dos segmentos paralelos a los lados. Dentro del cuadrado quedan determinados los cuadrados M y N. Los lados del cuadrado N se van achicando y agrandando, tomando los valores entre 0 y 8 cm.

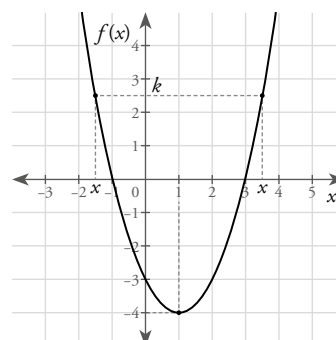
El problema continúa en página 50.

Continúa el ejemplo de página 47.



Por último, afirma que para cualquier valor de k mayor que -4 la ecuación tendrá dos soluciones, ya que -4 es el único valor de la imagen que posee una sola preimagen.

Podría apoyarse en el gráfico para fundamentar su resolución.



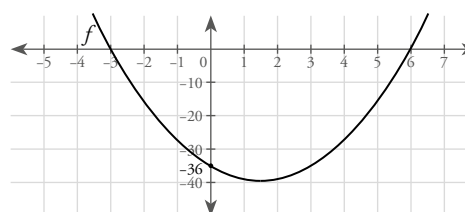
Reescribe la fórmula de una función cuadrática de otra forma equivalente.

Por ejemplo, a partir de la fórmula $3(x - 1)(x + 2)$ el/la estudiante realiza transformaciones algebraicas y obtiene la fórmula $3x^2 + 3x - 6$.

O bien, a partir de la fórmula $3(x - 1)^2 - 12$ obtiene las raíces de la función (-1 y 3) resolviendo la ecuación, y reescribe su fórmula de forma factorizada: $f(x) = 3(x - 3)(x + 1)$.

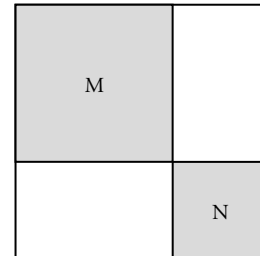
Produce la fórmula de una función cuadrática a partir de su gráfico, tomando decisiones sobre la escritura más conveniente de acuerdo con los datos que puede obtener de él.

Por ejemplo, para hallar una fórmula de la siguiente función:



El ejemplo continúa en página 51.

Continúa el problema de página 48.



Escribí una fórmula que permita calcular el área sombreada en función de la longitud de los lados del cuadrado N.

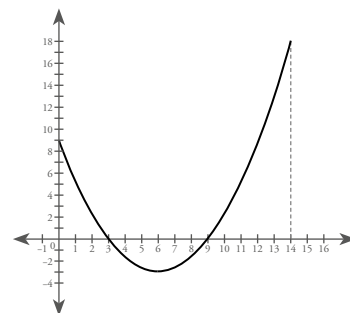
El/la estudiante llama x a la longitud de los lados del cuadrado N y produce, por ejemplo, la fórmula $x^2 + (8 - x)^2$. También podría producir la fórmula $64 - 2 \cdot x \cdot (8 - x)$, entre otras.

Reconoce que existen distintas fórmulas equivalentes que se corresponden con la misma función.

Halla el C^0 , C^+ , C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen de funciones cuadráticas en problemas situados en contextos extramatemáticos a partir de analizar su gráfico.

Por ejemplo, al resolver este problema:

A continuación se presenta el gráfico de una función cuadrática. La función describe la temperatura registrada (medida en $^{\circ}\text{C}$) entre las 0 y las 14 horas de un día de otoño en la ciudad de Río Gallegos. ¿En qué período la temperatura fue en ascenso?



El ejemplo continúa en página 52.

Produce el gráfico de funciones cuadráticas para hallar su C^0 , C^+ , C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen en problemas situados en contextos extramatemáticos, incluyendo los puntos que le permiten resolver.

Por ejemplo, al resolver este problema:

La función $f: [0; 14] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 9$ describe la temperatura registrada un día de otoño en la ciudad de Río Gallegos (medida en $^{\circ}\text{C}$). ¿En qué período la temperatura fue en ascenso?

El/la estudiante realiza un gráfico como el siguiente, en el que incluye el vértice y lo “finaliza” en el valor 14 de la variable independiente. Después de analizarlo, establece que la temperatura fue en ascenso desde las 6 de la madrugada hasta las 14 horas (o 2 de la tarde).

El ejemplo continúa en página 53.

Continúa el ejemplo de página 49.

El/la estudiante reconoce que en el gráfico se muestran las raíces y decide producir una fórmula escrita de forma factorizada. Identifica que las raíces son -3 y 6 , y plantea la fórmula: $f(x) = a(x + 3)(x - 6)$. Luego, a partir de que la ordenada al origen es -36 , plantea la ecuación $-36 = a(0 + 3)(0 - 6)$ y halla el valor de a : 2 . Para finalizar, establece que una fórmula de la función es $f(x) = 2(x + 3)(x - 6)$.

Halla el C^0 , C^+ , C^- , intervalo de crecimiento, intervalo de decrecimiento e imagen de funciones cuadráticas en problemas situados en contextos extramatemáticos a partir de anticipar las características de su gráfico.

Por ejemplo, al resolver este problema:

La función $f: [0; 14] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 9$ describe la temperatura registrada un día de otoño en la ciudad de Río Gallegos (medida en $^{\circ}\text{C}$). ¿En qué período la temperatura fue en ascenso?

El/la estudiante anticipa que el gráfico de la función será una parábola con las ramas “hacia arriba”, ya que su coeficiente principal es positivo, y que, por lo tanto, la función es creciente a partir de la coordenada x del vértice. Luego halla $x_v = 6$ y establece que la temperatura fue en ascenso desde las 6 de la madrugada hasta las 14 horas (o 2 de la tarde), pues es el extremo superior del dominio.

El ejemplo continúa en página 53.

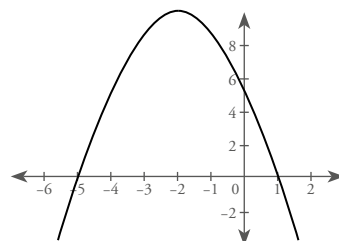
Continúa el ejemplo de página 50.

El/la estudiante reconoce que lo que debe hallar son los valores de la variable independiente (el tiempo) para los cuales la función es creciente. Con ese objetivo, halla el tiempo en el que la temperatura fue mínima, 6 horas, apoyándose en la simetría de la parábola a partir de los valores 3 y 9. Luego responde que la temperatura fue en ascenso desde las 6 hasta las 14 horas.

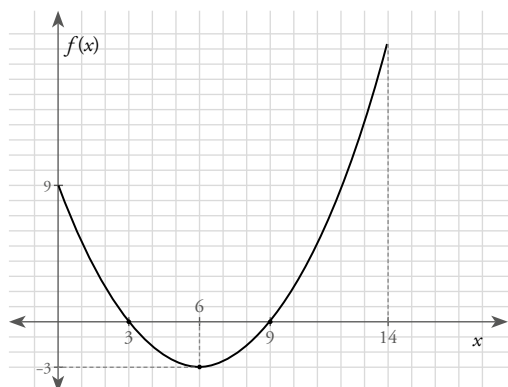
Halla el C^0 , C^+ , C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen de funciones cuadráticas a partir de analizar su gráfico y los expresa por medio de intervalos.

Por ejemplo, resuelve problemas como el siguiente y expresa el C^- como unión de intervalos.

A continuación se presenta el gráfico de una función cuadrática. Hallá su C^0 , su C^+ y su C^- .



Continúa el ejemplo de página 51.

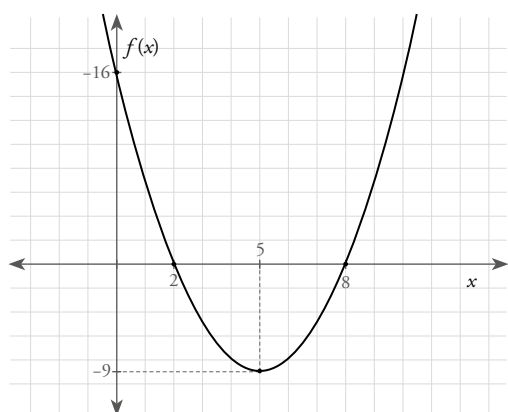


Produce el gráfico de funciones cuadráticas para hallar su C^0 , C^+ , C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen, incluyendo los puntos que le permiten resolver.

Por ejemplo, para resolver el problema:

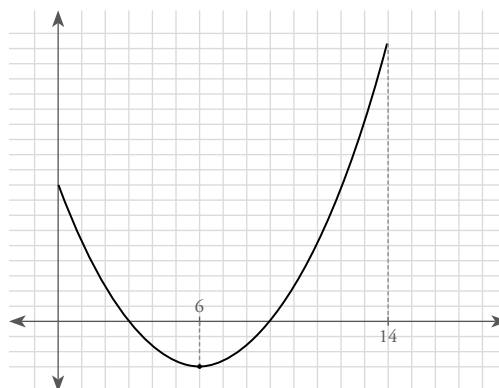
Hallá la imagen de la función
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 10x + 16$.

El/la estudiante realiza un gráfico como el siguiente, en el que incluye el vértice. Luego, a partir de analizarlo, establece que la imagen de la función es $[-9; +\infty)$.



Continúa el ejemplo de página 51.

Podría acompañar sus razonamientos realizando un gráfico a mano alzada.



Halla el C^0 , C^+ , C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen de funciones cuadráticas a partir de anticipar las características de su gráfico.

Por ejemplo, para resolver el problema:

Hallá la imagen de la función
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 10x + 16$.

El/la estudiante anticipa que el gráfico de la función será una parábola con las ramas “hacia arriba”, ya que su coeficiente principal es positivo, y que, por lo tanto, el extremo inferior de la imagen será la coordenada y del vértice. Luego halla $y_v = -9$ y establece que la imagen de la función es $[-9; +\infty)$.

Función polinómica

Luego del estudio de las funciones lineal y cuadrática, se propone analizar las funciones polinómicas de grado mayor o igual que 3 como una generalización de ellas. El análisis de sus ceros y sus conjuntos de positividad y negatividad darán sentido a las estrategias desarrolladas anteriormente.

Función polinómica

Ciclo Básico

Ciclo Orientado

Nivel I

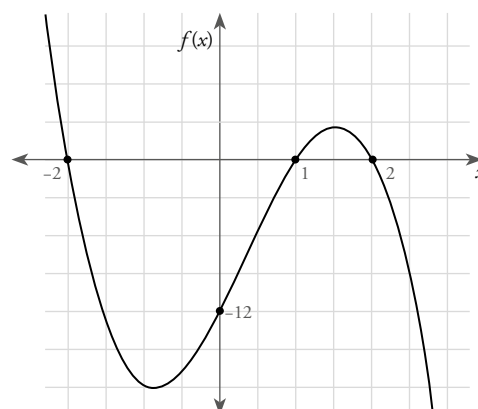
Lectura de información que se encuentra en gráficos.

Análisis de la variación de una variable en función de otra variable.

Relación entre una tabla de valores, el gráfico cartesiano y una situación.

Produce gráficos de funciones polinómicas que poseen raíces simples ubicando los puntos que representan las raíces y otros puntos en el plano cartesiano, previendo su forma y sus características.

Por ejemplo, para realizar el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = -3 \cdot (x + 2)(x - 1)(x - 2)$, el/la estudiante marca los puntos de abscisas -2 , 1 y 2 (las raíces) sobre el eje x y el punto de ordenada -12 (la ordenada al origen) sobre el eje y , y produce el siguiente gráfico, anticipando que al tratarse de una función polinómica su gráfico es “continuo” y solo “cruza” el eje x (las imágenes de la función cambian de signo) en los valores que son las raíces.



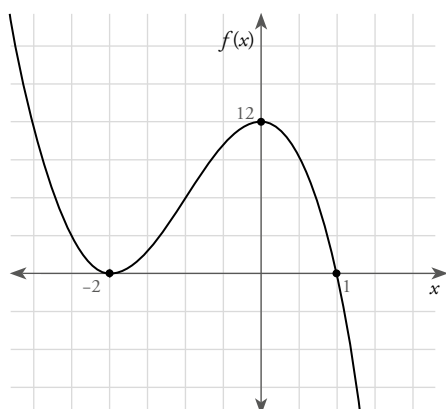
- Relaciones entre su gráfico y una fórmula.
- Factorización y análisis de la cantidad de raíces.
- Estudio de la función polinómica: raíces y su multiplicidad, conjunto de ceros, conjunto de positividad y conjunto de negatividad.

Ciclo Orientado

Nivel II

Produce gráficos de funciones polinómicas que poseen raíces de multiplicidad mayor que 1, ubicando los puntos que representan las raíces y otros puntos en el plano cartesiano, previendo su forma y sus características.

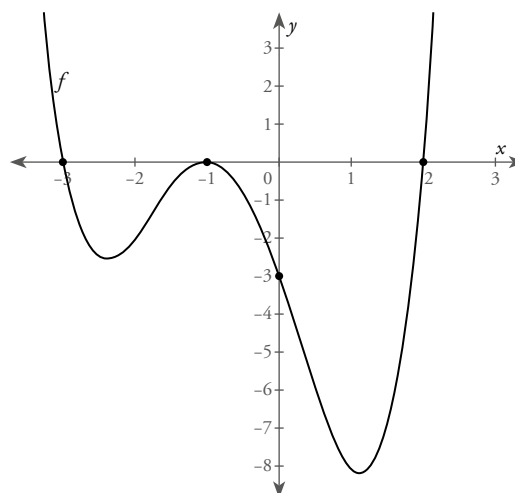
Por ejemplo, para realizar el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = -3 \cdot (x + 2)^2 (x - 1)$, el/la estudiante marca los puntos de abscisas -2 y 1 (las raíces) sobre el eje x y el punto de ordenada 12 (la ordenada al origen) sobre el eje y , y produce el siguiente gráfico, anticipando que al tratarse de una función polinómica que tiene una raíz de multiplicidad par (-2) el gráfico es continuo y “rebota” (las imágenes de la función no cambian de signo) en ese valor.



Nivel III

Produce fórmulas de funciones polinómicas a partir de un gráfico.

Por ejemplo, a partir del siguiente gráfico:



En primer lugar, el/la estudiante interpreta que -3 , -1 y 2 son las raíces de la función y que -1 es una raíz de multiplicidad par. A continuación, plantea una posible fórmula factorizada para la función con un parámetro como coeficiente principal:

$$f(x) = a(x + 3)(x + 1)^2(x - 2).$$

Luego obtiene el valor de a a partir de identificar que la ordenada al origen es -3 y plantear y resolver una ecuación:

$$-3 = a(0 + 3)(0 + 1)^2(0 - 2)$$

$$-3 = a \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-2)$$

$$-3 = -6a$$

$$\frac{-3}{-6} = a$$

$$\frac{1}{2} = a$$

En conclusión, produce la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{2} (x + 3)(x + 1)^2(x - 2)$$

Halla la expresión factorizada de fórmulas de funciones polinómicas en las que la cantidad de raíces es igual que el grado del polinomio que las define.

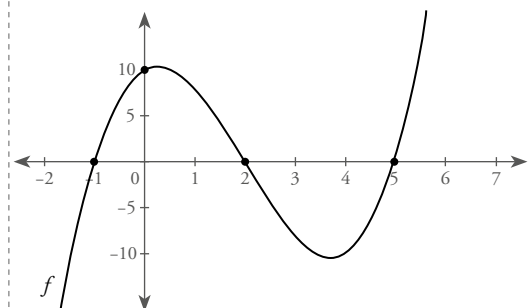
Por ejemplo, halla la expresión factorizada de la fórmula $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ a partir de determinar sus raíces aplicando el lema de Gauss y, posiblemente, el teorema del resto, acompañado con algún método de división de polinomios: $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$.

O bien, utiliza un programa graficador, identifica en el gráfico cuáles son las posibles raíces, verifica que efectivamente lo son mediante la fórmula y, por último, arma la fórmula factorizada considerando $a = 1$.

Halla el C^0 , C^+ y C^- de funciones polinómicas a partir de analizar su gráfico y los expresa por medio de intervalos o unión de intervalos.

Por ejemplo, al resolver problemas como el siguiente:

A continuación, se presenta el gráfico de una función polinómica. Hallá su conjunto de positividad.



El/la estudiante expresa el conjunto de positividad como una unión de intervalos abiertos: $C^+(f) = (-1; 2) \cup (5; +\infty)$

Nivel II

Halla la expresión factorizada de fórmulas de funciones polinómicas en las que la cantidad de raíces (contadas con su multiplicidad) es menor que el grado del polinomio que las define.

Por ejemplo, ante la fórmula $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, el/la estudiante aplica el lema de Gauss o algún programa graficador y el teorema del resto para determinar que el polinomio $x^3 - x^2 + x - 1$ es divisible por el polinomio $x - 1$. Luego realiza la división y escribe la expresión equivalente $(x - 1)(x^2 + 1)$. Para finalizar, determina que esa es la expresión factorizada porque el polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales y, por lo tanto, no es divisible por ningún otro polinomio.

Produce el gráfico de funciones polinómicas para hallar su C^0 , C^+ y C^- a partir de fórmulas factorizadas.

Por ejemplo, para resolver el problema:

Hallá el conjunto de positividad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -3(x + 1)^2(x - 2)$

El/la estudiante realiza un gráfico como el siguiente a mano o usando un programa graficador y expresa el conjunto de positividad como una unión de intervalos abiertos:

$$C^+(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2).$$

El ejemplo continúa en página 61.

Nivel III

Determina valores para los coeficientes de las fórmulas de funciones polinómicas de manera que se cumplan condiciones sobre la factorización o sobre la cantidad de raíces.

Por ejemplo, para resolver un problema como este:

Una de las raíces de la función polinómica definida por la fórmula $f(x) = x^3 - 2x^2 + kx - 2k$ es 2. Hallá, si es posible, un valor de k de manera que 2 sea una raíz doble de la función.

A partir de saber que 2 es una de las raíces del polinomio $x^3 - 2x^2 + kx - 2k$, el/la estudiante lo divide por el polinomio $x - 2$ y obtiene el cociente $x^2 + k$. Luego deduce que para que 2 sea raíz doble tiene que ser raíz del polinomio cociente, por lo que tiene que cumplir con la condición $2^2 + k = 0$. Para finalizar, resuelve la ecuación y concluye que el valor de k debe ser -4 .

Factoriza la fórmula y produce el gráfico de funciones polinómicas para hallar su C^0 , C^+ y C^- .

Por ejemplo, para resolver el problema:

Hallá el conjunto de positividad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -3x^3 + 9x + 6$

El/la estudiante obtiene la fórmula factorizada $f(x) = -3(x + 1)^2(x - 2)$ y realiza un gráfico como el siguiente para expresar el conjunto de positividad: $C^+(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$.

El ejemplo continúa en página 61.

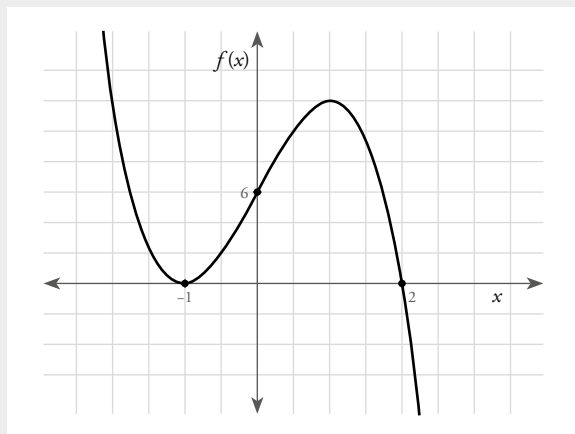


Ciclo Básico	Ciclo Orientado
	Nivel I

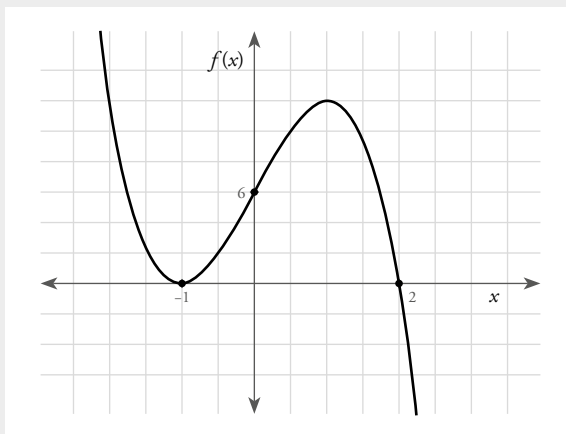
--	--



Continúa el ejemplo de página 59.



Continúa el ejemplo de página 59.



Halla el C^0 , C^+ y C^- de funciones polinómicas a partir de determinar el signo de los valores de su imagen por medio del análisis de su fórmula factorizada.

Por ejemplo, para resolver el problema:

Hallá el conjunto de positividad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -3(x+1)^2(x-2)$

En un primer momento, el/la estudiante determina que -1 y 2 son las únicas raíces de la función y que, por lo tanto, pueden ser alguno de los extremos del conjunto de positividad. Luego analiza que la expresión $(x+1)^2$ toma valores positivos para cualquier valor de la variable distinto de -1 y lo utiliza para concluir que un valor de la imagen será positivo solo si $(x-2)$ es negativo (ya que el coeficiente principal también es negativo).

$$\text{Negativo} \cdot \text{Positivo} \cdot \text{Negativo} = \text{Positivo}$$

Para finalizar, determina que $f(x) > 0$ para cualquier valor de x menor que 2 y distinto de -1 , ya que $f(-1) = 0$.

Escribe $C^+(f) = (-\infty; 1) \cup (-1; 2)$.

Función exponencial y función logarítmica

El estudio de las funciones exponencial y logarítmica resulta un ámbito interesante para trabajar sobre funciones inversas, que hasta ahora no han sido objeto de estudio. De esa manera, las propiedades de cada función pueden ponerse en relación con las de la otra, y así dotarlas de sentido.

Función exponencial

Ciclo Básico

Producción de fórmulas que calculan el paso n de un proceso que cumple cierta regularidad.

Ciclo Orientado

Nivel I

Produce fórmulas de funciones exponenciales del tipo $a \cdot b^x$ en diferentes contextos que involucran procesos de crecimiento y decrecimiento exponencial.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Silvio quiere conformar un plazo fijo en un banco con una tasa de interés de 0,1% diario.

Escribí una fórmula que permita calcular de cuánto dinero dispondrá Silvio luego de x días, sabiendo que hará un plazo fijo con un importe inicial de \$150.000.

El/la estudiante produce la fórmula
 $f(x) = 150000 \cdot (1,001)^x$

- Producción de fórmulas.
- Relaciones entre su gráfico y una fórmula.
- Estudio de la función exponencial: ceros, crecimiento, decrecimiento, conjunto imagen, positividad, negatividad, asíntota.
- Variaciones de los gráficos en función de las variaciones de las fórmulas y viceversa. Incidencia en el crecimiento y en la asíntota.
- Problemas que se modelizan mediante funciones exponenciales.
- Análisis de soluciones de ecuaciones exponenciales

Ciclo Orientado

Nivel II

Produce fórmulas de funciones exponenciales del tipo $a \cdot b^x + c$ en diferentes contextos que involucren procesos de crecimiento y decrecimiento exponencial.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Silvio quiere conformar un plazo fijo en un banco. Le informaron que la tasa de interés es de 0,1% diario y que, una vez finalizado el período, se debe abonar un costo de \$500 por la constitución del plazo fijo.

Escribí una fórmula que permita calcular de cuánto dinero dispondrá Silvio luego de x días, sabiendo que hará un plazo fijo con un importe inicial de \$150.000.

El/la estudiante produce la fórmula
 $f(x) = 150000 \cdot (1,001)^x - 500$

Produce fórmulas de funciones exponenciales a partir de un gráfico o de una tabla en los casos en los que la asíntota del gráfico es $y = 0$.

Por ejemplo, sabiendo que se trata de una función exponencial, a partir del gráfico o de la tabla que se muestra a continuación, produce la fórmula $f(x) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$, reconociendo que por cada unidad que aumentan los valores de x , los valores de las imágenes se reducen a su tercera parte.

El ejemplo continúa en página 67.

Nivel III

Dada una fórmula, interpreta qué significa cada parámetro en el contexto de un problema.

Por ejemplo, para resolver este problema:

En un negocio de compra y venta de autos usados usan la siguiente fórmula para calcular los valores de venta de los autos dependiendo de su precio actual siendo 0 km y de sus años de antigüedad.

$$f(x) = a(0,95)^x$$

- ¿Cuál es el precio de venta de un auto cuyo valor actual nuevo es de \$750.000 y que tiene 3 años y medio de antigüedad?
- ¿En qué porcentaje disminuye el precio de un auto por cada año de antigüedad?

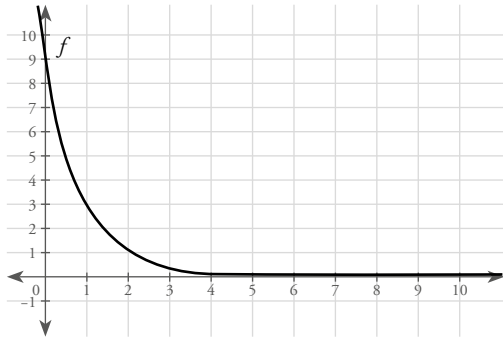
En el ítem a), el/la estudiante interpreta que el coeficiente a es el valor del auto 0 km y lo reemplaza en la fórmula. Luego evalúa la función en $x = 3,5$ para hallar el valor del auto usado.

Para responder el ítem b), interpreta que el valor 0,95 indica que por cada año que pasa el precio del auto se mantiene en un 95% con respecto al precio del año anterior. Concluye que por cada año que pasa el precio del auto disminuye un 5%.

Ciclo Básico	<i>Ciclo Orientado</i>
	Nivel I

--	--

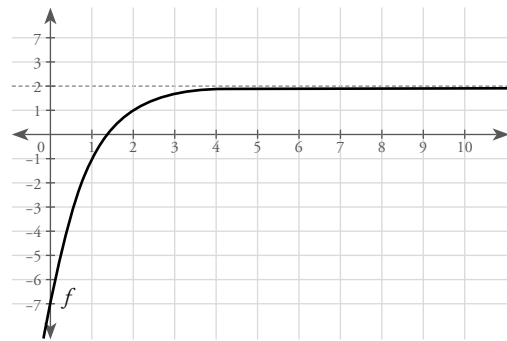
Continúa el ejemplo de página 65.



x	0	1	2	3
$f(x)$	9	3	1	$\frac{1}{3}$

Produce fórmulas de funciones exponenciales a partir de un gráfico o de una tabla en los casos en los que la asíntota del gráfico no es $y = 0$.

Por ejemplo, a partir del siguiente gráfico:



En primer lugar, el/la estudiante interpreta que la ecuación de la asíntota es $y = 2$ y plantea la fórmula genérica de una función exponencial con ese valor del coeficiente correspondiente: $f(x) = a \cdot b^x + 2$.

Luego obtiene el valor de a a partir de identificar que la ordenada al origen es -7 y plantear y resolver una ecuación:

$$-7 = a \cdot b^0 + 2$$

$$-7 = a \cdot 1 + 2$$

$$-7 - 2 = a$$

$$-9 = a$$

Por último, para obtener el valor del coeficiente de la base, identifica que el punto $(2; 1)$ pertenece al gráfico de la función y plantea una ecuación utilizando sus coordenadas.

$$1 = -9 \cdot b^2 + 2$$

$$1 - 2 = -9 \cdot b^2$$

$$\frac{-1}{-9} = b^2$$

$$\frac{1}{9} = b^2$$

$$\frac{1}{3} = b$$

Descarta la solución negativa de la ecuación porque reconoce que la base de una función exponencial tiene que ser positiva.

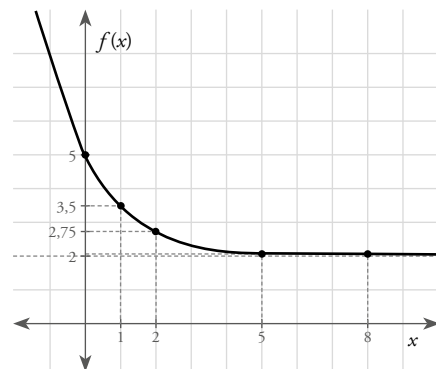


Relación entre una fórmula, una tabla de valores, el gráfico cartesiano y una situación.

Produce gráficos de funciones exponenciales ubicando puntos en el plano cartesiano a partir de valores relacionados de las variables, previendo su forma y sus características

Por ejemplo, para realizar el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, el/la estudiante produce la siguiente tabla y el siguiente gráfico, anticipando que al tratarse del gráfico de una función exponencial es siempre creciente o decreciente y posee una asíntota. En consecuencia, realiza una exploración controlada utilizando valores de x “grandes”, sabiendo que los puntos correspondientes son los que se aproximan a la asíntota.

x	$f(x)$
0	5
1	3,5
2	2,75
5	2,09375
8	2,0117...

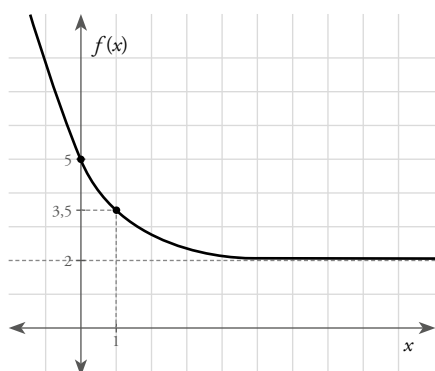


Nivel II

Produce gráficos de funciones exponenciales trazando su asíntota y ubicando puntos que le permitan deducir si es creciente o decreciente.

Por ejemplo, para realizar el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, el/la estudiante determina en primer lugar que su asíntota es la recta $y = 2$. Luego halla la ordenada al origen (5) y la imagen de otro valor del dominio: $f(1) = 3,5$.

Para finalizar, marca esos puntos y la asíntota como referencia y, determinando que la función es decreciente, traza su gráfico. También puede suceder que obtenga más puntos que pertenecen al gráfico y los utilice para realizarlo con mayor precisión y/o asegurarse de sus conclusiones.

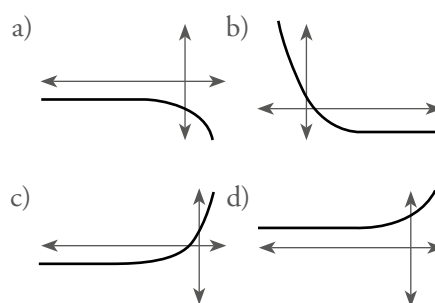


Nivel III

Reconoce e interpreta la relación entre los valores de los parámetros de la fórmula de una función exponencial y su gráfico.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

Identificá cuál de los siguientes gráficos podría ser el de la función definida por la fórmula $f(x) = -2 \cdot 3^x - 1$



El/la estudiante reconoce que la recta $y = -1$ es la asíntota del gráfico de la función, lo que le permite descartar el gráfico d). Luego, considerando que la base es mayor que 1, establece que los valores de 3^x van aumentando y que, por lo tanto, también van aumentando los valores absolutos de las imágenes de la función, lo que le permite descartar el gráfico b). Sobre esta conclusión y analizando que el coeficiente -2 es negativo, determina que la función es decreciente, lo que le permite descartar el gráfico c).

Para finalizar, afirma que el único gráfico que podría ser el de la función es el a), porque tiene las características que se pueden anticipar a partir del análisis de la fórmula.

$$f(x) = -2 \cdot 3^x - 1$$

Asíntota $y = -1$

Valores que van aumentando

Valores que disminuyen pero aumenta su valor absoluto

Resolución algebraica de ecuaciones lineales.

Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot b^x + c = k$ sin anticipar la existencia o cantidad de soluciones en los casos en que, si existe, la solución es un número entero.

Por ejemplo, frente a la ecuación $-2 \cdot 3^x + 5 = 7$, el/la estudiante inicia el proceso de resolución de la siguiente manera:

$$-2 \cdot 3^x = 7 - 5$$

$$3^x = \frac{2}{-2}$$

$$3^x = -1$$

para afirmar que no hay solución porque una potencia de 3 no puede ser negativa.

O bien, resuelve una ecuación como la siguiente:

$$-2 \cdot 3^x + 5 = -1$$

$$-2 \cdot 3^x = -1 - 5$$

$$3^x = \frac{-6}{-2}$$

$$3^x = 3$$

$$S = \{1\}$$

Nivel II

Anticipa la existencia de soluciones de una ecuación del tipo $a \cdot b^x + c = k$.

Por ejemplo, frente a la ecuación $-2 \cdot 3^x + 5 = 7$, el/la estudiante afirma que no tiene solución porque $-2 \cdot 3^x$ es negativo y, por lo tanto, al sumarle 5 el resultado será menor que 5.

Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot b^x + c = k$ utilizando logaritmos, cuando la ecuación así lo requiera.

Por ejemplo, resuelve una ecuación como la siguiente:

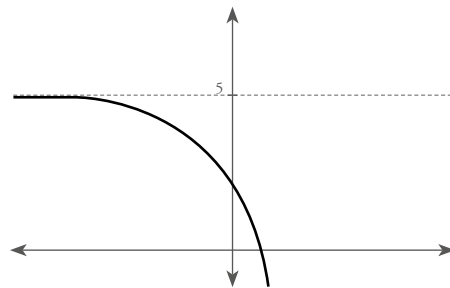
$$\begin{aligned} 3 \cdot 8^x - 2 &= 10 \\ 3 \cdot 8^x &= 12 \\ 8^x &= \frac{12}{3} \\ 8^x &= 4 \\ x &= \log_8 4 \\ S &= \left\{ \frac{2}{3} \right\} \end{aligned}$$

Nivel III

Determina los valores de k para los cuales las ecuaciones del tipo $a \cdot b^x + c = k$ tienen o no tienen solución.

Por ejemplo, frente a la ecuación $-2 \cdot 3^x + 5 = k$, el/la estudiante afirma que no tiene solución si el valor de k es mayor o igual que 5 porque $-2 \cdot 3^x$ es negativo para todo valor de x y, por lo tanto, al sumarle 5, el resultado será siempre menor que 5.

También afirma que tiene solución única para cualquier valor de k menor que 5 a partir de interpretar la expresión $-2 \cdot 3^x + 5$ como la fórmula de una función y a k como un posible valor de la imagen. Al considerar y analizar el gráfico de la función determina que su imagen es $(-\infty; 5)$ y que, por lo tanto, para cualquier valor de k perteneciente a ese intervalo existe un único valor de x que lo tiene como imagen. A su vez, concluye que la ecuación no tiene solución para cualquier valor de k que no pertenezca a ese intervalo, debido a que no existe un valor de x que lo tenga como imagen.



Resuelve ecuaciones utilizando propiedades de las potencias de igual base.

Por ejemplo, en una resolución como la siguiente:

$$\begin{aligned} 4^x + 3 \cdot 2^{2x} &= 16 \\ 4^x + 3 \cdot (2^2)^x &= 16 \\ 4^x + 3 \cdot 4^x &= 16 \\ 4 \cdot 4^x &= 16 \\ 4^{x+1} &= 16 \\ x + 1 &= 2 \\ S &= \{1\} \end{aligned}$$

Relación entre una fórmula, una tabla de valores, el gráfico cartesiano y una situación.

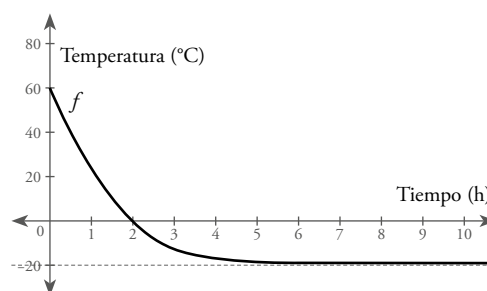
Relación entre la solución algebraica y la gráfica de una ecuación o inecuación.

Problemas que se modelizan con ecuaciones o inecuaciones.

Halla el C^0 , C^+ y C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen de funciones exponenciales en problemas situados en contextos extramatemáticos a partir de analizar su gráfico.

Por ejemplo, al resolver este problema:

A continuación, se presenta el gráfico de una función exponencial. La función describe la temperatura de un postre helado desde el momento en que fue puesto en un congelador luego de ser preparado. ¿Es cierto que la temperatura nunca es de -20°C ?



El/la estudiante reconoce que el gráfico de la función posee una asíntota de ecuación $y = -20$ y lo interpreta como el valor al cual se aproximan los valores de las temperaturas, debido a que es el extremo del intervalo imagen. Luego responde que es cierto que la temperatura nunca alcanza los -20°C , porque ese valor no pertenece a la imagen de la función.

Halla el C^0 , C^+ y C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen de funciones exponenciales a partir del análisis de su gráfico, y los expresa por medio de intervalos.

Por ejemplo, resuelve problemas como el siguiente y expresa la imagen como un intervalo abierto, interpretando el significado de la asíntota.

El ejemplo continúa en página 74.

Nivel II

Produce el gráfico de funciones exponenciales para hallar su C^0 , C^+ y C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen en problemas situados en contextos extramatemáticos, incluyendo los elementos que le permiten resolver.

Por ejemplo, para resolver este problema:

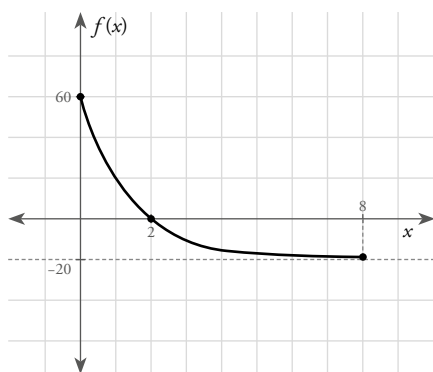
La función

$$f: [0; 8] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 20$$

describe la temperatura de un postre helado (medida en $^{\circ}\text{C}$) en función del tiempo que transcurre (medido en horas) desde el momento en que fue puesto en un congelador luego de ser preparado hasta el momento en que fue retirado.

- ¿En qué intervalo el postre estuvo congelado?
- ¿Es cierto que al ser retirado su temperatura era mayor a -20°C ?

El/la estudiante realiza un gráfico como el siguiente, en el que incluye el punto de intersección con el eje x y la asíntota, y lo “finaliza” en el valor 8 de la variable independiente. Luego de analizarlo, resuelve el ítem a) estableciendo que el postre estuvo congelado entre las 2 y las 8 horas luego de haber sido puesto en el congelador porque en ese intervalo la función (la temperatura) es negativa.



El ejemplo continúa en página 75.

Nivel III

Halla el C^0 , C^+ y C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen de funciones exponenciales en problemas situados en contextos extramatemáticos a partir de anticipar las características de su gráfico.

Por ejemplo, para resolver este problema:

La función

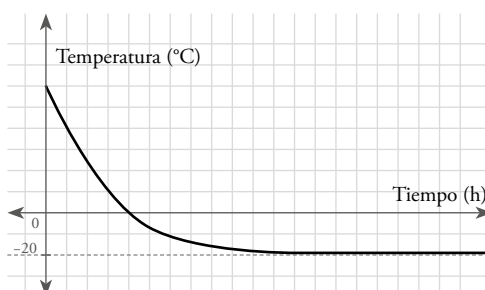
$$f: [0; 8] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 20$$

describe la temperatura de un postre helado (medida en $^{\circ}\text{C}$) en función del tiempo que transcurre (medido en horas) desde el momento en que fue puesto en un congelador luego de ser preparado hasta el momento en que fue retirado.

¿Es cierto que al ser retirado su temperatura era mayor que -20°C ?

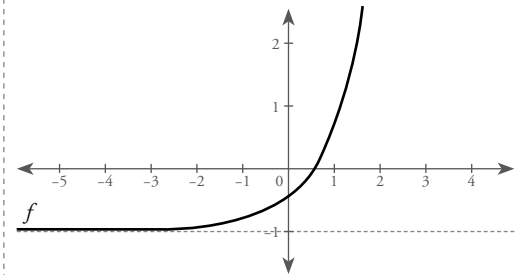
A partir de analizar los coeficientes de la fórmula de la función, el/la estudiante anticipa que su gráfico tendrá una asíntota horizontal de ecuación $y = -20$, que la función será decreciente y que se ubicará por “encima” de la asíntota. Luego interpreta esta característica en el contexto del problema y establece que la temperatura del postre siempre es mayor que -20°C , lo que utiliza para responder de manera afirmativa a la pregunta.

Podría acompañar sus razonamientos realizando un gráfico a mano alzada.



Continúa el ejemplo de página 72.

A continuación, se presenta el gráfico de una función exponencial. Hallá su imagen.



Continúa el ejemplo de página 73.

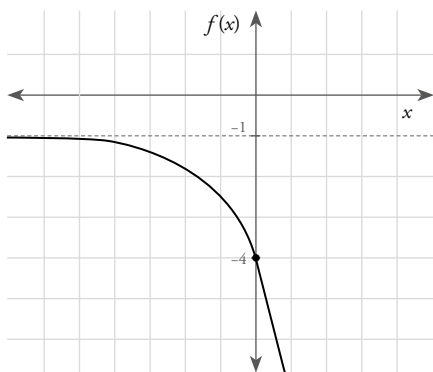
Para resolver el ítem b), reconoce que, en una función exponencial como esta, los valores de la imagen son siempre mayores que -20 , debido a que la ecuación de la asíntota es $y = -20$. Luego interpreta esta propiedad en el contexto y afirma que la temperatura del postre siempre fue mayor que -20 °C.

Produce el gráfico de funciones exponenciales para hallar su C^0 , C^+ y C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen, incluyendo los elementos que le permiten resolver.

Por ejemplo, para resolver el problema:

Hallá la imagen de la función
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -3 \cdot 2^x - 1$

El/la estudiante realiza un gráfico como el siguiente, en el que incluye la asíntota y un punto que le permite identificar que la función es decreciente. Luego de analizarlo, establece que la imagen de la función es $(-\infty; -1)$.



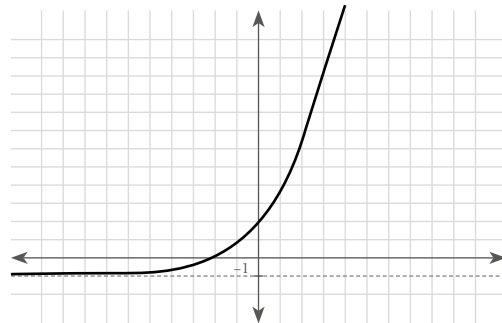
Halla el C^0 , C^+ y C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen de funciones exponenciales a partir de anticipar las características de su gráfico.

Por ejemplo, para resolver el problema:

Hallá la imagen de la función
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 3 \cdot 2^x - 1$

Luego de analizar los coeficientes de la fórmula, el/la estudiante anticipa que el gráfico de la función tendrá una asíntota horizontal de ecuación $y = -1$, que la función será creciente y que se ubicará por “encima” de la asíntota. Luego, establece que la imagen de la función es $(-1; +\infty)$.

Podría acompañar su razonamiento con un gráfico a mano alzada.



Función logarítmica

Ciclo Básico

Ciclo Orientado

Nivel I

Utiliza logaritmos para hallar preimágenes de funciones exponenciales en problemas situados en contextos intra- y extramatemáticos.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Silvio conformará un plazo fijo de \$150.000 en un banco. La fórmula de una función $f(x) = 150000 \cdot (1,03)^x$ permite calcular cuánto dinero le devolverá el banco para un plazo fijo de x meses. ¿De cuántos meses debe ser el plazo fijo para que obtenga una renta de \$30.000?

En primer lugar, el/la estudiante establece que, para que la renta sea de \$30.000, a los x meses Silvio debe recibir \$180.000. Luego plantea la ecuación y la resuelve utilizando logaritmos.

$$180000 = 150000 \cdot (1,03)^x$$

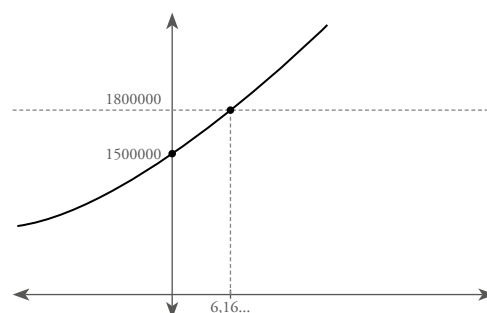
$$\frac{180000}{150000} = (1,03)^x$$

$$1,2 = (1,03)^x$$

$$x = \log_{1,03} 1,2$$

$$x = 6,16...$$

Para finalizar, responde que, como mínimo, el plazo fijo debe ser de 7 meses, analizando que la función es creciente.



- Relación entre su gráfico y una fórmula. La función logarítmica como la inversa de la función exponencial.
- Estudio de la función logarítmica: ceros, crecimiento, decrecimiento, conjunto imagen, positividad, negatividad, asíntota.
- Variaciones de los gráficos en función de las variaciones de las fórmulas y viceversa. Incidencia en el crecimiento y en la asíntota.
- Problemas que se modelizan mediante funciones logarítmicas.
- Análisis de soluciones de ecuaciones logarítmicas.

Ciclo Orientado

Nivel II

Halla la función logarítmica inversa de una función exponencial en problemas situados en contextos intra- y extramatemáticos.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Si un cierto día, la temperatura es de 28° , la sensación térmica se puede determinar en función del porcentaje de humedad, y se calcula con la siguiente fórmula:

$$f(x) = 22,86 \cdot (1,004)^x$$

Hallá la fórmula de una función que calcule el porcentaje de humedad en función de la sensación térmica.

El/la estudiante halla la fórmula

$$f^{-1}(x) = \log_{1,004} \left(\frac{x}{22,86} \right)$$

O bien, en el siguiente problema:

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3 \cdot 2^x + 1$:

- redefiní su codominio para que exista la función inversa;
- definí la función inversa.

Para el ítem a), el/la estudiante reconoce que la imagen de la función f es $(1; +\infty)$ y redefine el codominio en consecuencia.

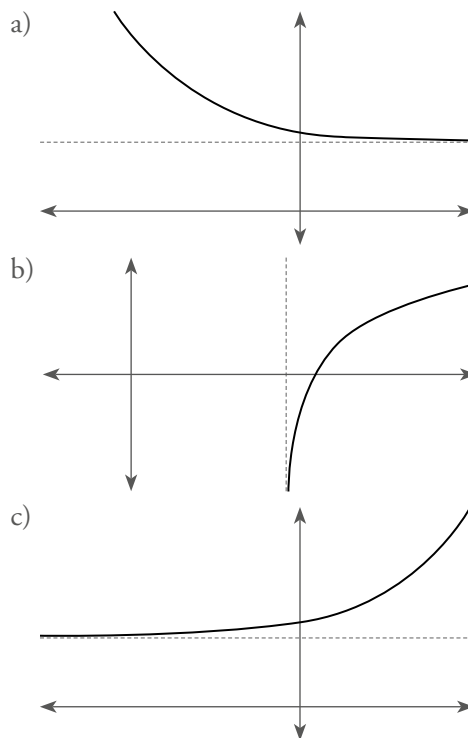
El ejemplo continúa en página 79.

Nivel III

Reconoce funciones exponenciales y logarítmicas inversas a partir de analizar sus gráficos y/o sus fórmulas.

Por ejemplo, al resolver el siguiente problema:

A partir de los siguientes gráficos de funciones exponenciales y logarítmicas, identificá cuáles pueden corresponder a funciones inversas.



El/la estudiante reconoce que tanto el par conformado por los gráficos a) y b) como el conformado por los b) y c) pueden corresponder a funciones inversas, debido a que en cada uno el dominio y la imagen de una de las funciones se corresponden con la imagen y el dominio de la otra, respectivamente.

El ejemplo continúa en página 79.

Relación entre una fórmula, una tabla de valores, el gráfico cartesiano y una situación.

Produce gráficos de funciones logarítmicas ubicando puntos en el plano cartesiano a partir de valores relacionados de las variables, previendo su forma y sus características.

Por ejemplo, para realizar el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = \log_2(x - 3) + 1$, el/la estudiante produce la siguiente tabla y el siguiente gráfico, anticipando que al tratarse del gráfico de una función logarítmica es siempre creciente o decreciente y posee una asíntota vertical. En consecuencia, realiza una exploración controlada utilizando valores de x para que el valor dentro del paréntesis sea cercano a cero, sabiendo que esos puntos son los que se aproximan a la asíntota.

x	$f(x)$
3,1	-2,3219...
3,2	-1,3219...
4	1
5	2

El ejemplo continúa en página 80.

Nivel II

Continúa el ejemplo de página 77.

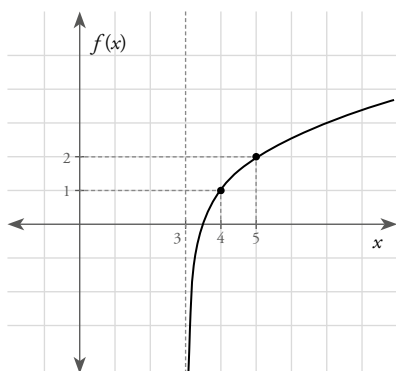
Para resolver el ítem b), en primer lugar halla la fórmula de la función inversa despejando x en función de $y = f(x)$. Luego define la función reconociendo que la imagen y el dominio de la función exponencial son el dominio y la imagen de la función logarítmica, respectivamente:

$$f^{-1}: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{x-1}{3}\right)$$

Produce gráficos de funciones logarítmicas ubicando su asíntota y los puntos que le permiten deducir su monotonía.

Por ejemplo, para realizar el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = \log_2(x - 3) + 1$, el/la estudiante determina en primer lugar que su asíntota es la recta $x = 3$. Luego halla la imagen del valor del dominio para el que el argumento del logaritmo es 1, $f(4) = 1$; y la imagen de otro valor del dominio, $f(5) = 2$.

Para finalizar, marca esos puntos y la asíntota como referencia y, determinando que la función es creciente, traza su gráfico. También puede suceder que obtenga más puntos que pertenecen al gráfico y los utilice para realizarlo con mayor precisión y/o asegurarse de sus conclusiones.



Nivel III

Continúa el ejemplo de página 77.

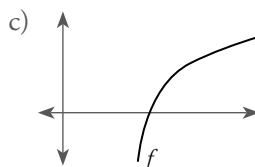
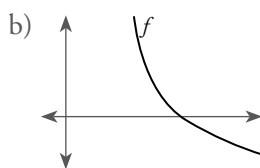
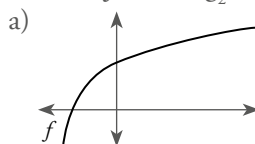
Sin embargo, analiza que en el caso a) el gráfico de la función se aproxima a la asíntota en valores positivos del dominio, mientras que en el caso b) el gráfico se aproxima a la asíntota en valores negativos de la imagen, motivo por el que una función no puede ser la inversa de la otra.

Al analizar de manera análoga el par de casos b) y c), establece que para este par sí es posible que una de las funciones sea la inversa de la otra.

Reconoce e interpreta la relación entre los valores de los parámetros de la fórmula de una función logarítmica y su gráfico.

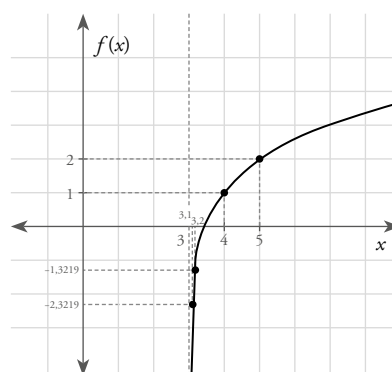
Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

Identificá cuál de los siguientes gráficos podría ser el de la función definida por la fórmula $f(x) = \log_2(x - 3) + 1$.



El ejemplo continúa en página 81.

Continúa el ejemplo de página 78.



Resolución algebraica de ecuaciones lineales.

Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot \log_b(x) + c = k$ con $b > 0$ y $b \neq 1$.

Por ejemplo, resuelve una ecuación como la siguiente:

$$2 \cdot \log_3(x) + 5 = 3$$

$$2 \cdot \log_3(x) = 3 - 5$$

$$2 \cdot \log_3(x) = -2$$

$$\log_3(x) = -1$$

$$x = 3^{-1}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

Continúa el ejemplo de página 79.

El/la estudiante reconoce que la recta $x = 3$ es la asíntota del gráfico de la función, lo que le permite descartar el gráfico a), en el que la asíntota es de la forma $x = k$, con $k < 0$. Luego, a partir de que la base es mayor que 1, establece que la función es creciente, lo que le permite descartar el gráfico b).

Para finalizar, afirma que el único gráfico que podría ser el de la función es el c), porque tiene las características que se pueden anticipar a partir del análisis de la fórmula.

$$f(x) = \log_2(x - 3) + 1$$

Base mayor que 1
función creciente

Asíntota $x = 3$

Resuelve ecuaciones logarítmicas en las que el argumento del logaritmo es una función $g(x)$ y no es necesario hacer un análisis de su dominio.

Por ejemplo, resuelve una ecuación como la siguiente:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3(-2x + 1) + 5 &= 3 \\ 2 \cdot \log_3(-2x + 1) &= 3 - 5 \\ \log_3(-2x + 1) &= \frac{-2}{2} \\ \log_3(-2x + 1) &= -1 \\ -2x + 1 &= 3^{-1} \\ -2x &= \frac{1}{3} - 1 \\ x &= -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ S &= \left\{\frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

O bien, resuelve una ecuación como:

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - 1) &= 3 \\ x^2 - 1 &= 2^3 \\ x^2 - 1 &= 8 \\ x^2 &= 9 \\ S &= \{-3; 3\} \end{aligned}$$

Resuelve ecuaciones logarítmicas utilizando propiedades de los argumentos y de las bases, lo que requiere determinar el dominio de la ecuación.

Por ejemplo, en una resolución como la siguiente:

$$\begin{aligned} \log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) &= 3 \\ \log_2((x - 1)(x + 1)) &= 3 \\ \log_2(x^2 - 1) &= 3 \\ x^2 - 1 &= 2^3 \\ x^2 &= 8 + 1 \\ x^2 &= 9 \\ x &= -3 \text{ ó } x = 3 \end{aligned}$$

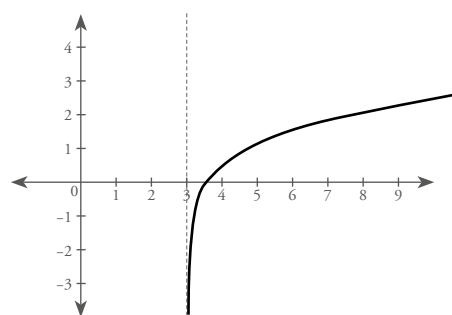
El/la estudiante determina que $S = \{3\}$, debido a que -3 no es solución de la ecuación porque no pertenece a su dominio. Podría llegar a esta conclusión intentando verificar los valores hallados, reemplazándolos en la ecuación.



Halla el dominio, C^0 , C^+ , C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen de funciones logarítmicas a partir de analizar su gráfico y los expresa por medio de intervalos.

Por ejemplo, resuelve problemas como el siguiente y expresa el dominio como un intervalo abierto, interpretando el significado de la asíntota.

A continuación, se presenta el gráfico de una función logarítmica. Hallá su dominio.



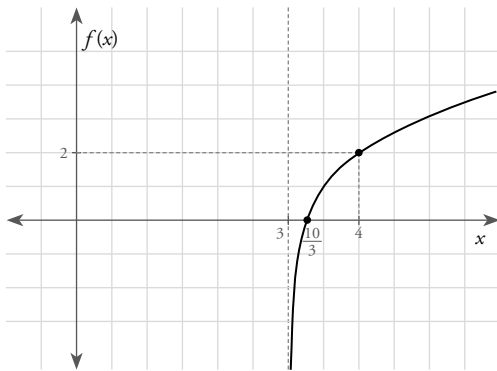
Nivel II

Produce el gráfico de funciones logarítmicas para hallar su dominio, C^0 , C^+ , C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen.

Por ejemplo, para resolver el problema:

Hallá el C^+ de la función definida por la fórmula $f(x) = 2 \cdot \log_3 (x - 3) + 2$.

El/la estudiante realiza un gráfico como el siguiente, en el que incluye la asíntota, la raíz y un punto que le permite identificar que la función es creciente. Luego, a partir de analizarlo, establece que $C^+(f) = (\frac{10}{3}; +\infty)$.



Halla el dominio de funciones logarítmicas de manera algebraica a partir de su fórmula.

Por ejemplo, para hallar el dominio de la función definida por la fórmula

$$f(x) = 2 \cdot \log_3 (3 - 2x) + 2$$

plantea y resuelve la inecuación $3 - 2x > 0$.

Nivel III

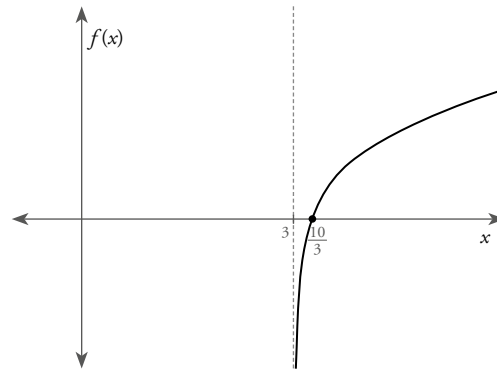
Halla el dominio, C^0 , C^+ , C^- , intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento e imagen de funciones logarítmicas a partir de anticipar las características de su gráfico.

Por ejemplo, para resolver el problema:

Hallá el C^+ de la función definida por la fórmula $f(x) = 2 \cdot \log_3 (x - 3) + 2$.

Luego de analizar los coeficientes de la fórmula, el/la estudiante anticipa que el gráfico de la función tendrá una asíntota vertical de ecuación $x = 3$, que la función será creciente y que el gráfico se ubicará "a la derecha" de la asíntota. Luego, deduce que el C^+ estará conformado por los valores de x mayores al valor de la raíz. Para finalizar, halla la raíz $(\frac{10}{3})$ y establece que $C^+(f) = (\frac{10}{3}; +\infty)$.

Podría acompañar su razonamiento con un gráfico a mano alzada.



Función trigonométrica

En este apartado se propone una progresión para el aprendizaje de las funciones trigonométricas, para la que solo hemos considerado el seno, pero que también sirve para el coseno. No hemos presentado grillas para otras funciones trigonométricas, porque entendemos que siguen los mismos criterios.

Tampoco se tuvieron en cuenta funciones con corrimientos horizontales ni equivalencias por corrimientos horizontales entre fórmulas, una que involucra el seno y otra, el coseno.

Respecto del uso de la calculadora, es importante señalar que, si bien es una herramienta central para el trabajo con las funciones trigonométricas, ya que permite explorar, hallar imágenes y preimágenes, hay cierta tarea en la que no resulta conveniente permitir su uso. Los problemas que tienen por objetivo analizar las imágenes, preimágenes, periodicidad y simetría de una función trigonométrica para distintos ángulos a partir de la circunferencia trigonométrica o el gráfico de la función permiten hallar, explicitar y validar relaciones que de otro modo pueden perderse. En este sentido, es fundamental decidir en qué casos conviene o no habilitar su uso.

Función trigonométrica

Ciclo Básico

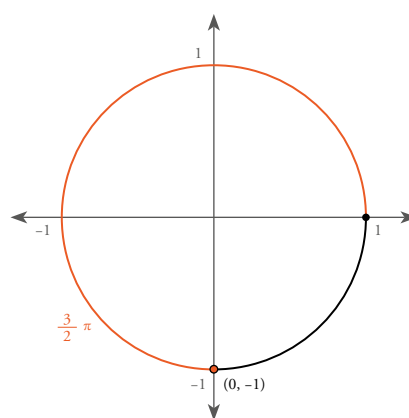
Ciclo Orientado

Nivel I

Utiliza radianes para expresar la medida de ángulos y reconoce su equivalencia con el sistema sexagesimal.

Halla imágenes de funciones trigonométricas de manera exacta para ángulos cuya medida es un “múltiplo” de $\frac{\pi}{2}$, y determina el signo para el resto de los ángulos, mediante el empleo de la circunferencia trigonométrica.

Por ejemplo, halla el valor de $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ identificando la segunda coordenada del punto $(0; -1)$ sobre la circunferencia trigonométrica.



O bien, ante una pregunta como la siguiente:

¿Es cierto que $\sin(4)$ es negativo?

El/la estudiante establece que 4 es mayor que π y menor que 2π y, a partir de esta relación, ubica un punto que lo represente de manera aproximada sobre la circunferencia trigonométrica. Luego responde que es cierto porque el punto que lo representa tiene su segunda coordenada negativa.

El ejemplo continúa en página 88.

- La circunferencia trigonométrica, simetría y periodicidad. Distintas formas y sistemas para medir ángulos.
- Relaciones entre gráficos y fórmulas.
- Estudio de las funciones trigonométricas: ceros, positividad, negatividad, conjunto imagen, máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento, conjunto imagen.
- Variaciones de los gráficos en función de las variaciones de las fórmulas y viceversa. Estudio de las variaciones de la amplitud y del periodo.
- Problemas que se modelizan mediante funciones trigonométricas.
- Análisis de soluciones de ecuaciones trigonométricas.

Ciclo Orientado

Nivel II

Reconoce que los ángulos que están representados por el mismo punto de la circunferencia trigonométrica tienen el mismo seno y el mismo coseno.

Por ejemplo, al resolver un problema como el siguiente:

Hallá un valor de x entre 6π y 8π para el cual $\text{sen}(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

El/la estudiante reconoce que al sumarle 2π a $\frac{\pi}{6}$ obtiene la medida de un ángulo que está representado por el mismo punto sobre la circunferencia trigonométrica y que, por lo tanto, tiene el mismo valor del seno. Entonces, para obtener la medida de un ángulo entre 6π y 8π que tenga el mismo seno, le suma 2π tres veces a $\frac{\pi}{6}$ y obtiene $\frac{37}{6}\pi$. También podría reconocer que 6π es un múltiplo 2π , por lo que el punto que representa el ángulo de medida $6\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{37}{6}\pi$ es el mismo que el que representa al de medida $\frac{\pi}{6}$. Concluye entonces que los senos de ambos ángulos son iguales.

Halla preimágenes de funciones trigonométricas para los valores $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1$ y -1 en el intervalo $[0; 2\pi]$, considerando la simetría y apoyándose en la circunferencia trigonométrica.

Por ejemplo, ante la consigna:

Hallá todos los valores de x entre 0 y 2π para los cuales $\text{sen}(x) = \frac{1}{2}$.

El ejemplo continúa en página 89.

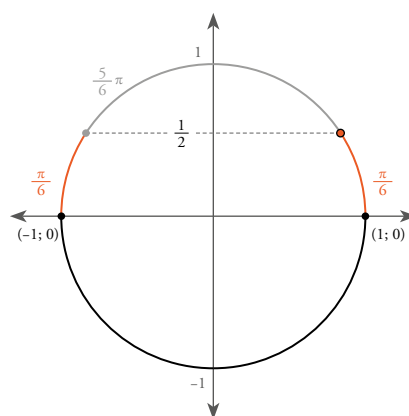
Nivel III

Halla imágenes de funciones trigonométricas de manera exacta para ángulos de medida

$$\begin{aligned} \pi - \alpha + 2\pi \cdot k \\ \pi + \alpha + 2\pi \cdot k \\ 2\pi - \alpha + 2\pi \cdot k \end{aligned}$$

a partir de la medida $\alpha \in [0; 2\pi]$ de un ángulo, apelando a cuestiones de simetría y periodicidad y apoyándose en la circunferencia trigonométrica.

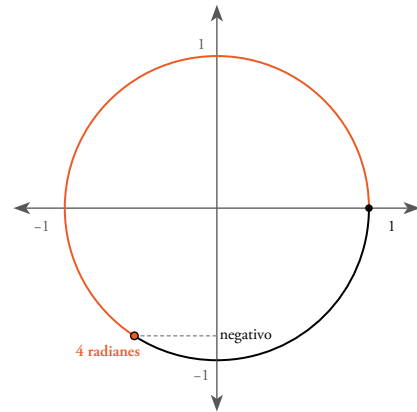
Por ejemplo, para hallar el valor de $\text{sen}\left(\frac{17}{6}\pi\right)$ el/la estudiante reconoce en un primer momento que $2\pi < \frac{17}{6}\pi < 4\pi$ y que, por lo tanto, ese ángulo es periódico a $\frac{17}{6}\pi - 2\pi = \frac{5}{6}\pi$. Luego ubica el punto que lo representa sobre la circunferencia trigonométrica y reconoce que es simétrico del punto que representa $\frac{\pi}{6}$ (con respecto al eje de ordenadas) porque se puede obtener “volviendo” una longitud de arco $\frac{\pi}{6}$ desde el punto $(-1; 0)$ (que es simétrico del punto $(1; 0)$).



Luego de analizar que ambos puntos tienen el mismo valor de su segunda coordenada, determina que $\text{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

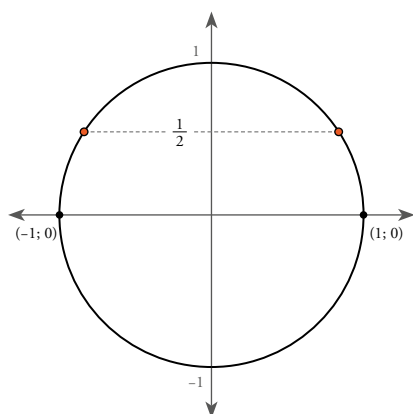
La fila continúa en página 89.

Continúa el ejemplo de página 86.

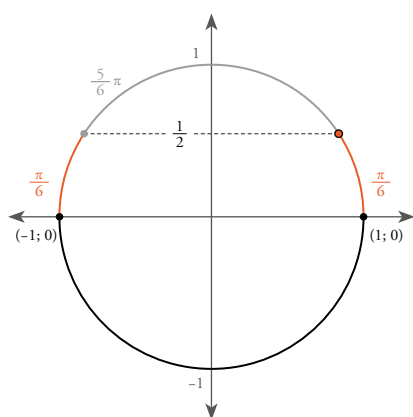


Continúa el ejemplo de página 87.

En primer lugar, el/la estudiante marca sobre la circunferencia trigonométrica los dos puntos cuya segunda coordenada es $\frac{1}{2}$.



Luego determina que la longitud de arco que representa el punto que se encuentra en el primer cuadrante es $\frac{\pi}{6}$. Para el que se encuentra en el segundo cuadrante establece que la longitud del arco que representa es $\frac{5}{6}\pi$, debido a que se puede obtener “volviendo” una longitud de arco $\frac{\pi}{6}$ desde el punto $(-1; 0)$ (que es simétrico del punto $(1; 0)$).



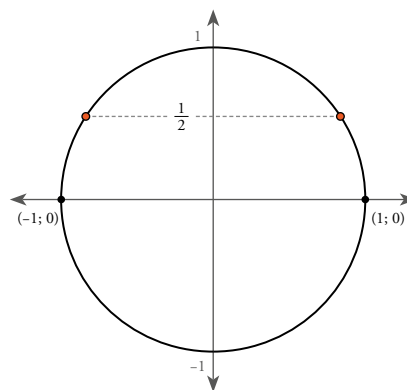
Continúa la fila de página 87.

Halla preimágenes de funciones trigonométricas para los valores $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1$ y -1 , considerando la periodicidad y la simetría, apoyándose en la circunferencia trigonométrica.

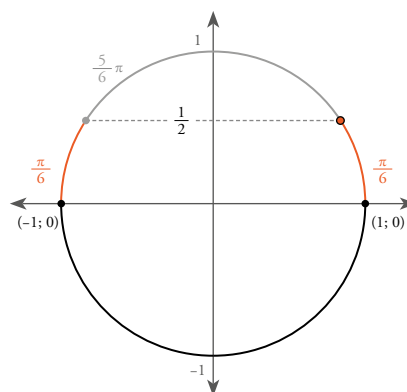
Por ejemplo, ante la consigna:

Hallá todos los valores de x para los cuales $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

En primer lugar, el/la estudiante marca sobre la circunferencia trigonométrica los dos puntos cuya segunda coordenada es $\frac{1}{2}$.



Luego determina que la longitud de arco que representa el punto que se encuentra en el primer cuadrante es $\frac{\pi}{6}$. Para el que se encuentra en el segundo cuadrante establece que la longitud del arco que representa es $\frac{5}{6}\pi$, debido a que se puede obtener “volviendo” una longitud de arco $\frac{\pi}{6}$ desde el punto $(-1; 0)$ (que es simétrico del punto $(1; 0)$).



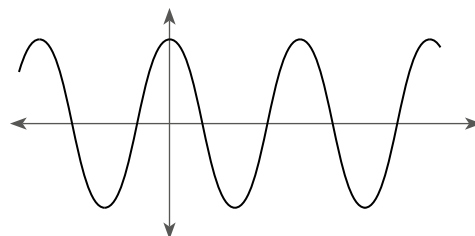
El ejemplo continúa en página 91.

Lectura de información que se encuentra en gráficos.

Relación entre una tabla de valores, el gráfico cartesiano y una situación.

Reconoce cuándo el gráfico de una función se corresponde con un seno o con un coseno que no posee un corrimiento horizontal, a partir de analizar su comportamiento en un entorno de $x = 0$.

Por ejemplo, reconoce que el siguiente gráfico se corresponde con una función que involucra un coseno porque posee un máximo en $x = 0$.



Produce gráficos de funciones trigonométricas del tipo $f(x) = a \cdot \text{sen}(x)$ ubicando puntos en el plano cartesiano a partir de valores relacionados de las variables, previendo su forma y sus características.

Por ejemplo, para realizar el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = 3 \cdot \text{sen}(x)$, el/la estudiante produce la siguiente tabla y el siguiente gráfico, anticipando que al tratarse del gráfico de una función trigonométrica (senoide) la curva se repite periódicamente y posee puntos máximos, mínimos e intersecciones con el eje x en valores de sus primeras coordenadas que son “múltiplos” de $\frac{\pi}{2}$.

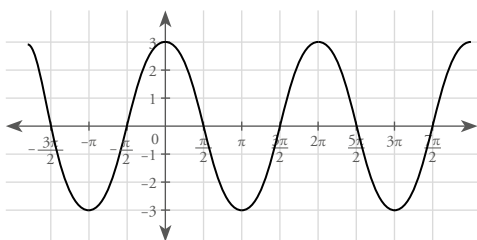
El ejemplo continúa en página 92.

Produce gráficos de funciones trigonométricas del tipo $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx) + c$ ubicando puntos importantes a partir de su fórmula y apelando a la periodicidad.

Por ejemplo, para realizar el gráfico de la función definida por la fórmula $f(x) = 3 \cdot \text{sen}(2x) + 1$, el/la estudiante determina en primer lugar los valores de x para los cuales el argumento de la función es $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3}{2}\pi$ (ya que para esos valores el seno toma valores enteros) y en segundo lugar calcula su imagen.

x	$2x$	$f(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	4
$\frac{\pi}{2}$	π	1
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	-2

Luego ubica esos puntos en el plano uniéndolos con una curva sinusoidal y completa el gráfico para el resto de los valores de x “repitiéndolo” de forma periódica.



La fila continúa en página 93.

Continúa el ejemplo de página 89.

Una vez obtenidos todos los valores “en la primera vuelta”, considera la periodicidad y afirma que todos los valores de x se pueden obtener a partir de $\frac{\pi}{6}$ y de $\frac{5}{6}\pi$ sumando o restando cualquier cantidad de veces 2π , porque cada “una vuelta entera” el seno vuelve a ser $\frac{1}{2}$.

Luego expresa todos esos valores de manera simbólica:

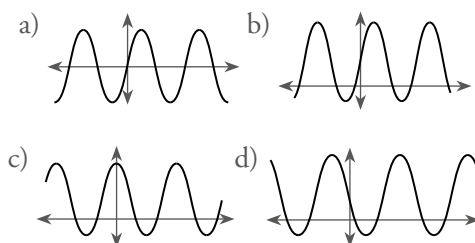
$$\frac{\pi}{6} + k_1 \cdot 2\pi \quad (\text{con } k_1 \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{5}{6}\pi + k_2 \cdot 2\pi \quad (\text{con } k_2 \in \mathbb{Z})$$

Reconoce e interpreta la relación entre los valores de los parámetros de la fórmula de una función trigonométrica y su gráfico.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

Identificá cuál de los siguientes gráficos podría ser el de la función definida por la fórmula $f(x) = 3 \cdot \text{sen}(x) + 2$.

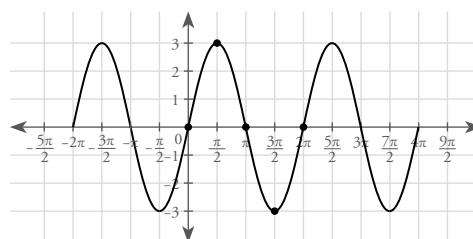


El/la estudiante reconoce que la función está compuesta por un seno que no está “corrido” horizontalmente, lo que le permite descartar el gráfico c), debido a que no puede tener un máximo en $x = 0$ (esto sucede con el coseno). Luego, analizando que el seno toma valores entre -1 y 1 , que el coeficiente que lo multiplica es 3 , y que luego se suma 2 , determina que la imagen de la función es $[-1; 5]$, lo que le permite descartar el gráfico a), debido a que este es simétrico con respecto al eje x .

El ejemplo continúa en página 93.

Continúa el ejemplo de página 90.

x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	3
π	0
$\frac{3}{2}\pi$	-3
2π	0

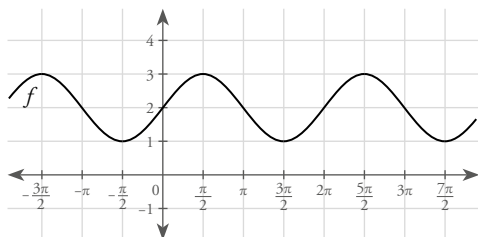


Nivel II

Continúa la fila de página 91.

Produce la fórmula de una función trigonométrica del tipo $f(x) = \sin(x) + c$ a partir de su gráfico, reconociendo si se corresponde con el seno o el coseno y si está “corrido” verticalmente.

Por ejemplo, a partir del siguiente gráfico:



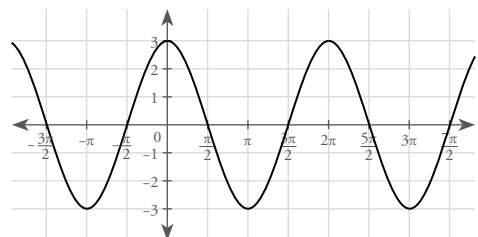
El/la estudiante reconoce que se trata de un seno (que no está desplazado horizontalmente) porque no posee un extremo en $x = 0$. Luego, observando que el mínimo de la función es 1, establece que, con respecto al gráfico del seno, está “corrido” dos unidades “hacia arriba” y, por lo tanto, en la fórmula se debe sumar 2.

Para finalizar, produce la fórmula:

$$f(x) = \sin(x) + 2.$$

Produce la fórmula de una función trigonométrica del tipo $f(x) = a \cdot \sin(x)$ a partir de su gráfico, reconociendo si se corresponde con el seno o el coseno y si su amplitud es distinta de 1.

Por ejemplo, a partir del siguiente gráfico:



El/la estudiante reconoce que se trata de un coseno (que no está desplazado horizontalmente) porque posee un máximo en $x = 0$. Luego, observando que el mínimo de la función es -3 y que el máximo es 3 , establece que, con respecto al gráfico del coseno, posee una amplitud que es el triple y, por lo tanto, en la fórmula se debe multiplicar por 3.

El ejemplo continúa en página 95.

Nivel III

Continúa el ejemplo de página 91.

A partir de que el seno es creciente en $(0; \frac{\pi}{2})$ y de que el coeficiente 3 por el que se lo multiplica no modifica esta característica porque es positivo, el/la alumno/a descarta el gráfico d).

Para finalizar, afirma que el único gráfico que podría ser el de la función es el b), porque tiene las características que se pueden anticipar a partir del análisis de la fórmula.

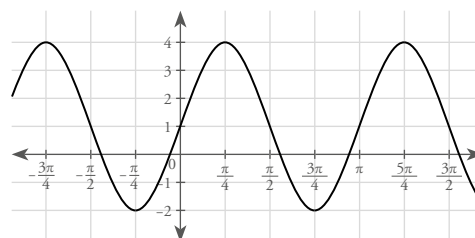
Positivo: no modifica crecimiento y decrecimiento

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x) + 2$$

Entre -1 y 1 → Imagen $[-1; 5]$
Entre -3 y 3

Produce la fórmula de una función trigonométrica a partir de su gráfico, reconociendo su amplitud y su período.

Por ejemplo, a partir del siguiente gráfico:



El/la estudiante reconoce que se trata de un seno (que no está desplazado horizontalmente) porque no posee un extremo en $x = 0$. Luego, observando que el mínimo de la función es -2 y el máximo es 4 , establece que la amplitud es 3 (ya que la distancia entre -2 y 4 es 6) y que el gráfico está “corrido” una unidad “hacia arriba”, por lo que el coeficiente por el que se debe multiplicar al seno es 3 y luego se le debe sumar 1 .

Con respecto al período, analiza que en este caso es π , que es la mitad del período de $\sin(x)$, por lo que la variable debe estar multiplicada por 2 en el argumento.

Para finalizar, produce la fórmula:

$$f(x) = 3 \cdot \sin(2x) + 1.$$

Relación entre la solución algebraica y la gráfica de una ecuación.

Análisis de la cantidad de soluciones de una ecuación.

Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot \text{sen}(x) + b = k$ en el intervalo $[0; 2\pi]$, sin anticipar la existencia de soluciones.

Por ejemplo, frente a la ecuación $2 \cdot \text{sen}(x) + 3 = 6$, el/la estudiante inicia el proceso de resolución de la siguiente manera:

$$2 \cdot \text{sen}(x) = 6 - 3$$

$$\text{sen}(x) = \frac{3}{2}$$

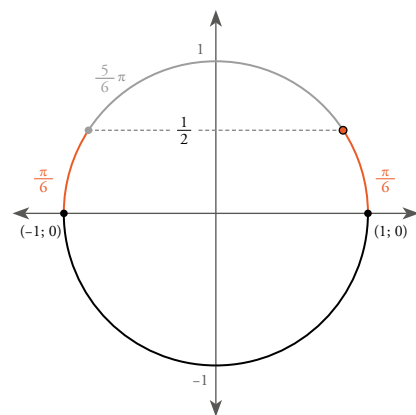
para afirmar que no hay solución porque el seno únicamente toma valores entre -1 y 1 .

O bien, resuelve una ecuación como la siguiente, apoyándose en la circunferencia trigonométrica para obtener las soluciones simétricas:

$$2 \cdot \text{sen}(x) + 3 = 4$$

$$2 \cdot \text{sen}(x) = 4 - 3$$

$$\text{sen}(x) = \frac{1}{2}$$



$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Continúa el ejemplo de página 93.

Para finalizar, produce la fórmula:

$$f(x) = 3\cos(x).$$

Anticipa la existencia de soluciones de una ecuación del tipo $a \cdot \sin(x) + b = k$.

Por ejemplo, frente a la ecuación

$$2 \cdot \sin(x) + 3 = 6$$

el/la estudiante afirma que no tiene solución porque $2 \cdot \sin(x)$ puede tomar como máximo el valor 2 y, al sumarle 3, el resultado podría ser, a lo sumo, 5.

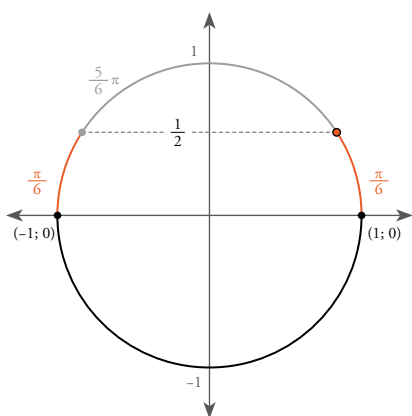
Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot \sin(x) + b = k$ sin restricciones en el dominio.

Por ejemplo, resuelve una ecuación como la siguiente, apoyándose en la circunferencia trigonométrica para obtener las soluciones simétricas:

$$2 \cdot \sin(x) + 3 = 4$$

$$2 \cdot \sin(x) = 4 - 3$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$



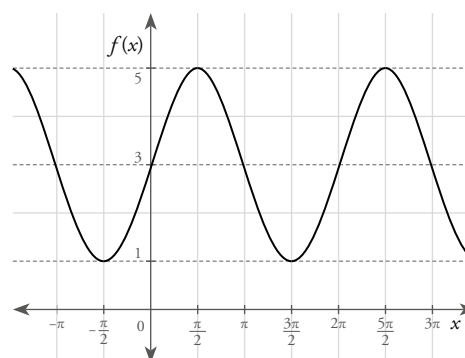
$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k_1 \cdot 2\pi, k_1 \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k_2 \cdot 2\pi, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

Determina los valores de k para los cuales las ecuaciones del tipo $a \cdot \sin(x) + b = k$ tienen o no tienen soluciones, y diferencia los casos en los que existe una única solución por período de la función.

Por ejemplo, frente a la ecuación $2 \cdot \sin(x) + 3 = k$, el/la estudiante afirma que no tiene solución para cualquier valor de k mayor que 5 o menor que 1 porque $2 \cdot \sin(x)$ puede tomar como mínimo el valor -2 y como máximo el valor 2 y, por lo tanto, al sumarle 3, el resultado será siempre mayor o igual que 1 y menor o igual que 5.

También afirma que tiene infinitas soluciones para todo valor de k perteneciente a $[1; 5]$, y distingue los casos en los que $k = 1$ o $k = 5$, para los que sostiene que solo existirá una solución por cada período de la función.

El/la alumno/a podría arribar a las mismas conclusiones interpretando la expresión $2 \cdot \sin(x) + 3$ como la fórmula de una función y k como un posible valor de la imagen. Luego de considerar y analizar su gráfico, podría establecer que la ecuación solo tendrá solución si k es un valor del intervalo $[1; 5]$, ya que esa es la imagen de la función.



Resuelve ecuaciones del tipo $a \cdot \sin(x) + b = k$ con restricciones del dominio diferentes al intervalo $[0; 2\pi]$.

La fila continúa en página 97.

Ciclo Básico	Ciclo Orientado
	Nivel I
	Halla la imagen de funciones trigonométricas. Halla el C^0, C^+, C^-, los máximos, los mínimos, los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de funciones trigonométricas con dominio restringido del tipo $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx)$, para lo cual produce y analiza su gráfico. <i>La fila continúa en página 98.</i>

Continúa la fila de página 95.

Por ejemplo, ante la siguiente ecuación:

$$2 \cdot \operatorname{sen}(x) + 3 = 4 \text{ con } x \in [-\pi; 3\pi]$$

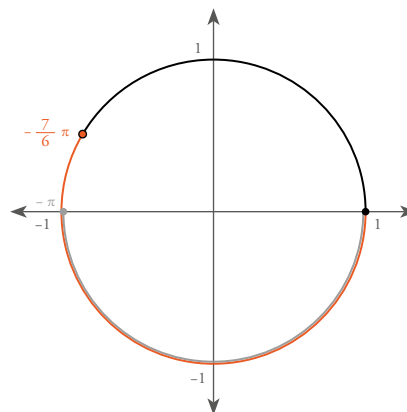
$$2 \cdot \operatorname{sen}(x) = 4 - 3$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \text{ o } x = \frac{5}{6}\pi + 2k_2\pi$$

Utiliza distintos valores de los parámetros k_1 y k_2 para determinar cuáles de los valores de x que verifican la igualdad son los que se encuentran en los intervalos indicados.

También podría apoyarse en la circunferencia trigonométrica identificando el intervalo de la restricción con “vueltas” sobre ella. Por ejemplo, considerando que el mínimo del intervalo de la restricción es $-\pi$, podría identificar que la restricción “comienza con media vuelta” en sentido horario. Entonces, aunque $\operatorname{sen}\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, concluiría que $-\frac{7}{6}\pi$ no es solución de la ecuación porque “da más de media vuelta negativa”.



Halla el C^0 , C^+ , C^- , los máximos, los mínimos, los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de funciones trigonométricas con dominio $\mathbb{R}$ del tipo $f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(bx)$, lo que requiere expresar infinitos valores o intervalos.

La fila continúa en página 99.

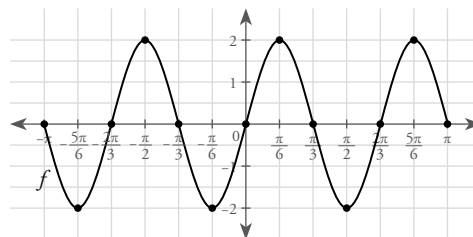
Halla el C^0 , C^+ , C^- , los máximos, los mínimos, los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de funciones trigonométricas con dominio $\mathbb{R}$ del tipo $f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(bx) + c$, lo que requiere resolver ecuaciones con soluciones simétricas y periódicas y expresar infinitos valores o intervalos.

La fila continúa en página 99.

Continúa la fila de página 96.

Por ejemplo, para hallar el C^+ de la función $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2 \cdot \sin(3x)$ el/la estudiante produce una tabla de valores y, a partir de ella, un gráfico como el siguiente, previendo su forma y sus características.

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	2
$\frac{1}{3}\pi$	0
$\frac{1}{2}\pi$	-2
$\frac{2}{3}\pi$	0



Luego de analizar el gráfico, expresa:

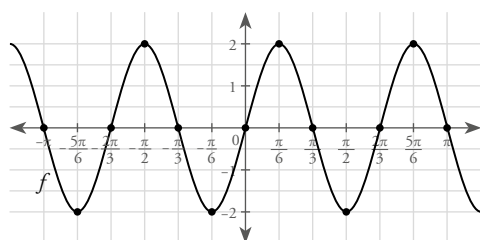
$$C^+(f) = \left(-\frac{2}{3}\pi; -\frac{1}{3}\pi\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi; \pi\right).$$

Nivel II

Continúa la fila de página 97.

Por ejemplo, para hallar el C^+ de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2 \cdot \sin(3x)$ el/la estudiante produce una tabla de valores y, a partir de ella, un gráfico como el siguiente.

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	2
$\frac{1}{3}\pi$	0
$\frac{1}{2}\pi$	-2
$\frac{2}{3}\pi$	0



Luego expresa: $C^+(f)$ es la unión de todos los intervalos de la forma $(0 + \frac{2}{3}\pi \cdot k; \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi \cdot k)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Halla el C^0 , C^+ , C^- , los máximos, los mínimos, los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de funciones trigonométricas con el dominio restringido a un período del tipo $f(x) = a \cdot \sin(bx) + c$, lo que requiere resolver ecuaciones con soluciones simétricas.

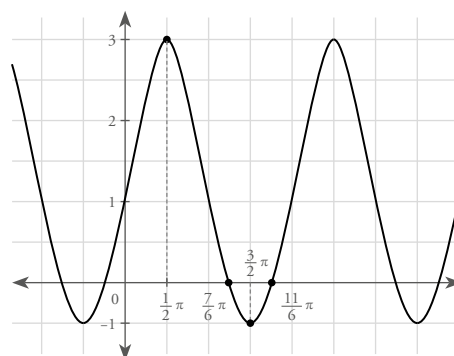
Por ejemplo, para hallar el C^- de la función $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 1$, el/la estudiante halla las raíces de la función y las coordenadas de otros puntos para producir un gráfico como el siguiente.

El ejemplo continúa en página 101.

Nivel III

Continúa la fila de página 97.

Por ejemplo, para hallar el C^- de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 1$, el/la estudiante halla las raíces de la función, su período y las coordenadas de otros puntos (o prevé algunas características que tendrá) para producir un gráfico como el siguiente.



Luego de analizar el gráfico, expresa: $C^-(f)$ es la unión de los intervalos de la forma $(\frac{7}{6}\pi + 2\pi \cdot k; \frac{11}{6}\pi + 2\pi \cdot k)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Halla el C^0 , C^+ , C^- , los máximos, los mínimos, los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento e imagen de funciones trigonométricas en problemas situados en contextos extramatemáticos a partir de la anticipación de las características de su gráfico.

Por ejemplo, para resolver este problema:

La función

$$f: [0; 24] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 4\sin\left(\frac{1}{6}\pi x\right) - 4$$

describe la altura del nivel del agua (medido en metros) de una laguna en función del tiempo (medido en horas) a lo largo de un día. Las embarcaciones solo pueden entrar a la laguna cuando el nivel del agua supera los 2 m bajo el nivel 0.

¿Es cierto que existen solo dos intervalos de tiempo por día en el que es posible que ingresen embarcaciones a la laguna?

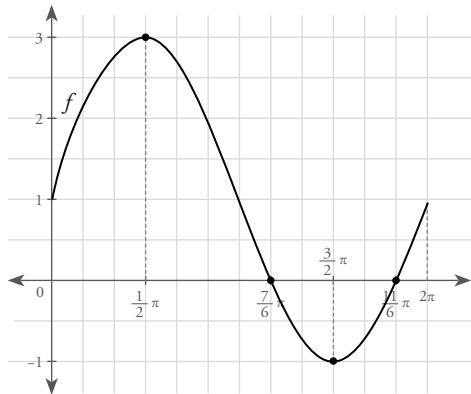
El ejemplo continúa en página 101.

Ciclo Básico	<i>Ciclo Orientado</i>
	Nivel I

--	--

Nivel II

Continúa el ejemplo de página 99.



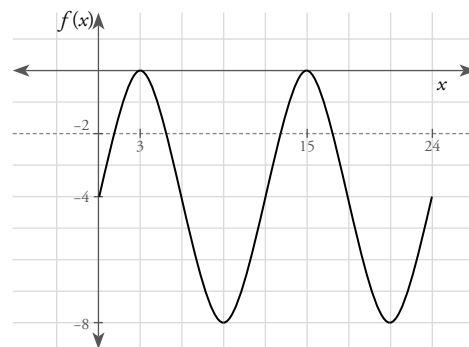
Luego de analizar el gráfico, expresa:
 $C^-(f) = \left(\frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi\right)$

Nivel III

Continúa el ejemplo de página 99.

A partir de analizar los coeficientes de la fórmula de la función, el/la estudiante anticipa que la imagen se encuentra entre -8 y 0 y que su período es 12 . En primer lugar, a partir de la imagen, deduce que existen valores de tiempo para los cuales la altura del nivel del agua es mayor que -2 . Luego, a partir del período, concluye que existen dos intervalos en el dominio para los cuales la imagen de la función es mayor que -2 , ya que posee exactamente dos períodos entre 0 y 24 . Para finalizar, interpreta estas conclusiones en el contexto del problema y afirma que solo existen dos intervalos por día en el que es posible el ingreso de embarcaciones a la laguna.

Podría acompañar sus razonamientos realizando un gráfico a mano alzada.



Actividades para relevar los aprendizajes

Como se señaló en la introducción de este documento, se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos de los/as estudiantes en relación con el eje Funciones y álgebra. Parte de esta información puede recabarse durante el trabajo en el aula, a partir de observar a los/as alumnos/as mientras resuelven problemas, de analizar sus intervenciones y preguntas durante las instancias colectivas y las explicaciones que pueden dar de su trabajo. Sin embargo, resulta necesario también disponer de datos acerca de las producciones de los/as estudiantes en situaciones de trabajo individual que permitan analizar más detalladamente la producción de cada uno. Las situaciones propuestas a continuación responden a este propósito.

Función cuadrática

Situación 1. Simetría del gráfico de una función cuadrática

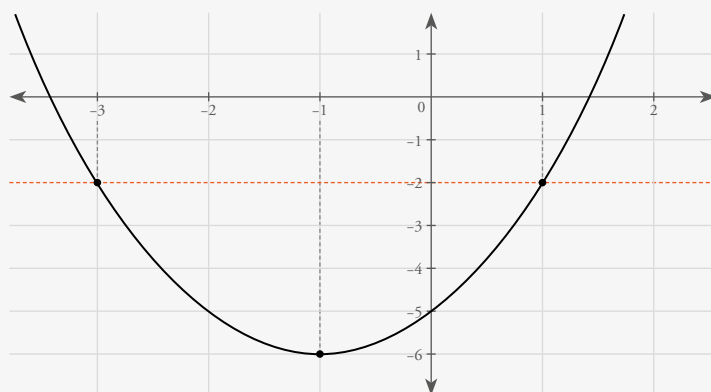
La siguiente situación permite evaluar si el/la estudiante puede, por un lado, interpretar la información que le da la fórmula de la función y, por el otro, utilizarla para hallar valores del dominio que tengan la misma imagen.

La temperatura en Marcos Paz (medida en °C) del día 30 de julio de 2021 puede modelizarse a través de una función de fórmula $f(x) = a(x + 1)^2 + b$, donde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ y $-5 \leq x \leq 5$. Se sabe que la variable independiente representa la hora, que $x = 0$ corresponde a las 7 de la mañana y que $f(-3) = -2$. Hallá otro momento del día en el que, según el modelo, la temperatura es de -2 °C.

Se puede observar si el/la estudiante:

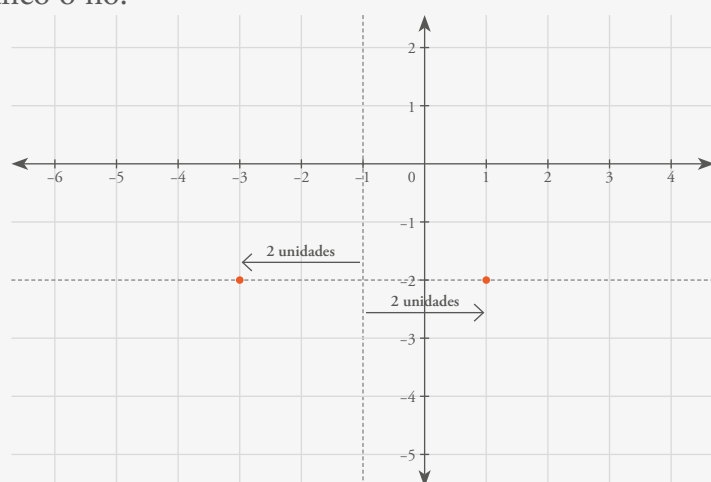
- » Afirma que no es posible resolver el problema porque no se conoce la fórmula de la función.

- » Asigna valores a a y a b ensayando con ellos para asegurarse de que el gráfico contenga al punto $(-3; -2)$, realiza el gráfico de la función correspondiente e intenta hallar el valor de x a partir de él. Algunos/as estudiantes probarán con diversos valores al azar para a y b , para luego intentar hallar el valor pedido de x a partir de un gráfico. Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = -6$:



Esta estrategia supone un avance respecto de la anterior, debido a que en este caso el/la estudiante admite la existencia de una función a pesar de que su fórmula contenga parámetros. Sin embargo, no explora ni analiza su fórmula de manera general, sino que necesita apoyarse en un caso particular. Por otro lado, dispone de los conocimientos necesarios para hallar gráficamente las preimágenes de un cierto valor.

- » Reconoce que el punto $(-1; b)$ es el vértice de la parábola y que la recta $x = -1$ es su eje de simetría. Marca el punto $(-3; -2)$ y busca su simétrico, apoyándose en un gráfico o no.

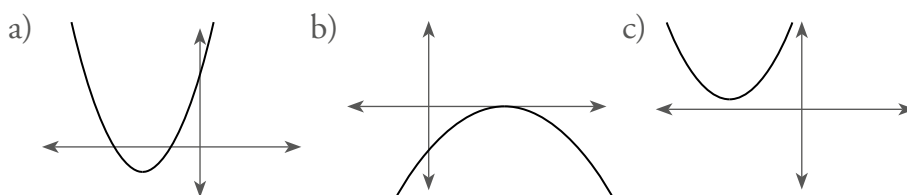


Determina así, que el valor buscado es $x = 1$, y establece (o no) que la temperatura vuelve a ser de -2°C a las 8 de la mañana. Es en esta estrategia de resolución que el/la estudiante pone en juego la simetría de la parábola respecto de la recta vertical que pasa por su vértice. Es una aplicación importante, pues permite hallar otro punto que tenga la misma imagen que uno dado.

Situación 2. Gráficos de funciones cuadráticas y fórmulas

El problema que se propone a continuación permite evaluar si los/as estudiantes identifican algunas características de la parábola que es el gráfico de una función cuadrática y su consiguiente relación con los parámetros de una fórmula que la representa.

Sugerí una fórmula para cada una de las funciones cuadráticas representadas gráficamente. Sin graficar las que proponés, explicá cómo hiciste para hallarlas.



Para el ítem a) se puede observar si el/la estudiante:

- » Propone una fórmula desarrollada correcta sin explicar cómo hizo para hallarla. Seguramente se trate de un/a estudiante que la encontró a través de ensayos y errores. Resulta importante señalar que la manera elegida para expresar la fórmula no es conveniente en función de los datos que tienen, pues se sabe que tanto el coeficiente principal como el término independiente deben ser positivos. Para hallar algún valor posible de b es necesario analizar el discriminante, lo cual no resulta simple.
- » Propone una fórmula correcta expresada en su forma canónica o factorizada, aunque sin explicar cómo hizo para hallarla. Posiblemente, se trate de un/a estudiante que relacionó los datos proporcionados por el gráfico pero no pudo –u olvidó– explicitar las relaciones que tuvo en cuenta. El avance, en este caso, lo constituye el tipo de expresión seleccionada, que resulta más conveniente para los datos disponibles.
- » Propone una fórmula del tipo $f(x) = (x + p)(x + q)$, explicitando o no que p y q tienen que ser números positivos. No considera que la ordenada al origen tiene que ser positiva, aunque se cumple para la fórmula propuesta, y no tiene en cuenta la concavidad. Muchas veces los/as estudiantes asumen que $a = 1$ por no haberlo considerado.

Del mismo modo, puede pensar que las dos coordenadas del vértice de la parábola tienen que ser negativas, por lo que su fórmula es del tipo $f(x) = (x + p)^2 - q$, explicitando o no que p y q tienen que ser números positivos. Tampoco tiene en cuenta el signo de la ordenada al origen ni del coeficiente principal.

Tanto en esta estrategia de resolución como en la anterior, el/la estudiante elige una forma conveniente para representar la fórmula de la función de acuerdo con los datos, aunque no tiene en cuenta todos ellos.

- » Propone una fórmula del tipo $f(x) = a(x + p)(x + q)$, explicitando que p y q tienen que ser números positivos, o bien $f(x) = a(x - p)(x - q)$, explicitando que p y q tienen que ser números negativos. Afirma también que $a > 0$ debido a la concavidad de la parábola propuesta. Luego verifica que la ordenada al origen es efectivamente positiva, hallando $f(0)$.

Del mismo modo, plantea que las dos coordenadas del vértice de la parábola tienen que ser negativas, por lo que su fórmula es del tipo $f(x) = a(x + p)^2 - q$, explicitando que p y q tienen que ser números positivos; o bien, que es $f(x) = a(x - p)^2 + q$, explicitando que p y q tienen que ser números negativos. También afirma y explica por qué debe ser $a > 0$ y verifica que la ordenada al origen es efectivamente positiva, hallando $f(0)$.

En las dos últimas estrategias descritas, los/as estudiantes no solo eligen una representación conveniente para la fórmula, sino que además tienen en cuenta todos los datos sobre la función y explican de qué manera inciden en la fórmula.

Para el ítem b) se puede observar si el/la estudiante:

- » Propone una fórmula desarrollada correcta sin explicar cómo hizo para hallarla. Seguramente se trate de un/a estudiante que la encontró a través de ensayos y errores. Resulta importante señalar que la manera elegida para expresar la fórmula no resulta conveniente en función de los datos que se tienen.
- » Propone una fórmula correcta expresada en su forma canónica, aunque sin explicar cómo hizo para hallarla. Posiblemente, se trate de un/a estudiante que relacionó los datos proporcionados por el gráfico pero no pudo –u olvidó– explicitar las relaciones que tuvo en cuenta. El avance, en este caso, lo constituye el tipo de expresión seleccionada, que resulta más conveniente para los datos disponibles.
- » Propone una fórmula del tipo $f(x) = -a(x + p)(x + p)$, explicitando o no que a y p tienen que ser números positivos. No considera que la ordenada al origen tiene que ser negativa, aunque se cumple para la fórmula propuesta.

Del mismo modo, puede pensar que la primera coordenada del vértice de la parábola tiene que ser positiva y la segunda, cero, por lo que su fórmula es del tipo $f(x) = -a(x + p)^2$, explicitando o no que a y p tienen que ser números positivos. Tampoco tiene en cuenta el signo de la ordenada al origen.

Tanto en esta estrategia de resolución como en la anterior, el/la estudiante elige una forma conveniente para representar la fórmula de la función de acuerdo con los datos, aunque no tiene en cuenta todos ellos.

- » Propone una fórmula del tipo $f(x) = -a(x + p)(x + p) = -a(x + p)^2$, explicitando que a y p son números positivos, o bien $f(x) = a(x - p)(x - p) = a(x - p)^2$, explicitando que a y p tienen que ser números negativos. Afirma también que $a < 0$ debido a la concavidad de la parábola propuesta. Luego verifica que la ordenada al origen es efectivamente negativa, hallando $f(0)$.

Del mismo modo, plantea que la primera coordenada del vértice de la parábola tiene que ser positiva y la segunda, cero, por lo que su fórmula es del tipo $f(x) = a(x - p)^2$, explicitando que p tiene que ser un número positivo. También afirma y explica por qué debe ser $a < 0$ y verifica que la ordenada al origen es efectivamente negativa, hallando $f(0)$.

En las dos últimas estrategias descritas, los/as estudiantes no solo eligen una representación conveniente para la fórmula, sino que además tienen en cuenta todos los datos sobre la función y explican de qué manera inciden en la fórmula.

Para el ítem c) se puede observar si el/la estudiante:

- » Propone una fórmula desarrollada correcta sin explicar cómo hizo para hallarla. Seguramente se trate de un/a estudiante que la encontró a través de ensayos y errores. Resulta importante señalar que la manera elegida para expresar la fórmula no es una manera conveniente de hacerlo en este caso.
- » Propone una fórmula correcta expresada en su forma canónica, aunque sin explicar cómo hizo para hallarla. Posiblemente, se trate de un/a estudiante que relacionó los datos proporcionados por el gráfico pero no pudo –u olvidó– explicitar las relaciones que tuvo en cuenta. El avance, en este caso, lo constituye el tipo de expresión seleccionada, que resulta más conveniente para los datos disponibles.
- » Propone una fórmula del tipo $f(x) = (x + p)^2 + q$, explicitando o no que p y q tienen que ser números positivos. No considera que la ordenada al origen tiene que ser positiva, aunque se cumple para la fórmula propuesta, y no tiene en cuenta la concavidad. Muchas veces los/as estudiantes asumen que el coeficiente principal es 1 pero sin haberlo considerado.

En esta estrategia de resolución, el/la estudiante elige una forma conveniente para representar la fórmula de la función de acuerdo con los datos, aunque no tiene en cuenta a todos ellos.

- » Propone una fórmula del tipo $f(x) = a(x + p)^2 + q$, explicitando que p y q tienen que ser números positivos. También afirma y explica por qué debe ser y verifica que la ordenada al origen es efectivamente positiva, hallando $f(0)$.

En esta estrategia los/as estudiantes no solo eligen una representación conveniente para la fórmula, sino que además tienen en cuenta todos los datos sobre la función y explican de qué manera inciden en la fórmula.

Situación 3. Soluciones de una ecuación cuadrática

A través del problema que se propone, el/la docente tendrá la posibilidad de evaluar si los/as estudiantes pueden analizar la cantidad de soluciones de una ecuación cuadrática, o de raíces de una función cuadrática, en cuya fórmula intervienen parámetros. No se trata de un problema para trabajar en 3.º año, cuando se inicia el estudio de este tipo de funciones, sino en 5.º año, cuando se propone un repaso de las diferentes funciones estudiadas.

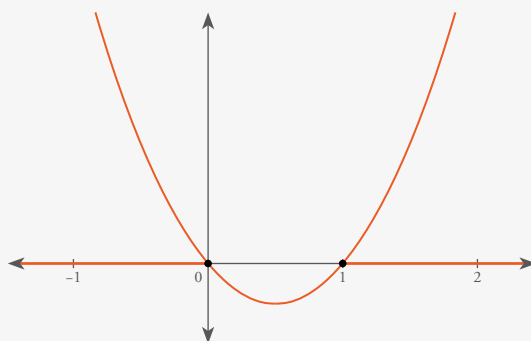
Analizá para qué valores de k la ecuación, $kx^2 - 4kx = -1 - 3k$, $k \neq 0$, tiene solución.

Se puede observar si el/la estudiante:

- » Asigna diferentes valores a k , y, para cada uno de ellos, analiza si la ecuación tiene o no solución. Es posible que los/as estudiantes que deciden tomar este camino no comprendan que es posible responder el problema aunque la ecuación tenga una variable y un parámetro.
- » Obtiene una ecuación equivalente igualada a cero e intenta resolverla utilizando la fórmula resolvente. Por ejemplo, luego de obtener $kx^2 - 4kx + 1 + 3k = 0$, reemplaza los coeficientes en la fórmula y obtiene $x = \frac{4k \pm \sqrt{(-4k)^2 - 4k(1 + 3k)}}{2k}$. Sin saber cómo obtener un resultado numérico, abandona la resolución.
- » Obtiene una ecuación equivalente igualada a cero y halla su discriminante, planteando que tiene que ser mayor o igual que cero. Es decir, a partir de la ecuación $kx^2 - 4kx + 1 + 3k = 0$, obtiene que $\Delta = (-4k)^2 - 4k(1 + 3k) \geq 0$. Luego, transforma las escrituras para operar sobre una inecuación equivalente a la original. Por ejemplo, de la siguiente manera:

$$(-4k)^2 - 4k(1 + 3k) \geq 0 \Rightarrow 4k^2 - 4k \geq 0 \Rightarrow 4k(k - 1) \geq 0$$

Finalmente, interpreta que necesita hallar el conjunto de ceros y el conjunto de positividad de la función $g(x) = 4x(x - 1)$, lo hace a partir de un gráfico y da la solución correcta $k < 0$ o $k \geq 1$.



- » Considera la función $h(x) = kx^2 - 4kx$, e intenta determinar bajo qué condiciones el valor $-1 - 3k$ es un elemento de la imagen de la función.

Para ello, determina que el vértice de la parábola es el punto $(2; -4k)$. Luego considera diferentes casos, según el signo de k :

- » Si $k > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba y el mínimo valor que toma es $-4k$. Entonces, para que la ecuación tenga solución, debe ocurrir que $-1 - 3k \geq -4k$. Obtiene que la solución es $k \geq 1$.
- » Si $k < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo y el máximo valor que toma es $-4k$. Entonces, para que la ecuación tenga solución, debe ocurrir que $-1 - 3k \leq -4k$, lo que ocurre cuando $k \leq 1$. Considerando las dos condiciones sobre el valor de k , la solución para este caso es $k < 0$.

Finalmente, expresa la solución como la unión de las dos parciales: $k < 0$ o $k \geq 1$.

Función polinómica

Situación 1. Conjunto de ceros de una función polinómica

La siguiente situación permite evaluar si el/la estudiante pone en juego que para hallar las raíces de una función es necesario resolver la ecuación $f(x) = 0$ y desarrolla alguna estrategia válida para hacerlo.

Hallá el conjunto de ceros de la función definida por la fórmula $f(x) = (x - 2)^2(2x + 1)$, sin utilizar programas graficadores.

Se puede observar si el/la estudiante:

- » Halla $f(0) = 4$ y afirma que $C^0 = \{4\}$. En este caso, confunde la variable que tiene que valer cero para hallar el conjunto de ceros.
- » Plantea la ecuación $f(x) = 0$, desarrolla el cuadrado del binomio y aplica la propiedad distributiva para obtener la ecuación $2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 0$, que no logra resolver. El/la estudiante no interpreta la ecuación original como un producto igualado a cero, que no requiere del desarrollo de la expresión para su resolución.
- » Plantea la ecuación $f(x) = 0$ y afirma que $C^0 = \{2; -1\}$, utilizando una regla que no interpreta y con un dominio de validez limitado: “las raíces son los términos independientes de cada factor, cambiados de signo”.
- » Plantea la ecuación $f(x) = 0$ y afirma que $C^0 = \{2; -\frac{1}{2}\}$, resolviendo las ecuaciones que permiten hallar los ceros de cada factor o determinándolos por inspección.

Situación 2. Inecuaciones que involucran funciones polinómicas

El siguiente problema, que requiere de la solución de una inecuación, crea la necesidad de factorizar la expresión resultante para hallar el conjunto de positividad o negatividad de la función asociada.

Sin usar programas graficadores, resolvé la siguiente inecuación:

$$x^3 - 12 > -6x^2 - 5x$$

Se puede observar si el/la estudiante:

- » Intenta, sin éxito, despejar la variable, entendiendo que así se resuelven las ecuaciones e inecuaciones.
- » Halla una inecuación equivalente a la dada para comparar una expresión con cero, $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 > 0$, pero no logra resolverla.
- » Halla una inecuación equivalente a la dada para comparar una expresión con cero, $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 > 0$, busca las raíces de la función polinómica asociada usando el lema de Gauss, pero no logra utilizarlas para hallar el conjunto solución.
- » Halla una inecuación equivalente a la dada para comparar una expresión con cero, $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 > 0$, busca las raíces de la función polinómica asociada usando el lema de Gauss (-4 , -3 y 1), analiza los signos de la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$ en los intervalos determinados por las raíces y determina que el conjunto solución es $S = (-4; -3) \cup (1; +\infty)$.
- » Halla una inecuación equivalente a la dada para comparar una expresión con cero, $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 > 0$, e interpreta que la solución es el conjunto de positividad de la función definida por la fórmula $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$. Luego busca las raíces de la función usando el lema de Gauss para realizar su gráfico y, a partir de él, determinar que el conjunto solución es $S = (-4; -3) \cup (1; +\infty)$.

Función exponencial

Situación 1. Decrecimiento exponencial

La siguiente situación permite evaluar si el/la estudiante reconoce que el problema responde a un modelo exponencial, si logra hallar la fórmula de la función correspondiente y puede utilizarla para responder la pregunta planteada.

Una sustancia radiactiva se desintegra de forma tal que cada día queda un 90 % de la masa del día anterior. Si una muestra de ella tiene hoy una masa de 10 kg, hallá su masa aproximada a los 15 días.

Se puede observar si el/la estudiante:

- » Afirma que no es posible resolver el problema porque no se conoce la fórmula que modeliza la situación.
- » Resuelve hallando la masa de la sustancia en cada día del proceso hasta llegar al día 15, por medio del cálculo de porcentajes. Si para calcular el 90% multiplica por 0,9, podría suceder que en algún momento del procedimiento lo generalice por medio del cálculo $10 \cdot 0,9^{15}$, sin producir una fórmula.
- » Reconoce que se trata de un modelo exponencial, escribiendo o no una fórmula del tipo $f(x) = k \cdot a^x$, pero no logra encontrar ninguno de los parámetros necesarios.
- » Reconoce que se trata de un modelo exponencial, pero solo determina correctamente uno de los parámetros necesarios. Por ejemplo, propone una fórmula del tipo $f(x) = 10 \cdot a^x$, $f(x) = 10 \cdot 90^x$.
- » Reconoce que se trata de un modelo exponencial y determina correctamente la fórmula correspondiente como $f(x) = 10 \cdot 0,9^x$ para luego calcular $f(15)$.

Situación 2. Fórmulas y propiedades de funciones exponenciales

La siguiente situación permite evaluar si el/la estudiante dispone de las propiedades de las potencias, si logra decidir cuándo dos fórmulas definen la misma función y si puede desarrollar alguna estrategia para decidir si una función exponencial tiene o no raíces.

Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta.

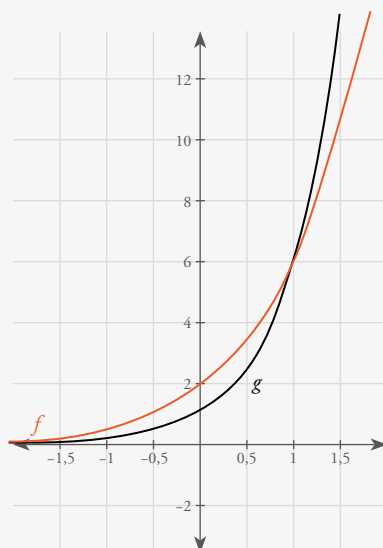
- a) Las fórmulas $f(x) = 2 \cdot 3^x$ y $g(x) = 6^x$ definen la misma función.
- b) La función $f(x) = 2 \cdot 3^x$ no interseca al eje de abscisas.

Para la parte a) se puede observar si el/la estudiante:

- » Afirma que definen la misma función porque aplica una propiedad incorrecta.
- » Grafica ambas funciones –a mano o con tecnología– y utiliza estas representaciones para decir que las funciones no son iguales, sin brindar un contraejemplo:

Para la parte a) se puede observar si el/la estudiante:

- » Afirma que definen la misma función porque aplica una propiedad incorrecta.
- » Grafica ambas funciones –a mano o con tecnología– y utiliza estas representaciones para decir que las funciones no son iguales, sin brindar un contraejemplo:



- » Dice que no definen la misma función mostrando que, para algún valor de la variable independiente, las imágenes a través de cada fórmula son diferentes. Por ejemplo, establece que como $f(2) = 2 \cdot 3^2 = 18$ y $g(2) = 6^2 = 36$, entonces las funciones son diferentes. El/la estudiante, en este caso, está poniendo en juego de manera implícita que si dos fórmulas definen la misma función, entonces la imagen de un valor cualquiera de la variable tiene que ser la misma a través de cada una de ellas.

Para la parte b) se puede observar si el/la estudiante:

- » Grafica la función –a mano o con tecnología– y afirma que sí corta al eje de abscisas.
- » Grafica la función –a mano o con tecnología– y afirma que no corta al eje de abscisas. Tanto en este caso como en el anterior, se trata de un/a alumno/a que responde desde una apreciación visual.
- » Analiza que $3^x \neq 0$ o que $3^x > 0$ para todo valor posible de x , por lo que $2 \cdot 3^x \neq 0$ o $2 \cdot 3^x > 0$ para todo valor de x . Luego, afirma que la gráfica de la función no interseca al eje de abscisas debido a que el conjunto imagen no incluye a cero.

Situación 1. Ecuaciones que requieren del empleo de logaritmos

La siguiente situación permite evaluar si el/la estudiante reconoce la función logarítmica como inversa de la exponencial, como herramienta para resolver una ecuación.

Sin usar un programa graficador, resolvé la ecuación $3^{-x} = 18$.

Se puede observar si el/la estudiante:

- » Confunde el exponente con un producto y afirma que $x = -6$.
- » Intenta hallar el valor de x por aproximación, primero encontrando que $-3 < x < -2$ y luego determinando que $-2,7 < x < -2,6$. Da como solución alguno de esos valores.
- » Aplica la definición de logaritmo obteniendo $-x = \log_3 18 \Rightarrow x = -\log_3 18$. Puede dar una aproximación racional de ese valor o reconocer que la expresión hallada es la manera exacta de representar la solución.
- » Aplica logaritmos a ambos miembros y luego realiza transformaciones por medio de propiedades, obteniendo una expresión correcta, como, por ejemplo: $x = -\log_3 18$, $x = -\frac{\ln 18}{\ln 3}$, $x = \log_3 \frac{1}{18}$, etc. Puede dar una aproximación racional de ese valor o reconocer que la expresión hallada es la manera exacta de representar la solución.

Situación 2. Dominio de funciones logarítmicas

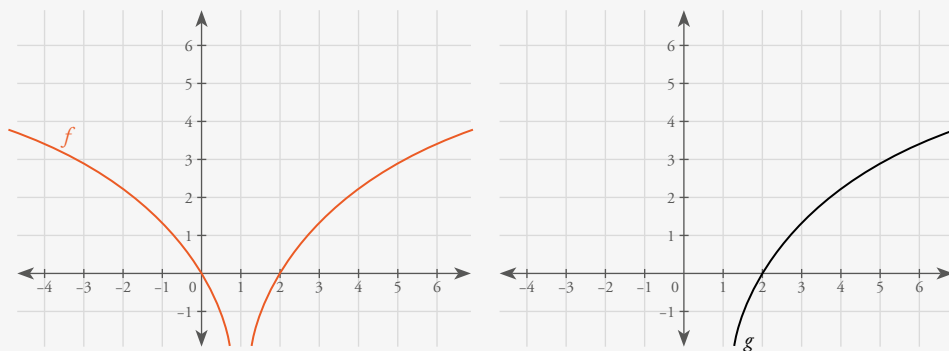
La siguiente situación permite evaluar si el/la estudiante dispone de las propiedades de los logaritmos vinculadas al dominio de cada expresión.

Decidí si las fórmulas $f(x) = \ln(x - 1)^2$ y $g(x) = 2\ln(x - 1)$ definen la misma función.

Se puede observar si el/la estudiante:

- » Afirma que definen la misma función porque prueba para algunos valores de la variable y obtiene los mismos resultados.
- » Afirma que no definen la misma función porque prueba para algunos valores de la variable y en una de las fórmulas no obtiene una imagen, aunque sin acceder a las razones de por qué ocurre esto.

- » Grafica ambas funciones –a mano o con tecnología– y utiliza estas representaciones para decir que las fórmulas no definen la misma función.



Luego podría intentar explicar por qué los gráficos son distintos entre sí, con o sin éxito.

- » Dice que definen la misma función a partir de mostrar que se aplicó una propiedad del logaritmo, sin tener en cuenta el dominio de cada una de las funciones.
- » Dice que no definen la misma función, mostrando que se aplicó una propiedad del logaritmo y hallando los dominios de cada función para mostrar que no coinciden.

Funciones trigonométricas

Situación 1. Ángulos dados su seno y coseno

La siguiente situación permite evaluar si el/la estudiante reconoce las relaciones entre el seno y el coseno de un mismo ángulo, si logra determinar en qué cuadrante está un ángulo en función de los signos de su seno y coseno, y si puede hallar los ángulos cuyo seno y coseno tienen un valor determinado.

Hallá, si existen, los valores de $x \in [0; 2\pi]$ para los cuales se verifica cada una de las siguientes condiciones.

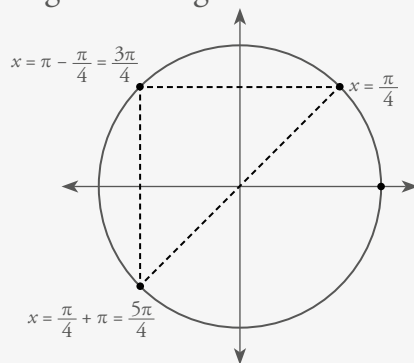
a) $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen}(x) = -1$ y $\cos(x) = 1$

Para la parte a) se puede observar si el/la estudiante:

- » Considera solo la primera condición y una solución en el primer cuadrante, indicando que $S = \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$. El/la estudiante se apoya en el repertorio memorizado de ángulos, senos y cosenos o lo obtiene mediante una calculadora.

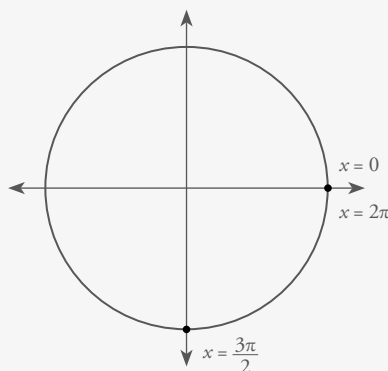
- » Reconoce que el ángulo de referencia tiene una amplitud de $\frac{\pi}{4}$ y halla los ángulos en cada uno de los cuadrantes vinculados con él, aunque sin tener en cuenta los signos del seno y coseno para cada uno de ellos. El conjunto solución propuesto en este caso es $S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$.
- » Halla todas las soluciones que corresponden a una condición o la otra, indicando que el conjunto solución es $S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$. Su trabajo seguramente se acompaña de una circunferencia trigonométrica con los ángulos señalados sobre ella, como en el siguiente diagrama:



- » Determina que si el seno de un ángulo es positivo y su coseno negativo, entonces se trata de un ángulo del segundo cuadrante. Luego relaciona los valores absolutos del seno y coseno con los correspondientes al ángulo de amplitud $\frac{\pi}{4}$ y lo utiliza para calcular la solución como $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Para la parte b) se puede observar si el/la estudiante:

- » Halla todas las soluciones que corresponden a una condición o la otra, indicando que el conjunto solución es $S = \left\{ 0; \frac{3\pi}{4}; 2\pi \right\}$. No anticipa si los valores dados son posibles para el seno y el coseno de un mismo ángulo. Su trabajo seguramente se acompaña de una circunferencia trigonométrica con los ángulos señalados sobre ella, como en el siguiente diagrama:



- » Anticipa que los valores dados no pueden corresponder al seno y al coseno de un mismo ángulo porque cuando el valor de uno de los dos es 0, el valor del otro es 1 o -1. Posiblemente se apoye en los puntos que representan estas situaciones en la circunferencia trigonométrica y/o lo verifique mediante la relación $\sin^2 x + \cos^2 x = (-1)^2 + 1^2 = 2 \neq 1$ y, por lo tanto, su conjunto solución es $S = \emptyset$.

Situación 2. Imagen y conjunto de ceros de una función trigonométrica

La siguiente situación permite evaluar si el/la estudiante puede hallar la imagen de una función que ha sido desplazada verticalmente respecto de $g(x) = \cos x$, si reconoce que una manera de determinar el conjunto de ceros de una función consiste en resolver la ecuación $f(x) = 0$, y si logra resolver una ecuación trigonométrica en $\mathbb{R}$.

Para la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{1}{2}$:

- a) determiná su imagen;
- b) hallá su conjunto de ceros.

Para la parte a) se puede observar si el/la estudiante:

- » Responde que la imagen es el intervalo $[-1; 1]$, sin tener en cuenta los desplazamientos de este gráfico respecto del de la función $g(x) = \cos x$.
- » Intenta hacer un gráfico aproximado de la función, incorrecto, pero lo utiliza de manera coherente para hallar la imagen de la función graficada.
- » Analiza que la imagen de la función $g(x) = \cos x$ es el intervalo $[-1; 1]$, y que coincide con la imagen de la función $h(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Esto se debe a que la gráfica de h solo tiene modificado su período respecto de la gráfica de g , por lo que su imagen no cambia. Finalmente, considera que la gráfica de la función $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{1}{2}$ está desplazada $\frac{1}{2}$ unidad en el sentido negativo de las ordenadas, lo cual afecta a la imagen. Obtiene que los valores mínimos y máximos son $-1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ y $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, respectivamente, y, por lo tanto, la imagen es el intervalo $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Para la parte b) se puede observar si el/la estudiante:

- » Reconoce la necesidad de resolver la ecuación $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{1}{2} = 0$, pero no logra hallar sus soluciones. Puede dejarla sin resolver, resolverla de manera incompleta, o cometer algún error en el proceso.
- » Plantea la ecuación $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{1}{2} = 0$ y halla de manera incorrecta los valores de x en el intervalo $[0; 2\pi]$ cuyo coseno es $\frac{1}{2}$. Determina que el conjunto de ceros es $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$ o bien $\left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + t \cdot 2\pi, t \in \mathbb{Z}\right\}$.
- » Plantea la ecuación $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{1}{2} = 0$ y halla los valores de $\frac{\pi}{4}x$ en el intervalo $[0; 2\pi]$ cuyo coseno es $\frac{1}{2}$. Obtiene que $\frac{\pi}{4}x = \frac{\pi}{3}$ o $\frac{\pi}{4}x = \frac{5\pi}{3}$ y, a partir de allí, $x = \frac{4}{3}$ o $x = \frac{20}{3}$. Determina luego que el conjunto de ceros es $\left\{\frac{4}{3}; \frac{20}{3}\right\}$ o bien $\left\{\frac{4}{3} + 8k, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{20}{3} + 8t, t \in \mathbb{Z}\right\}$.

Geometría y medida

Para el desarrollo del eje Geometría y medida se han tomado como base los contenidos de geometría trabajados en el Ciclo Básico.

En el caso de la construcción del teorema de Thales y de la definición de razones trigonométricas se han tomado como base los conocimientos referidos a semejanza. En este último caso, se parte de considerar las constantes de proporcionalidad entre las longitudes de los lados de triángulos semejantes y, por lo tanto, los cocientes invariables entre pares de lados homólogos.

En el caso del estudio de ángulos y figuras inscriptas en circunferencias, se considera un recorrido de generalización a partir del estudio de casos particulares, empleando conocimientos vinculados a las propiedades de los triángulos.

Para estas progresiones se han considerado tres subejos:

- Semejanza de triángulos y teorema de Thales
- Trigonometría
- Posiciones relativas entre una recta y una circunferencia, y ángulos inscriptos

Semejanza de triángulos y teorema de Thales

Esta progresión se basa en la resolución de problemas de reinversión del teorema de Thales y de la semejanza de triángulos, desde aquellos donde la aplicación es directa a otros donde es necesario producir modelos mediante representaciones geométricas y trazar elementos auxiliares.

Semejanza de triángulos y teorema de Thales

Ciclo Básico

Ciclo Orientado

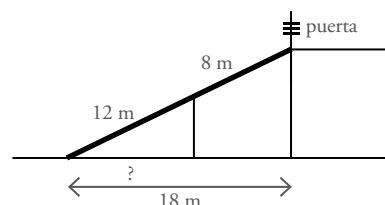
Nivel I

Criterios de semejanza de triángulos.

Emplea el teorema de Thales para resolver problemas que se presentan modelizados mediante rectas paralelas y transversales y/o triángulos semejantes.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Se quiere construir una rampa de 20 m de longitud de acceso a un edificio, con una base de 18 m desde que comienza a elevarse hasta que termina, en donde se colocará un parante perpendicular al suelo para sostenerla. Para su fabricación se utilizarán dos tablones alineados, uno de 12 m y otro de 8 m de longitud, y se colocará un tabique de refuerzo perpendicular al suelo que sostenga la unión de los tablones, como muestra el dibujo.



¿A qué distancia del comienzo de la rampa se deberá colocar el tabique de refuerzo?

El/la estudiante reconoce que en el dibujo el tabique de refuerzo y el parante final son paralelos, y que la rampa y el piso son transversales a ellos, formando una figura en la que se puede aplicar el teorema de Thales. Luego, mediante el teorema, calcula la longitud del segmento que representa la porción del piso correspondiente al segmento que representa al tablón de 12 m. Para finalizar, identifica que la longitud calculada es la distancia a la que debe colocarse el tabique de refuerzo.

El ejemplo continúa en página 122.

- Semejanza de triángulos
- Teorema de Thales

- Modelización de problemas que se pueden resolver mediante el teorema de Thales y/o la semejanza de triángulos

Ciclo Orientado

Nivel II

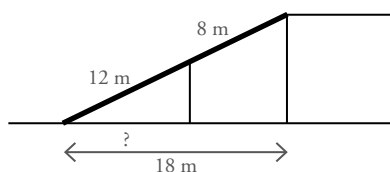
Modeliza problemas mediante rectas paralelas y transversales y/o triángulos semejantes, y emplea el teorema de Thales para resolverlos.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Se quiere construir una rampa de 20 m de longitud de acceso a un edificio con una base de 18 m desde que comienza a elevarse hasta que termina, en donde se colocará un parante perpendicular al suelo para sostenerla. Para su fabricación se utilizarán dos tablones alineados, uno de 12 m y otro de 8 m de longitud, y se colocará un tabique de refuerzo perpendicular al suelo que sostenga la unión de los tablones.

¿A qué distancia del comienzo de la rampa se deberá colocar el tabique de refuerzo?

El/la estudiante produce un esquema como el del dibujo de abajo y reconoce que el tabique de refuerzo y el parante final son paralelos, y que la rampa y el piso son transversales a ellos, formando una figura en la que puede aplicarse el teorema de Thales. Luego, mediante el teorema, calcula la longitud del segmento que pertenece a la transversal que representa al piso correspondiente al segmento de la otra transversal que representa al tablón de 12 m. Para finalizar, identifica que la longitud calculada es la distancia a la que debe colocarse el tabique de refuerzo.



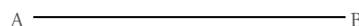
El ejemplo continúa en página 123.

Nivel III

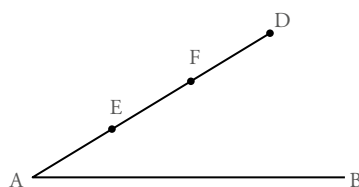
Emplea el teorema de Thales y/o la semejanza para resolver problemas en los que es necesario trazar elementos auxiliares (rectas paralelas y transversales).

Por ejemplo, para resolver este problema:

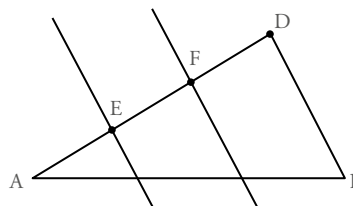
Sin usar la regla para medir, marca un punto C sobre el segmento AB de manera que la longitud de $\overline{AC}$ sea el doble de la longitud de $\overline{CB}$.



El/la estudiante reconoce que una manera de marcar el punto C es dividiendo al segmento AB en tres partes iguales. Para realizarlo, a partir del punto A y de manera no coincidente con $\overline{AB}$, traza un segmento $\overline{AD}$ repitiendo tres veces una medida arbitraria, lo que le asegura que quede dividido en tres partes iguales ($\overline{AE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$).



Luego une el extremo D del nuevo segmento con el punto B mediante otro segmento ($\overline{DB}$) y traza rectas paralelas a este último segmento que pasan por los puntos equidistantes (E y F).



El ejemplo continúa en página 123.

Continúa el ejemplo de página 120.

También podría identificar que, en el dibujo, la rampa, el parante y el piso forman un triángulo rectángulo semejante al que forman el tablón de 12 m, el tabique y la porción del piso que va desde el comienzo de la rampa hasta el tabique. Luego, a partir de esta relación, podría hallar la razón de semejanza y calcular la longitud pedida.

Nivel II

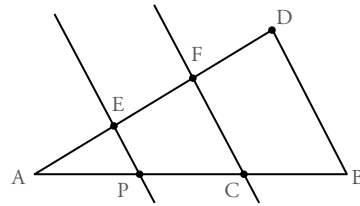
Continúa el ejemplo de página 121.

También podría identificar que, en el esquema, la rampa, el parante y el piso forman un triángulo rectángulo semejante al que forman el tablón de 12 m, el tabique y la porción del piso que va desde el comienzo de la rampa hasta el tabique. Luego, a partir de esta relación, podría hallar la razón de semejanza y calcular la longitud pedida.

Nivel III

Continúa el ejemplo de página 121.

Para finalizar, marca los puntos de intersección entre las rectas y el segmento $\overline{AB}$ (P y C) y, apelando al teorema de Thales, fundamenta que estos puntos dividen a $\overline{AB}$ en tres segmentos congruentes, por lo que la medida del segmento AC es el doble de la del segmento CB.



Trigonometría

En este apartado se presentan las razones trigonométricas en triángulos rectángulos y los teoremas del seno y coseno. Se considera su utilización para la modelización y la resolución de problemas situados en contextos extramatemáticos.

Los temas “Circunferencia trigonométrica” y “Extensión del seno, coseno y tangente a cualquier tipo de ángulo” fueron abordados en la grilla de Funciones trigonométricas correspondiente al eje Funciones y álgebra. De esta manera, se relacionan las funciones trigonométricas con las razones trigonométricas, unas como generalización de las otras.

Trigonometría

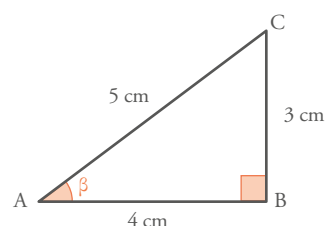
Ciclo Básico

Ciclo Orientado

Nivel I

Halla el seno, el coseno y la tangente de un ángulo α como el cociente de los lados de un triángulo rectángulo en el que α es uno de sus ángulos y se conocen, al menos, las longitudes de dos de sus lados.

Por ejemplo, en la siguiente situación:



El/la estudiante afirma que el seno del ángulo β es $\frac{3}{5}$ porque es el cociente entre el cateto opuesto a β y la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Resolución de ecuaciones.

Teorema de Pitágoras.

Redondeo y aproximaciones decimales.

Emplea las razones trigonométricas para hallar la medida de los lados y de los ángulos de triángulos rectángulos.

Por ejemplo, para hallar la medida del lado $\overline{BC}$ del siguiente triángulo:

El ejemplo continúa en página 128.

- Razones trigonométricas
- Teoremas del seno y del coseno
- Modelización de problemas que se pueden resolver mediante triángulos y el uso de trigonometría

Ciclo Orientado

Nivel II

Reconoce que el seno, el coseno y la tangente de un ángulo α son los cocientes de los lados de un triángulo rectángulo en el que α es uno de sus ángulos.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Sin usar el transportador, construí un ángulo α , de manera que $\text{sen}(\hat{\alpha}) = \frac{3}{5}$.

El/la estudiante construye en primer lugar un triángulo rectángulo con un cateto de 3 cm y la hipotenusa de 5 cm de longitud. Luego llama α al ángulo opuesto al cateto de 3 cm y afirma que el seno de ese ángulo es $\frac{3}{5}$ porque es la razón entre el cateto opuesto a ese ángulo y la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Emplea las razones trigonométricas para hallar la medida de los lados y de los ángulos de triángulos que no son rectángulos, utilizando triángulos rectángulos auxiliares.

Por ejemplo, para hallar la medida del lado $\overline{BC}$ del siguiente triángulo:

El ejemplo continúa en página 129.

Nivel III

Reconoce que el seno, el coseno y la tangente de un ángulo α son las razones entre los lados de todos los triángulos rectángulos en los que α es uno de sus ángulos.

Por ejemplo, al resolver este problema:

Sin usar transportador, construí dos triángulos rectángulos distintos, ambos con el mismo ángulo α , que cumpla que

$$\text{sen}(\hat{\alpha}) = \frac{3}{5}.$$

El/la estudiante construye en primer lugar un triángulo rectángulo con un cateto de 3 cm y la hipotenusa de 5 cm de longitud. Luego llama α al ángulo opuesto al cateto de 3 cm y afirma que el seno de ese ángulo es $\frac{3}{5}$ porque es la razón entre el cateto opuesto a ese ángulo y la hipotenusa del triángulo rectángulo.

A continuación, realiza el mismo procedimiento, pero con un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm de longitud. Llama α al ángulo opuesto al cateto de 6 cm y afirma que se trata del mismo ángulo que en el triángulo anterior porque la razón entre el cateto y la hipotenusa sigue siendo $\frac{3}{5}$, que es el seno del ángulo α .

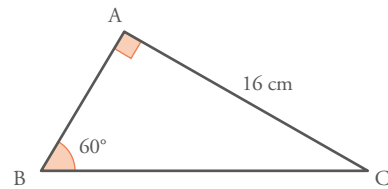
Identifica si es posible utilizar el teorema del seno o el teorema del coseno, y los emplea para hallar la longitud de los lados y la amplitud de los ángulos de triángulos que no son rectángulos.

Por ejemplo, para hallar la medida del ángulo ACB del siguiente triángulo:

El ejemplo continúa en página 129.



Continúa el ejemplo de página 126.



El/la estudiante analiza los datos presentes en la figura y reconoce que a partir de ellos es posible hallar la medida del lado $\overline{BC}$ empleando el seno: son conocidas las medidas del ángulo B y del cateto opuesto a él (el lado $\overline{AC}$), mientras que el lado $\overline{BC}$ es la hipotenusa del triángulo. Luego plantea la relación $\sin(\hat{A}BC) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|}$, reemplaza los datos conocidos y calcula la longitud de $\overline{BC}$.

Emplea las razones trigonométricas para resolver problemas que se presentan modelizados mediante triángulos rectángulos.

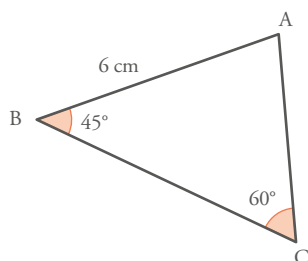
Por ejemplo, para resolver este problema:

Se quiere instalar un poste de luz de manera perpendicular al piso y sujetado por dos cables de acero, uno a cada lado del poste, como se muestra en el dibujo.

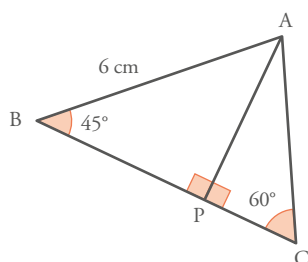
El problema continúa en página 130.

Nivel II

Continúa el ejemplo de página 127.



El/la estudiante traza un segmento perpendicular al segmento BC de manera que uno de sus extremos sea el punto A y el otro extremo pertenezca al lado $\overline{BC}$, obteniendo dos triángulos rectángulos: BPA y CPA.



Luego, a partir de la longitud del segmento BA y de la amplitud del ángulo B, halla las medidas de los segmentos BP y PA empleando las razones trigonométricas. A continuación, a partir de la longitud del segmento PA y de la amplitud del ángulo C, y usando también las razones trigonométricas, halla la medida del segmento PC. Para finalizar, obtiene la longitud del segmento BC sumando las medidas de los segmentos BP y PC.

Modeliza problemas mediante triángulos rectángulos y emplea las razones trigonométricas para resolverlos.

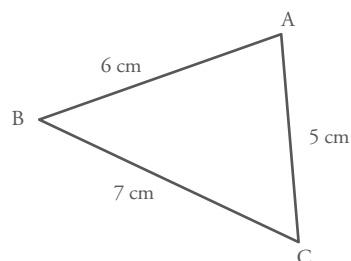
Por ejemplo, para resolver este problema:

Se quiere instalar un poste de luz de manera perpendicular al piso y sujetado por dos cables de acero, uno a cada lado del poste.

El problema continúa en página 131.

Nivel III

Continúa el ejemplo de página 127.



El/la estudiante analiza los datos presentes en la figura y reconoce que es posible aplicar el teorema del coseno, debido a que se conoce la medida de los tres lados del triángulo. Luego utiliza el teorema para calcularlo.

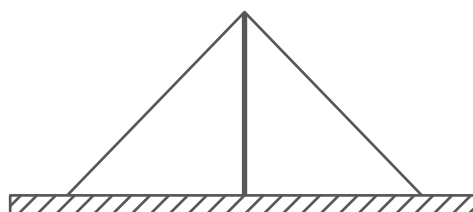
Modeliza problemas mediante triángulos que no son rectángulos y los resuelve empleando los teoremas del seno y del coseno.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Un camionero debe transportar una carga desde la ciudad de Las Cañas hasta la ciudad de Los Árboles.

El problema continúa en página 131.

Continúa el problema de página 128.



Sabiendo que el poste mide 16 m de alto y que los cables deben estar sujetos al piso formando un ángulo de 60° con él, calcula cuántos metros de cable son necesarios para realizar la instalación.

El/la estudiante reconoce que, en el dibujo, el poste, el piso y los cables forman dos triángulos rectángulos congruentes. Luego establece que el poste se corresponde con el cateto opuesto al ángulo que forma cada uno de los cables con el piso y que los cables se corresponden con las hipotenusas. A partir de estas relaciones emplea el seno del ángulo para hallar la medida de uno de los cables.

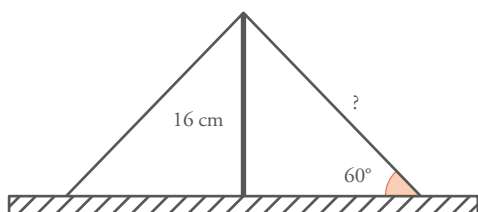
Por último, duplica esa medida para calcular la cantidad total de metros de cable de acero que hace falta para instalar el poste.

Nivel II

Continúa el problema de página 129.

Sabiendo que el poste mide 16 m de alto y que los cables deben estar sujetos al piso formando un ángulo de 60° con él, calcula cuántos metros de cable son necesarios para realizar la instalación.

El/la estudiante produce un esquema como el del dibujo de abajo y reconoce que el poste, el piso y los cables forman dos triángulos rectángulos congruentes.



Luego establece que el poste se corresponde con el cateto opuesto al ángulo que forman los cables con el piso, y que los cables se corresponden con las hipotenusas. A partir de estas relaciones, emplea el seno del ángulo para hallar la medida de uno de los cables.

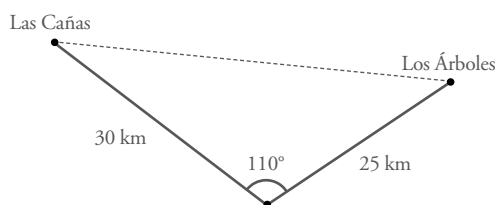
Por último, duplica esa medida para calcular la cantidad total de metros de cable de acero que hace falta para instalar el poste.

Nivel III

Continúa el problema de página 129.

Como no existe un camino que conecte directamente las dos ciudades, decide utilizar dos tramos de ruta rectos que unen ambas ciudades con la ciudad de Los Juncos. El tramo que une Las Cañas con Los Juncos tiene una longitud de 30 km. El tramo que une Los Juncos con Los Árboles tiene una longitud de 25 km y forma un ángulo de 110° con el otro tramo. ¿Cuántos kilómetros se ahorraría el camionero si construyeran una ruta que conectara Las Cañas y Los Árboles en línea recta?

El/la estudiante realiza un esquema como el siguiente y emplea el teorema del coseno para hallar el lado del triángulo que se corresponde con la ruta que iría en línea recta desde Las Cañas a Los Árboles.



Luego calcula la diferencia entre la distancia recorrida pasando por Los Juncos y la que recorrería si utilizara una ruta directa.

Posiciones relativas entre una recta y una circunferencia, y ángulos inscritos

Los conocimientos desarrollados sobre triángulos y cuadriláteros constituyen una base para el desarrollo de propiedades de rectas tangentes a una circunferencia, ángulos inscritos y centrales en una circunferencia. Todas estas relaciones pueden ser validadas trabajando y poniendo en juego de manera simultánea los contenidos mencionados.

Posiciones relativas entre una recta y una circunferencia, y ángulos inscritos

Ciclo Básico

Ciclo Orientado

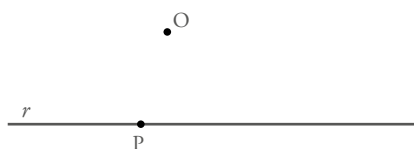
Nivel I

Los triángulos que tienen dos de sus vértices sobre una circunferencia y el restante en su centro son isósceles.

Reconoce que si una recta es tangente a una circunferencia, forma un ángulo recto con el radio que corresponde al punto de tangencia, y viceversa.

Por ejemplo, al resolver el siguiente problema:

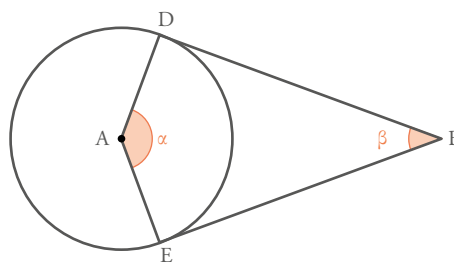
¿Es posible trazar una circunferencia con centro en O que sea tangente a la recta r en el punto P ?



El/la estudiante afirma que no es posible porque el segmento OP debería ser radio de esa circunferencia y perpendicular a la recta r , y de manera empírica percibe que esta última condición no se cumple.

O bien, al resolver este problema:

En la figura, las rectas que contienen a los segmentos BD y BE son tangentes a las circunferencias.



¿Es cierto que $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son suplementarios?

El ejemplo continúa en página 136.

- Rectas tangentes a una circunferencia
- Ángulos inscritos y ángulos centrales en una circunferencia

- Figuras inscritas en una circunferencia

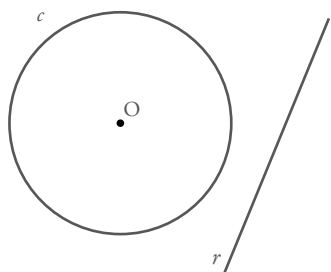
Ciclo Orientado

Nivel II

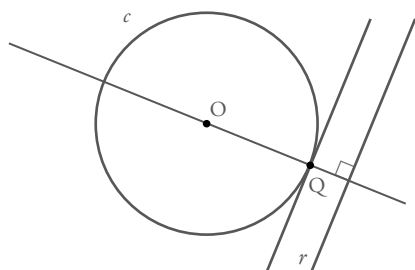
Realiza construcciones que incluyen rectas y circunferencias tangentes en situaciones en las que no se requiere de la utilización de figuras auxiliares.

Por ejemplo, en el siguiente problema:

Trazá una recta tangente a la circunferencia c que sea paralela a la recta r .



El/la estudiante traza la recta perpendicular a la recta r que contiene al punto O y marca uno de sus puntos de intersección con la circunferencia (Q) para determinar un punto de tangencia. Luego traza la recta paralela a r que contiene al punto hallado y afirma que esa recta es tangente a la circunferencia porque, al ser paralela a la recta r , es perpendicular al radio $\overline{OQ}$ y contiene al punto Q (que es el extremo del radio que pertenece a la circunferencia).

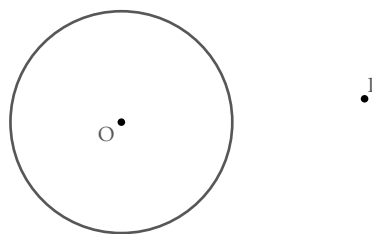


Nivel III

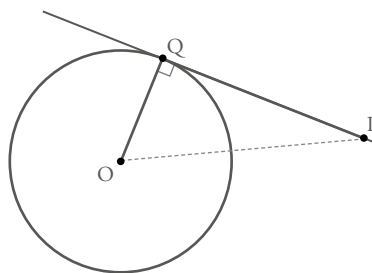
Realiza construcciones que incluyen rectas y circunferencias tangentes en situaciones en las que es necesaria la utilización de figuras auxiliares.

Por ejemplo, en el siguiente problema¹:

Trazá una recta que contenga al punto P y que sea tangente a la circunferencia de centro O .



El/la estudiante realiza una figura de análisis marcando de manera estimada un punto de tangencia Q sobre la circunferencia y reconoce que el ángulo PQO debe ser recto, por lo que los puntos O , P y Q forman un triángulo rectángulo.



El ejemplo continúa en página 137.

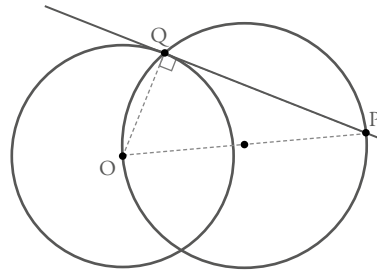
¹ Este problema (incluido en una secuencia didáctica), su resolución y un análisis didáctico enmarcado en una propuesta de enseñanza se encuentra en Cappelletti, G. (coord.) (2008) *Matemática geometría*. Buenos Aires: Ministerio de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Continúa el ejemplo de página 134.

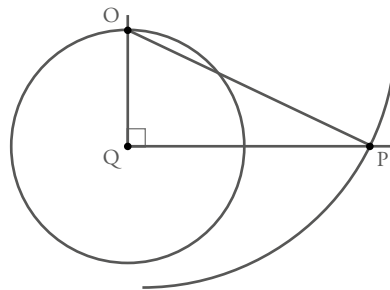
El/la estudiante reconoce que los ángulos ADB y BEA son rectos debido a que las rectas que contienen a los segmentos BD y BE son tangentes a la circunferencia y que, por lo tanto, sus medidas suman 180° . Luego establece que junto con las medidas de $\hat{\alpha}$ y de $\hat{\beta}$ deben sumar 360° , ya que se trata de los ángulos interiores de un cuadrilátero, para concluir que $|\hat{\alpha}| + |\hat{\beta}| = 180^\circ$ y responder afirmativamente la pregunta.

Continúa el ejemplo de página 135.

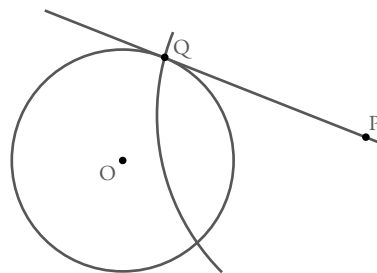
Luego traza una circunferencia de diámetro $\overline{OP}$ y marca el punto Q como una de las intersecciones entre ambas circunferencias. Para finalizar, afirma que el ángulo PQO que queda determinado es recto, por ser un ángulo inscripto en una semicircunferencia.



También podría construir el triángulo PQO “afuera” de la figura, considerando que se trata de un triángulo rectángulo del que se conoce la medida de su hipotenusa $\overline{OP}$ y de uno de sus catetos $\overline{OQ}$.



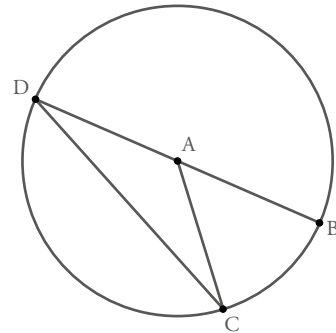
A continuación, traslada la medida del cateto $\overline{PQ}$ trazando una circunferencia con centro en P, y determina el punto Q como la intersección entre ambas circunferencias. Para finalizar, traza la recta PQ.



Halla la medida de ángulos en figuras que incluyen circunferencias mediante el análisis de las propiedades de triángulos.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

En la figura, el punto C pertenece a la circunferencia de centro A y $\overline{BD}$ es uno de sus diámetros. Además, se sabe que $|\widehat{CAB}| = 60^\circ$. Hallá la medida del ángulo CDB.



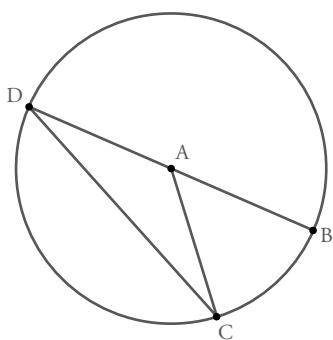
El/la estudiante reconoce que el triángulo DAC es isósceles (debido a que los lados $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ son congruentes entre sí por ser radios de la circunferencia) y que, por lo tanto, la medida de los ángulos ADC y ACD es la misma. Luego halla $|\widehat{DAC}| = 120^\circ$ como el suplemento del ángulo CAB. Para finalizar determina que $|\widehat{CDB}| = |\widehat{DCA}| = 30^\circ$, utilizando la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo: $|\widehat{DAC}| + |\widehat{CDA}| + |\widehat{DCA}| = 180^\circ$.

Nivel II

Establece y fundamenta la relación entre la medida de dos ángulos en figuras que incluyen circunferencias mediante el análisis de las propiedades de triángulos.

Por ejemplo, para resolver este problema:

En la figura, el punto C pertenece a la circunferencia de centro A y $\overline{BD}$ es uno de sus diámetros. ¿Es cierto que la medida del ángulo CDB es la mitad que la del ángulo CAB?



El/la estudiante reconoce que el triángulo DAC es isósceles (debido a que los lados $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ son congruentes entre sí por ser radios de la circunferencia) y que, por lo tanto, la medida de los ángulos ADC y ACD es la misma. Luego establece que

$$|\hat{D}\hat{A}\hat{C}| + |\hat{C}\hat{A}\hat{B}| = 180^\circ = |\hat{D}\hat{A}\hat{C}| + |\hat{A}\hat{D}\hat{C}| + |\hat{A}\hat{C}\hat{D}|$$

en un caso por ser ángulos adyacentes y, en el otro, por ser los ángulos interiores de un triángulo. De esta igualdad concluye que

$$|\hat{C}\hat{A}\hat{B}| = |\hat{A}\hat{D}\hat{C}| + |\hat{A}\hat{C}\hat{D}| = 2 \cdot |\hat{C}\hat{D}\hat{B}|$$

y responde afirmativamente a la pregunta.

También podría determinar que

$$|\hat{C}\hat{A}\hat{B}| = |\hat{A}\hat{D}\hat{C}| + |\hat{A}\hat{C}\hat{D}|$$

aplicando la propiedad de los ángulos exteriores en el triángulo CAD, reconociendo que $\hat{C}\hat{A}\hat{B}$ es uno de ellos.

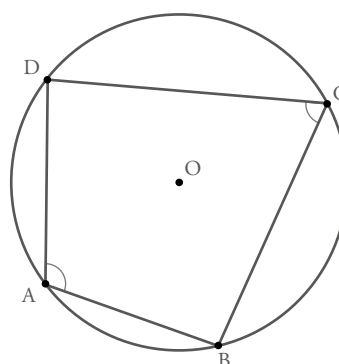
La fila continúa en página 141.

Nivel III

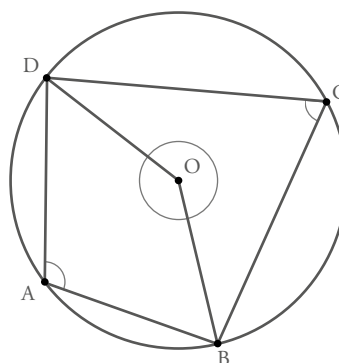
Establece y fundamenta la relación entre la medida de dos ángulos en figuras que incluyen circunferencias, sobre la base de identificar relaciones entre ángulos inscriptos y centrales.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Los puntos A, B, C y D pertenecen a la circunferencia de centro O. ¿Es cierto que $\hat{A}$ y $\hat{C}$ son suplementarios?



El/la estudiante reconoce en primer lugar que tanto $\hat{A}$ como $\hat{C}$ son ángulos inscriptos de una circunferencia. A partir de esta consideración, traza los segmentos OD y OB para marcar los ángulos centrales correspondientes.



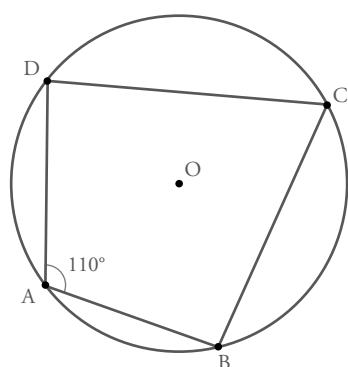
Luego afirma que es cierto que $\hat{A}$ y $\hat{C}$ son suplementarios. Fundamenta que sus medidas suman 180° debido a que la amplitud de cada uno de ellos es la mitad de cada una de las amplitudes de sus ángulos centrales correspondientes, que suman 360° .

Continúa la fila de página 139.

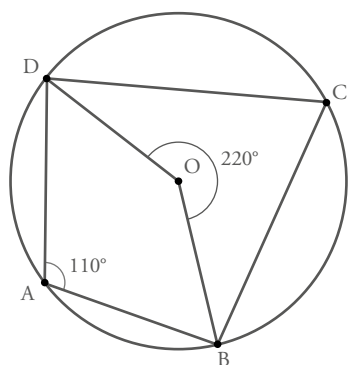
Halla la medida de ángulos en figuras que incluyen circunferencias, estableciendo relaciones entre sus medidas según sean inscriptos o centrales.

Por ejemplo, para resolver este problema:

Los puntos A, B, C y D pertenecen a la circunferencia de centro O. Hallá la medida de $\hat{C}$.



El/la estudiante reconoce en primer lugar que tanto $\hat{A}$ como $\hat{C}$ son ángulos inscriptos de una circunferencia. A partir de esta consideración, traza el ángulo central cóncavo DOB correspondiente a $\hat{A}$, e indica que su amplitud es de 220° , el doble de la del ángulo A.



Luego reconoce que $\hat{C}$ se corresponde con el ángulo central convexo DOB y que, por lo tanto, su amplitud es la mitad. En consecuencia, halla la medida del ángulo central convexo DOB (140°) a partir de que suma 360° con el cóncavo, y concluye que $|\hat{C}| = 70^\circ$.

Actividades para relevar los aprendizajes

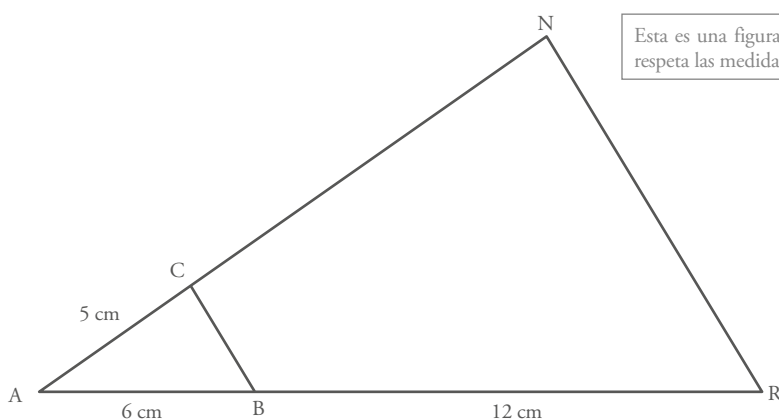
Los ejemplos de problemas que se incluyen a continuación podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos de los/as estudiantes en relación con el eje Geometría y medida.

Semejanza de triángulos y teorema de Thales

Situación. Determinación de las longitudes de los lados y de las áreas de triángulos semejantes

En el siguiente problema, resulta necesario determinar la constante de proporcionalidad entre la longitud de los lados de ambos triángulos para poder establecer relaciones entre otras medidas.

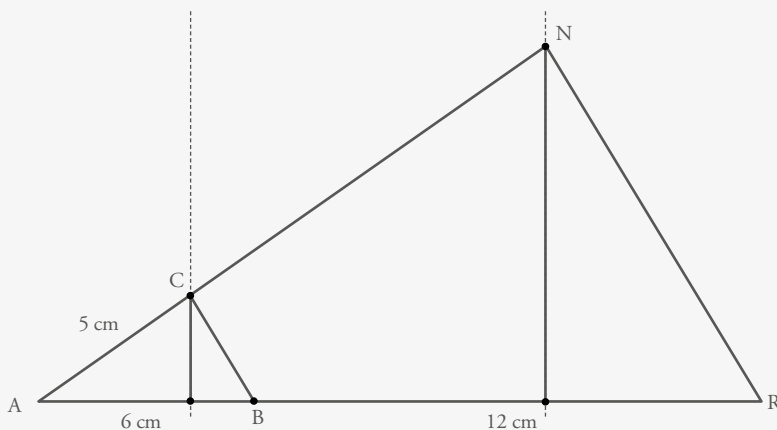
En la figura, $|\overline{AB}| = 6 \text{ cm}$, $|\overline{BR}| = 12 \text{ cm}$, $|\overline{AC}| = 5 \text{ cm}$, y los segmentos BC y RN son paralelos. Hallá el área del triángulo ARN sabiendo que el área del triángulo ABC es de $10,5 \text{ cm}^2$.



Esta es una figura de análisis, no respeta las medidas del problema.

Para este problema, se puede observar si el/la estudiante:

- » Sin reconocer que los triángulos son semejantes, afirma que el área del triángulo ARN es 45 cm^2 por ser el triple del área del triángulo ABC. Reconoce que la longitud de $\overline{AR}$ es el triple que la de $\overline{AB}$ pero lo asocia de manera incorrecta con la relación entre sus áreas.
- » Afirma que el área del triángulo ARN es 45 cm^2 por ser el triple del área del triángulo ABC. Reconoce que los triángulos son semejantes y que, como la longitud de $\overline{AR}$ es el triple que la de $\overline{AB}$, la razón de semejanza es 3, pero lo asocia de manera incorrecta con la relación entre sus áreas.
- » Traza la altura de cada uno de los triángulos (correspondientes a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AR}$), emplea el teorema de Thales y relaciones de semejanza para hallar la medida de la altura de $\triangle ARN$ a partir de la medida de la altura de $\triangle ABC$, y calcula el área pedida. Por ejemplo, al trazar ambas alturas reconoce que quedan determinados dos triángulos rectángulos semejantes y que podría hallar la altura del triángulo ARN a partir de la altura del triángulo ABC si conociera su medida y la razón de semejanza.



Entonces, halla la medida de la altura del triángulo ABC (3,5 cm) a partir de la medida de su área y de su base, y calcula la longitud de $\overline{CN}$ (10 cm) empleando el teorema de Thales con los segmentos AC, AB y BR, debido a que $\overline{BC}$ y $\overline{RN}$ son paralelos. Posteriormente, determina que, como $|\overline{AC}| = 5 \text{ cm}$ y $|\overline{AN}| = 15 \text{ cm}$, la razón de semejanza es 3, y utiliza esta última para calcular la altura del triángulo ARN (10,5 cm). Para finalizar, halla su área: $\frac{18\text{cm} \cdot 10,5\text{cm}}{2} = 94,5 \text{ cm}^2$.

- » Traza la altura de cada uno de los triángulos (correspondientes a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AR}$), emplea relaciones de semejanza para hallar la longitud de la altura de $\triangle ARN$ a partir de la longitud de la altura de $\triangle ABC$, y calcula el área pedida. Por ejemplo, al trazar ambas alturas reconoce que quedan determinados dos triángulos rectángulos semejantes y que podría hallar la altura del triángulo ARN a partir de la de la altura del triángulo ABC si conociera su medida y la razón de semejanza.

Halla entonces la medida de la altura del triángulo ABC (3,5 cm) a partir de la medida de su área y de su base, y calcula la longitud de $\overline{AN}$ (15 cm), identificando que los triángulos ABC y ARN son semejantes entre sí porque tienen los mismos ángulos (comparten el ángulo con vértice en A y tanto los ángulos ABC y ARN como los ángulos ACB y ANR son correspondientes entre paralelas) y que su razón de semejanza es 3. Luego, calcula la medida de la altura de $\triangle ARN$ (10,5 cm) como el triple de la de $\triangle ABC$. Por último, la utiliza para calcular el área: $\frac{18\text{cm} \cdot 10,5\text{cm}}{2} = 94,5 \text{ cm}^2$.

- » Traza la altura de cada uno de los triángulos (correspondientes a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AR}$) y halla el área analizando la variación de la medida de sus lados y de su altura. Por ejemplo, reconoce que tanto los triángulos rectángulos que quedan determinados por las alturas como los triángulos ABC y ARN son semejantes entre sí con la misma razón de semejanza ($r = 3$). El/la alumno/a podría plantear las fórmulas de las áreas y analizar que el área del triángulo ARN se puede obtener multiplicando el área del triángulo ABC por 9:

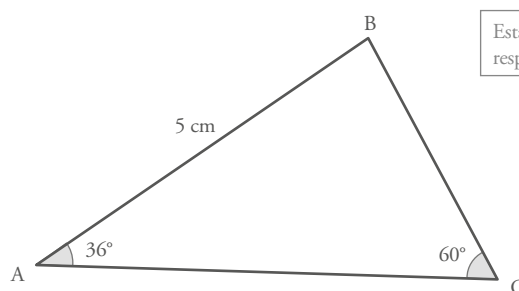
$$\frac{|\overline{AR}| \cdot h_2}{2} = \frac{3 \cdot |\overline{AB}| \cdot 3 \cdot h_1}{2} = 9 \cdot \frac{|\overline{AB}| \cdot h_1}{2} = 9 \cdot 10,5 \text{ cm}^2 = 94,5 \text{ cm}^2$$

Trigonometría

Situación 1. Resolución de triángulos

Al resolver este problema, será necesario que los/as estudiantes consideren las condiciones que permiten utilizar las razones trigonométricas y/o el teorema del seno y evalúen si se cumplen en la figura, analizando sus características y propiedades.

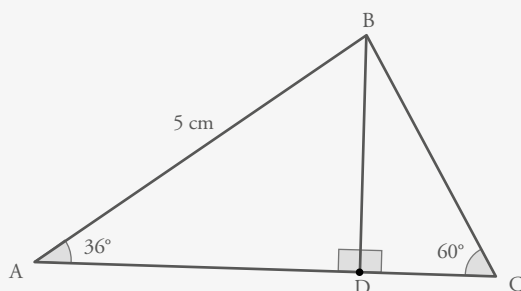
Hallá la longitud del lado $\overline{BC}$ del triángulo.



Esta es una figura de análisis, no respeta las medidas del problema.

Para este problema, se puede observar si el/la estudiante:

- » Utiliza el seno de manera incorrecta debido a que no considera que solo es posible emplearlo en triángulos rectángulos. Por ejemplo, plantea la relación $\text{sen}(36^\circ) = \frac{|\overline{BC}|}{5 \text{ cm}}$ y resuelve.
- » Utiliza las razones trigonométricas de manera correcta, para lo cual debe trazar elementos auxiliares. Por ejemplo, traza un segmento BD perpendicular a $\overline{AC}$, de manera que queden formados dos triángulos rectángulos.



Luego calcula la longitud de $\overline{BD}$ empleando el seno de 36° . Por último, halla la medida del lado $\overline{BC}$ empleando nuevamente el seno, pero planteando la relación entre el ángulo de 60° , el lado $\overline{BC}$ y la longitud del segmento BD calculada anteriormente.

- » Emplea el teorema del seno considerando que se conoce la longitud del lado $\overline{BC}$ y la amplitud del ángulo opuesto y, además, la amplitud del ángulo opuesto al lado del que se quiere calcular la longitud. Por ejemplo, plantea la relación $\frac{5 \text{ cm}}{\text{sen}(60^\circ)} = \frac{|\overline{BC}|}{\text{sen}(36^\circ)}$ y la utiliza para calcular la longitud del lado $\overline{BC}$.

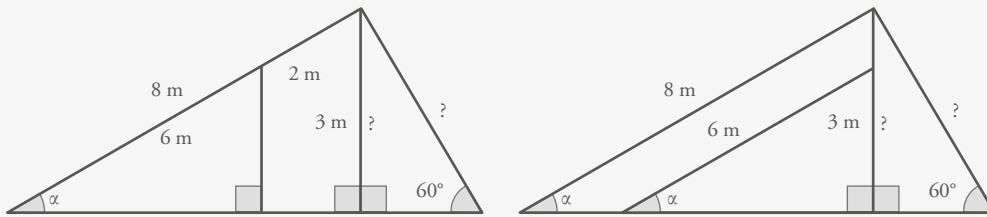
Situación 2. Modelización de situaciones usando triángulos

Para comenzar a resolver este problema los/as estudiantes deberán interpretar la situación y realizar un esquema que la represente, para luego poner en juego estrategias que tengan disponibles referidas a resolución de triángulos.

Con el propósito de transportar materiales por medio de una carretilla, se construyó una rampa de 6 m de longitud que alcanzaba una altura de 3 m. Luego, para poder lograr una mayor altura, la rampa se prolongó 2 m sin modificar su ángulo con respecto al piso.

- a) ¿Hasta qué altura se pueden subir los materiales por la nueva rampa?
- b) Si se quiere construir otra rampa para alcanzar la misma altura que la rampa de 8 m de longitud, pero desde otra dirección, ¿cuál debe ser su longitud si debe formar un ángulo de 60° con respecto al piso?

Para este problema se puede observar si el/la estudiante logra modelizar la situación o parte de ella empleando triángulos de manera adecuada, por ejemplo, mediante esquemas como los siguientes.



Para el ítem a) se puede observar si el/la estudiante:

- » Afirma que se pueden subir materiales hasta una altura de 5 m porque le suma 2 m a la altura que alcanzaba la rampa anterior, sin considerar que las longitudes aumentan de manera proporcional.
- » Reconoce que los triángulos que representan las rampas de 6 m y 8 m son semejantes entre sí, plantea las razones entre sus lados y halla la altura de la nueva rampa.

$$\frac{8 \text{ m}}{6 \text{ m}} = \frac{\text{altura}}{3 \text{ m}}$$

- » Reconoce que tanto el ángulo α como el seno del ángulo no cambian, por lo que se mantiene la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa de los triángulos que representan cada una de las rampas. Luego utiliza esta constante para hallar la medida de la altura de la rampa.

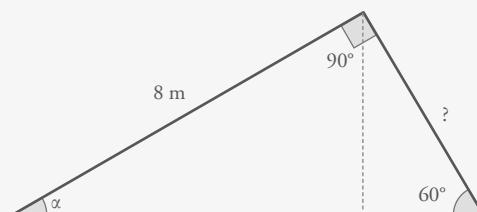
$$\text{sen}(\hat{\alpha}) = \frac{3 \text{ m}}{6 \text{ m}} = \frac{1}{2} = \frac{\text{altura}}{8 \text{ m}}$$

A partir de reconocer las mismas propiedades, el/la alumno/a también podría determinar que en el triángulo que representa la primera rampa la longitud de la hipotenusa es el doble que la del cateto opuesto, y utilizar esta relación para calcular la altura de la nueva rampa.

- » Halla la medida del ángulo α y luego la utiliza para calcular la medida de la altura empleando razones trigonométricas. Posiblemente, este/a alumno/a necesite operar con valores concretos, o bien no haya podido establecer que la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto de cada uno de los triángulos se conserva, sin importar la medida específica del ángulo.

Es probable que las resoluciones del ítem b) estén condicionadas por las medidas halladas en el ítem anterior. Se puede observar si el/la estudiante:

- » Habiendo hallado $|\hat{\alpha}| = 30^\circ$, afirma que la rampa debe medir 4 m, la mitad de lo que mide la rampa del ítem anterior. Este/a alumno/a reconoce de manera correcta que para alcanzar la misma altura con un ángulo de mayor amplitud se necesita menor recorrido. Sin embargo, lo interpreta de manera incorrecta como una relación de proporcionalidad inversa. Como en este caso la amplitud del ángulo es de 60° , que es el doble de 30° , entonces la rampa debe medir la mitad.
- » Utiliza la medida de la altura (4 m) y la medida del ángulo (60°) para plantear una ecuación empleando el seno y hallar la medida de la rampa. Por ejemplo: $\text{sen}(60^\circ) = \frac{4 \text{ m}}{x}$.
- » A partir de producir un esquema como el que se muestra y de haber calculado $|\hat{\alpha}| = 30^\circ$, determina que entre las dos rampas y el piso se forma un triángulo rectángulo, y utiliza la tangente de 60° o de 30° para hallar la medida de la rampa que se solicita.



- » A partir de producir un esquema en el que las dos rampas y el piso forman un triángulo y de contar con la medida de α , utiliza el teorema del seno para hallar la medida de la rampa que se solicita.

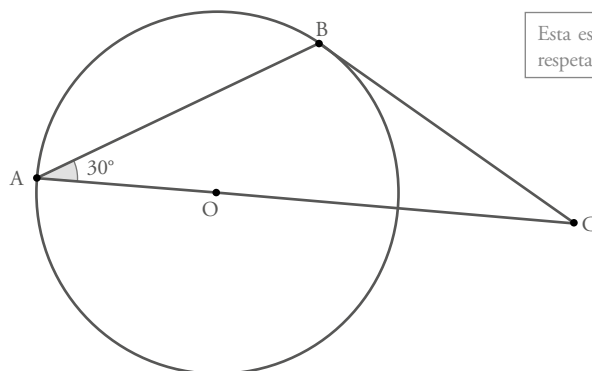
Ángulos inscritos y posiciones relativas entre una recta y una circunferencia

Situación. Construcción de rectas tangentes y análisis de ángulos inscritos y centrales

Este problema trata de la copia de una figura, que es un tipo de actividad que los/as alumnos/as llevan a cabo desde la escuela primaria y seguramente han realizado durante el Ciclo Básico. Por este motivo, es esperable que los/as estudiantes analicen la figura antes de comenzar la copia. En ese sentido, esta figura permite reconocer sus propiedades desde distintas perspectivas y poniendo en juego distintos conocimientos relacionados con la clasificación y los ángulos de triángulos, rectas tangentes a circunferencias y ángulos inscritos y centrales.

Construí una figura como la siguiente en la que:

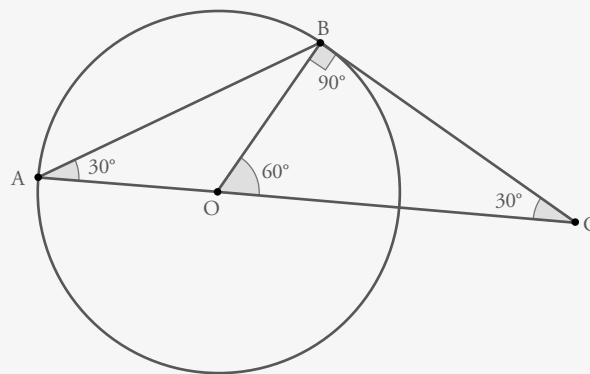
- › O es centro de la circunferencia.
- › A pertenece a la circunferencia.
- › La recta que contiene al segmento BC es tangente a la circunferencia en el punto B.
- › O pertenece al segmento AC.



Para este problema se puede observar si el/la estudiante:

- » Copia la figura trasladando medidas con regla, transportador y/o compás, sin poner en juego propiedades ni para construir ni para verificar que se cumplan las propiedades descritas.
- » Traza los elementos de la figura sin realizar un análisis previo y sin poner en juego propiedades. Por ejemplo, traza una circunferencia de centro O con un radio arbitrario, marca un punto A sobre ella y traza una semirrecta con origen en A que contiene al punto O. Luego marca un ángulo de 30° con vértice en A usando el transportador, y llama B al punto de intersección entre uno de los lados y la circunferencia. Para finalizar, traza una recta apoyado en su percepción de manera que “toque” la circunferencia solamente en el punto B, y marca el punto de intersección entre esta recta y la semirrecta AO, el punto C.
- » Traza los elementos de la figura sin realizar un análisis previo exhaustivo, poniendo en juego algunas propiedades. Por ejemplo, traza una circunferencia de centro O con un radio arbitrario, marca un punto A sobre ella y traza una semirrecta con origen en A que contiene al punto O. Luego marca un ángulo de 30° con vértice en A usando el transportador, y llama B al punto de intersección entre uno de los lados y la circunferencia. Para trazar la recta tangente, marca el radio OB y, usándolo como uno de sus lados, construye un ángulo recto empleando transportador o escuadra. Finaliza la construcción marcando el punto de intersección entre esta recta y la semirrecta AO, el punto C. Podría ser que el/la alumno/a determine que el ángulo OBC debe ser recto antes de comenzar la construcción, o que lo haga al momento de trazar la tangente.

- » Realiza un análisis previo de la figura y deduce algunas de sus propiedades, que utiliza luego para realizar la construcción. Por ejemplo, realiza una figura de análisis que incluye al radio OB y determina que el ángulo OBC debe ser recto debido a que la recta que contiene al segmento BC es tangente a la circunferencia. Podría determinar también que $|\widehat{BOC}| = 60^\circ$, ya sea como consecuencia de que es el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito BAC , o luego de reconocer que el triángulo AOB es isósceles, de completar la medida de sus ángulos interiores y de interpretar que $\widehat{BOC}$ es adyacente a $\widehat{AOB}$. Con respecto a $\widehat{BCO}$, podría determinar que su amplitud es de 30° a partir de las restantes medidas de los ángulos interiores del triángulo rectángulo OBC . Luego de obtener todas estas medidas, podría reconocer que el triángulo ABC es isósceles.



Luego de realizar este análisis y a partir de las propiedades reconocidas, el/la alumno/a podría llevar a cabo la construcción de diversas maneras.

Estadística y probabilidades

Para estas progresiones, hemos considerado una grilla para probabilidades. No hemos incluido Estadística debido a que los contenidos no permitían construir una progresión de aprendizajes, aunque por supuesto debe ser objeto de enseñanza.

Probabilidades

La progresión considera espacios muestrales equiprobables o no, sucesos mutuamente excluyentes e independientes y probabilidad condicional.

Probabilidades

Ciclo Básico

Ciclo Orientado

Nivel I

Reconoce cuándo un espacio muestral es o no es equiprobable.

Por ejemplo, para resolver un problema como el siguiente:

Se tiran dos dados de manera simultánea y se considera la suma de los puntos de cada uno. ¿Es cierto que la probabilidad de obtener 7 puntos es la misma que la de obtener 9?

Responde que si bien 7 y 9 son dos resultados posibles, la probabilidad de obtener 7 puntos es mayor que la de obtener 9 porque hay más casos en los que la suma es 7.

Calcula probabilidades por medio de la definición clásica de probabilidad, para lo cual considera espacios muestrales equiprobables.

Por ejemplo, al resolver el siguiente problema:

Se tiran dos dados de manera simultánea y se considera la suma de los puntos de cada uno. Calcula la probabilidad de obtener 10.

El/la estudiante considera como posibles resultados del experimento las duplas de puntos que se pueden conseguir a partir del número obtenido en cada dado: (1; 1), (1; 2), (1; 3), etc. No considera como espacio muestral los valores correspondientes a la suma de los puntos debido a que en ese caso los resultados no son equiprobables.

Obtiene así que la cantidad de casos totales es 36, mientras que la cantidad de casos en los que la suma es 10 es 3: (4; 6), (5; 5) y (6; 4). A partir de estos valores, calcula la probabilidad de que la suma sea de 10 puntos por medio del cociente: $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

- Definición clásica de probabilidad. Sucesos equiprobables.

- Sucesos mutuamente excluyentes.
- Sucesos independientes y probabilidad condicional.

Ciclo Orientado

Nivel II

Reconoce que dos sucesos son mutuamente excluyentes y utiliza la propiedad que afirma que la probabilidad de la unión de dos sucesos de este tipo es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

Por ejemplo, al resolver este problema:

En una heladera hay helados de palito de diferentes gustos, todos envasados de la misma manera, sin que se pueda ver el interior. La mitad son de agua y la otra mitad, de crema. Además, se sabe que las dos terceras partes del total son de gustos frutales y que todos los que son de agua son también de fruta.

Si se saca un helado al azar de la heladera, ¿cuál es la probabilidad de que sea frutal y de crema?

El/la estudiante reconoce que el suceso asociado a que el helado sea frutal y de crema es mutuamente excluyente con el suceso asociado a que el helado sea frutal y de agua, y que la probabilidad de este último es $\frac{1}{2}$. Además, como ambos forman el suceso que representa que el helado sea frutal, la probabilidad de este suceso ($\frac{2}{3}$) es la suma de las probabilidades de los otros dos. En consecuencia, halla la probabilidad pedida por medio del cálculo $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

También podría realizar un planteo como el siguiente.

$$P(F \cap C) + P(F \cap A) = P(F)$$

$$P(F \cap C) + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$P(F \cap C) = \frac{1}{6}$$

En donde $P(C)$ es la probabilidad de que el helado sea de crema, $P(A)$ la probabilidad de que sea de agua y $P(F)$ de que sea frutal.

Nivel III

Calcula la probabilidad de la intersección de dos sucesos A y B, para lo cual reconoce si son o no independientes. Utiliza la propiedad $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ si son independientes y $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$ si no lo son.

Por ejemplo para resolver este problema:

Una instancia de un juego de azar consta de elegir un número del 1 al 6 y tirar un dado dos veces consecutivas. Para ganar esa instancia, es necesario que salga el número elegido en alguna de las dos tiradas, pero también que no salga en ambas simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de ganar esa instancia?

El/la estudiante reconoce que, habiendo elegido un número, el suceso asociado a que salga ese número en la primera tirada del dado es independiente del suceso asociado a que no salga ese número en la segunda tirada, y viceversa. En consecuencia, calcula la probabilidad de la intersección de ambos sucesos como el producto de la probabilidad de cada uno: $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$. Luego halla la probabilidad de ganar mediante la suma $\frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{5}{18}$ (o multiplicando por 2) debido a que los dos sucesos que representan los casos en los que se gana son mutuamente excluyentes.

O bien, para resolver este problema:

En una heladera hay helados de palito de diferentes gustos, todos envasados de la misma manera, sin que se pueda ver el interior. La mitad son de agua y su envase es de color rojo. La otra mitad son de crema y su envase es de color

El problema continúa en página 157.



Ciclo Básico	Ciclo Orientado
	Nivel I

--	--

Nivel II

Reconoce que en ocasiones es más conveniente calcular probabilidades usando sucesos complementarios.

Por ejemplo, para resolver el siguiente problema:

¿Cuál es la probabilidad de que salgan números diferentes al arrojar dos dados de manera simultánea?

El/la estudiante calcula primero la probabilidad de que salgan dos números iguales (el suceso complementario), estableciendo que se trata de la suma de las probabilidades de que salgan dos 1, dos 2, dos 3, etc.; es decir, 6 veces $\frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Luego, calcula la probabilidad pedida por medio del cálculo $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Nivel III

Continúa el problema de página 155.

blanco. Además, se sabe que todos los que son de agua son frutales y que $\frac{1}{3}$ de los que son de crema son también frutales.

Si se saca un helado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea frutal de crema?

El/la estudiante reconoce que el suceso asociado a que el helado sea frutal y el suceso asociado a que sea de crema no son independientes. Establece entonces que una manera de calcular la probabilidad de la intersección de ambos sucesos consiste en considerar primero la probabilidad de que el helado sea de crema y luego la probabilidad de que sea frutal, dado que ya es de crema. Lo escribe de la siguiente manera y obtiene el valor buscado.

$$P(C \cap F) = P(C) \cdot P(F/C)$$

$$P(C \cap F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$P(C \cap F) = \frac{1}{6}$$

En donde $P(C)$ es la probabilidad de que el helado sea de crema y $P(F)$ la probabilidad de que sea frutal.

Calcula la probabilidad condicional de sucesos dependientes.

Por ejemplo, para resolver este problema:

En una heladera hay helados de palito de diferentes gustos, todos envasados de la misma manera, sin que se pueda ver el interior. La mitad son de agua y su envase es de color rojo. La otra mitad son de crema y su envase es de color blanco. Además, se sabe que todos los que son de agua son frutales y que $\frac{1}{6}$ del total de los helados son de crema y de gusto frutal.

El problema continúa en página 159.



Ciclo Básico	Ciclo Orientado
	Nivel I

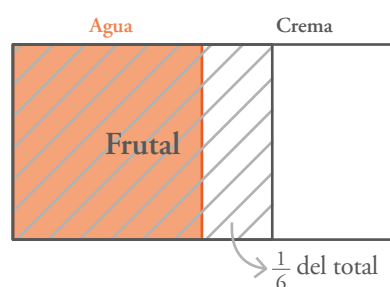
--	--



Continúa el problema de página 157.

Si se saca un helado de crema, ¿cuál es la probabilidad de que sea frutal?

El/la estudiante reconoce que el suceso asociado a que el helado sea frutal y el suceso asociado a que sea de crema son dependientes entre sí, y realiza un esquema como el siguiente.



Luego interpreta que, al calcular la probabilidad de que el helado sea frutal dado que es de crema, se está calculando la probabilidad de la intersección de ambos sucesos referida a que el helado sea de crema, como un cambio de espacio muestral. Por lo tanto, calcula la probabilidad pedida por medio del cociente

$$P(F/C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

En donde $P(C)$ es la probabilidad de que el helado sea de crema y $P(F)$ la probabilidad de que sea frutal.

Actividades para relevar los aprendizajes

Los ejemplos de problemas que se incluyen a continuación podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos de los/as estudiantes en relación con el eje Estadística y probabilidades.

Probabilidades

Situación 1. Cálculo de probabilidades

El siguiente problema permite evaluar si los/as estudiantes recurren a estrategias de conteo para hallar probabilidades mediante su definición clásica o si definen sucesos elementales y les asignan probabilidades para utilizar algunas de sus propiedades.

Esta es la tabla de posiciones de los tres primeros puestos del campeonato de fútbol de los/as estudiantes de 5.º año de un distrito escolar.

Puesto	Equipo	Puntos
1°	Escuela 20	15
2°	Escuela 18	14
3°	Escuela 4	13

Se disputa la última fecha del campeonato y los equipos de las tres primeras posiciones no juegan entre sí (juegan sus respectivos partidos frente a otros equipos). Si un equipo gana un partido se le asignan 3 puntos; si empata, 1 punto; y, si pierde, no se le asigna ninguno. Suponiendo que todos los equipos tienen la misma probabilidad de ganar, de empatar y de perder, calculá la probabilidad de que salga campeón (sin empatar en puntos) el equipo de la escuela 20.

Para este problema se puede observar si el/la estudiante:

- » Considera posibles resultados de los partidos sin tener en cuenta la equiprobabilidad que se deriva de la exhaustividad en la descripción de los casos. Por ejemplo, describe estos posibles casos que se muestran en la tabla siguiente y emplea la definición clásica de probabilidad para afirmar que la probabilidad de que salga campeón el equipo de la escuela 20 es $\frac{3}{7}$.

Resultados de los partidos	Resultado del equipo de la escuela 20
Gana el equipo de la escuela 20.	Campeón
Empata el equipo de la escuela 20 y gana el de la escuela 18.	No campeón
Empata el equipo de la escuela 20 y gana el de la escuela 4.	No campeón
Empata el equipo de la escuela 20 y no gana ni el equipo de la escuela 18 ni el de la 4.	Campeón
Pierde el equipo de la escuela 20 y gana o empata el de la escuela 18.	No campeón
Pierde el equipo de la escuela 20 y gana el de la escuela 4.	No campeón
Pierde el equipo de la escuela 20, pierde el de la escuela 18 y no gana el de la 4.	Campeón

- » Considera las combinaciones posibles de resultados de los partidos y reconoce cuáles son los casos en los que el equipo de la escuela 20 sale campeón. Por ejemplo, realiza una lista con los 27 casos posibles y evalúa en cuáles el equipo de la escuela 20 obtiene mayor puntaje que los demás. Emplea la definición clásica de probabilidad para calcular la solicitada en el enunciado.
- » Considera las combinaciones posibles de resultados de los partidos y reconoce cuáles son los casos en los que el equipo de la escuela 20 sale campeón. Por ejemplo, describe los siguientes sucesos para los cuales el equipo de la escuela 20 es campeón, y utiliza conocimientos de combinatoria para calcular la cantidad de casos asociados a cada uno y determinar que la cantidad de casos totales es 27:

Suceso	Cantidad de casos
Gana el equipo de la escuela 20 sin importar los otros resultados.	$3 \cdot 3 = 9$
Empata el equipo de la escuela 20 y no gana ninguno de los otros dos equipos.	$2 \cdot 2 = 4$
Pierde el equipo de la escuela 20, pierde el de la 18 y no gana el de la 4.	2

Emplea la definición clásica de probabilidad para afirmar que la probabilidad de que salga campeón el equipo de la escuela 20 es $\frac{15}{27}$.

- » Describe sucesos mutuamente excluyentes para los que el equipo de la escuela 20 sale campeón y calcula la probabilidad solicitada en el enunciado del problema como la suma de las probabilidades de cada uno de ellos. Por ejemplo, confecciona un cuadro como el siguiente:

Suceso	Probabilidad
Gana el equipo de la escuela 20 sin importar los otros resultados	$\frac{1}{3}$
Empata el equipo de la escuela 20 y no gana ninguno de los otros dos equipos.	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$
Pierde el equipo de la escuela 20, pierde el de la 18 y no gana el de la 4.	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

Luego, calcula la probabilidad solicitada: $\frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{15}{27}$.

Es importante observar también si el/la estudiante explicita las propiedades que pone en juego. Por ejemplo, que es válido sumar las probabilidades porque los sucesos son mutuamente excluyentes. O bien, que en los sucesos de la tabla es válido multiplicar las probabilidades porque los resultados de los partidos de los diferentes equipos están asociados a sucesos independientes.

Situación 2. Probabilidad condicional

Al resolver este problema será necesario que los/as estudiantes identifiquen en qué casos se trata de probabilidades condicionales y en qué casos de probabilidades de sucesos simultáneos.

El área de recursos humanos de una empresa está analizando el ausentismo de sus empleados/as y obtiene la siguiente información: $\frac{1}{5}$ de los/as empleados/as se levanta más tarde de lo que debería para llegar a tiempo. De este grupo, $\frac{3}{4}$ llegan efectivamente tarde al trabajo. Por otra parte, $\frac{1}{10}$ se levanta a horario y, de todas maneras, llega tarde debido a inconvenientes con el tránsito de la ciudad.

¿Cuál es la probabilidad de que un empleado que se haya levantado temprano llegue a tiempo?

Para este problema se puede observar si el/la estudiante:

- » No reconoce algunas de las probabilidades que son datos o propone calcular el problema sin probabilidades condicionales. Por ejemplo, identifica de manera incorrecta que $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{10}$ son probabilidades asociadas a que un/a empleado/a llegue tarde, sin tener en cuenta la condicionalidad. Afirma que la probabilidad de que un/a empleado/a llegue tarde es $\frac{3}{4} + \frac{1}{10} = \frac{17}{20}$ y que, entonces, la probabilidad de que llegue temprano es $1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$. Nuevamente, no reconoce que la pregunta se refiere a una probabilidad condicional.
- » Confunde la probabilidad condicional con la probabilidad de que dos sucesos ocurran de manera simultánea. O bien, interpreta mal la pregunta del problema en este sentido. Por ejemplo, podría suceder que halle de manera incorrecta la probabilidad de que un/a empleado/a llegue a tiempo dado que se levantó temprano como el complemento de que se levantó a horario y llegó tarde por medio del cálculo $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.
- » Reconoce que la pregunta se refiere a una probabilidad condicional y obtiene los datos que necesita para calcular a partir del enunciado del problema y aplicando propiedades. Por ejemplo, define $P(L)$ como la probabilidad de que un/a empleado/a se levante temprano, $P(T)$ como la probabilidad de llegue a tiempo y $P(T/L)$ como la probabilidad de que llegue a tiempo dado que se levantó temprano, para plantear la fórmula y resolver:

$$P(L \cap \bar{T}) = P(L) \cdot P(\bar{T}/L)$$

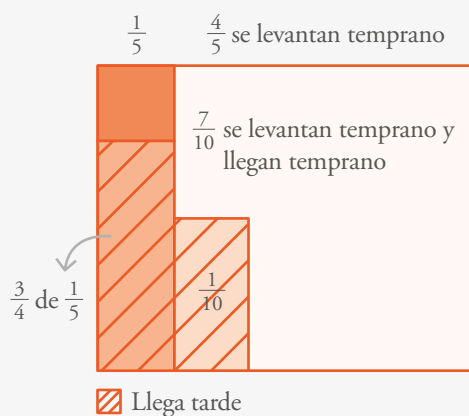
Halla $P(L) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ como el complemento del suceso asociado a que un/a empleado/a se levante tarde.

$$\begin{aligned}\frac{1}{10} &= \frac{4}{5} \cdot P(\bar{T}/L) \\ P(\bar{T}/L) &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$\text{Finaliza hallando } P(T/L) = 1 - P(\bar{T}/L) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Podría ser que desarrolle las mismas estrategias sin la utilización de un lenguaje simbólico formal.

- » Reconoce que la pregunta se refiere a una probabilidad condicional e interpreta que, al calcular la probabilidad de que un/a empleado/a llegue a tiempo dado que se levantó temprano, se está calculando la probabilidad de la intersección de ambos sucesos referida a que se haya levantado temprano, como un cambio de espacio muestral. Por ejemplo, representa la situación mediante un esquema como el siguiente y halla la probabilidad de que un/a empleado/a se levante temprano y llegue a tiempo por medio del cálculo $1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$.



Luego, define $P(L)$ como la probabilidad de que un/a empleado/a se levante temprano, $P(T)$ como la probabilidad de llegue a tiempo y $P(T/L)$ como la probabilidad de que llegue a tiempo dado que se levantó temprano, para calcular la probabilidad pedida por medio del cociente:

$$P(T/L) = \frac{P(T \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{7}{2}$$

Situaciones didácticas e intervenciones docentes

Introducción

En este apartado se presentan situaciones de enseñanza acompañadas de un análisis matemático y didáctico focalizado en las intervenciones docentes que puedan resultar fértiles para lograr aprendizajes en los/as estudiantes. Estas situaciones no constituyen una secuencia de actividades, sino que son ejemplos de algunos problemas que se pueden trabajar en clase. Ciertamente, pueden formar parte de una secuencia que sería necesario construir a partir de esos problemas, sumando otras situaciones que los enriquezcan, completen y diversifiquen, teniendo en cuenta que cada situación, cada grupo de alumnos/as y cada institución son particulares.

Para los fines de este documento se han seleccionado problemas que, en algunos casos, responden al propósito de introducir a los/as estudiantes en un tipo de situación que los desafiará a construir nuevos conocimientos. Por consiguiente, están previstos como uno de los primeros acercamientos al objeto matemático que se intenta que aprendan. Claro está que el aprendizaje no se da como consecuencia de resolver solamente uno o dos problemas referidos a un concepto. Es necesaria una interacción sostenida de el/la alumno/a con distintos problemas que requieran de ese objeto, así como instancias de trabajo individual donde reinvertir los conocimientos, sistematizaciones, momentos de estudio individuales y colectivos, etcétera. Ubicar los conocimientos en la perspectiva de un proceso es central para organizar la tarea de enseñanza. Por estas razones, los problemas presentados junto con instancias de trabajo anteriores o posteriores no agotan la cantidad ni el tipo de trabajo que es necesario se despliegue en las aulas. Se proponen otros problemas para reinvertir y sistematizar conocimientos ya construidos o en vías de construcción.

Como parte de la propuesta didáctica se presenta la organización de la clase prevista para la resolución de cada problema. Las distintas modalidades –individual, en parejas, en pequeños grupos, trabajo colectivo– dependen del trabajo matemático que propone cada problema, de los conocimientos que moviliza y de las interacciones que el/la docente planifica promover.

En algunos casos, se propone un trabajo individual para que el/la alumno/a intente resolver a partir de sus conocimientos disponibles. Las resoluciones o relaciones que un/a estudiante elabore a partir del trabajo con el problema serán un insumo para el debate con otros. De esa forma, cada uno llega al grupo con algunas hipótesis que puede poner a consideración de los demás.

Las situaciones de reinversión generalmente demandan un trabajo individual, es decir requieren de conocimientos ya trabajados y con los que se busca que el/la estudiante logre una mayor familiarización. Estas situaciones pueden ser propuestas para trabajar en la clase o como tarea.

Cuando los problemas son más complejos y, por lo tanto, se espera que su resolución requiera del intercambio con otro, se sugiere trabajarlos en parejas o pequeños grupos. Se crea así un espacio para que los/as estudiantes expliciten sus conocimientos y compartan estrategias.

Las instancias colectivas tienen diferentes propósitos. En algunos casos se proponen como un momento para socializar ciertos conocimientos, estrategias o recordar definiciones o propiedades necesarias para resolver un problema en particular. Las estrategias que el/la profesor/a elige socializar son aquellas que mejor se adaptan al propósito de la clase y a lo próximo por aprender. Como espacio de trabajo, estas instancias no consisten en un momento de corrección donde todos/as los/as alumnos/as cuentan cómo pensaron y resolvieron una situación, sino que se trata de promover un intercambio que permita focalizar en aquellas estrategias y/o resoluciones que se quiere destacar y retener, según el proyecto de enseñanza.

En otras ocasiones, se plantean problemas para resolver de manera colectiva. En general, estas situaciones proponen reutilizar conocimientos previamente construidos, promueven nuevas reflexiones y relaciones, ayudan a sistematizar propiedades y relaciones trabajadas, etcétera. La planificación de estas instancias debe ser cuidadosa para que convoque al total de los/as alumnos/as y no se transforme en un intercambio con unos/as pocos/as. En función de su estado de conocimientos, algunos/as podrán aportar más a la discusión, otros/as plantearán preguntas o dudas; el/la docente podrá difundir aquellas estrategias que considera deben ser retenidas, mientras que algunos/as estudiantes podrán adoptar procedimientos de resolución propuestos por otros/as. El intercambio colectivo también es un espacio propicio para analizar estrategias vinculadas a concepciones erróneas habituales de los/as estudiantes. La explicitación de los errores y el análisis que ayude a comprender por qué no resulta una resolución correcta permite delimitar el campo de validez de un conocimiento, así como las estrategias más adaptadas para resolver problemas que requieren de él.

La enseñanza de la matemática exige a el/la docente la gestión colectiva de la clase, pero también implica organizar el estudio de los/as alumnos/as de manera que, progresiva e individualmente, puedan asumir cada vez mayores responsabilidades en su desempeño como estudiantes. De tal modo, enseñar a estudiar matemática es una tarea transversal a todos los contenidos de la asignatura, que supone la definición de momentos para la exploración de situaciones y formulación de hipótesis, su puesta a prueba en el grupo y la comparación con estrategias de resolución alternativas, el análisis de diferentes tipos de errores y también aquellos espacios destinados a la generalización e institucionalización de los saberes, así como el trabajo individual destinado a la reinversión de los conocimientos alcanzados en nuevos contextos. En función de esto, es fundamental planificar el

desarrollo de las diversas instancias para organizar las tareas del aprendizaje, y permitir a cada estudiante profundizar o detenerse en cada una de ellas según sea necesario. A lo largo de este apartado se proponen ejemplos de intervenciones destinadas a gestionar los espacios colectivos de trabajo, previendo el carácter heterogéneo de los conocimientos alcanzados por los/as estudiantes, y atendiendo, a la vez, a la importancia que revisten para el logro de los aprendizajes propuestos.

Contenidos y aspectos de la enseñanza trabajados en este apartado

Números y álgebra

- » Problemas que involucran variaciones y permutaciones.
- » Problemas que involucran el valor absoluto de una expresión.

Funciones y álgebra

Función cuadrática

- » Problemas que se modelizan mediante funciones cuadráticas.
- » Determinación de la existencia y la cantidad de soluciones en ecuaciones cuadráticas del tipo $f(x) = k$.

Función polinómica

- » Estudio de la función polinómica.
- » Producción de fórmulas a partir de sus raíces.

Función exponencial y función logarítmica

- » Problemas que se modelizan mediante funciones exponenciales.
- » Estudio de las funciones exponenciales: ceros, crecimiento, decrecimiento, imagen, positividad, negatividad, asíntota.
- » Estudio de las funciones logarítmicas: ceros, crecimiento, decrecimiento, imagen, positividad, negatividad, asíntota.
- » Equivalencia de fórmulas y uso de propiedades.

Función trigonométrica

- » Razones trigonométricas en triángulos rectángulos y funciones trigonométricas.
- » Análisis y búsqueda de soluciones de ecuaciones trigonométricas.
- » Problemas que se modelizan mediante funciones trigonométricas.

Geometría y medida

- » Modelización de problemas que se pueden resolver mediante el teorema de Thales y/o la semejanza de triángulos.

- » Ángulos inscritos en una semicircunferencia.
- » Rectas tangentes a una circunferencia.

Estadística y probabilidades

- » Problemas que involucran la probabilidad del espacio muestral y la de un suceso no elemental.
- » Problemas que involucran la noción de independencia de sucesos y la probabilidad condicional.

Números y álgebra

La enseñanza de Números y álgebra adquiere en el Ciclo Orientado un carácter más reflexivo. No son muchos los contenidos nuevos que se agregan, sino que se vuelve sobre algunos trabajados en el Ciclo Básico para resignificarlos, mientras que otros son tratados de manera transversal.

Por ejemplo, las sucesiones aritméticas y geométricas son ejemplos de situaciones de producción de fórmulas que ya fueron trabajadas. En este ciclo se podrá hacer un trabajo sobre su caracterización y sobre la sistematización de algunas de sus particularidades.

Otro ejemplo lo constituyen los números irracionales. El *Diseño Curricular* propone analizar tipos de números irracionales, ya sea a través de raíces, números como π o e o aquellos que se representan a través de expresiones decimales que claramente no tienen un período, indicando su regla de formación. El trabajo con estos números plantea necesariamente la problemática de la aproximación por truncamiento o redondeo, y el análisis del error que se produce al hacerlo. En estas progresiones consideramos estos contenidos como transversales a los demás, y dejamos la discusión sobre estos temas para ser tratada al abordar la enseñanza de los demás ejes.

Intervenciones de enseñanza

A continuación, se presentan problemas acompañados de posibles resoluciones, con el objetivo de ofrecer intervenciones de enseñanza que consideran dos asuntos principales a abordar con los/as estudiantes: *Problemas que involucran variaciones y permutaciones* y *Problemas que involucran el valor absoluto de una expresión*.

Problemas que involucran variaciones y permutaciones

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Reconocer si un problema puede ser resuelto utilizando permutaciones.
- Analizar si un problema de combinatoria conviene ser resuelto de manera directa o a partir de su complemento.
- Analizar y cuantificar los casos bajo los cuales se cumple una determinada condición.

Se quieren formar números de 5 cifras distintas con los dígitos 1, 2, 4, 6 y 7.

- ¿Cuántos números diferentes es posible formar?
- ¿Cuántos números diferentes es posible formar si el 6 y el 7 no pueden tener ubicaciones contiguas?

Recordemos que los problemas de combinatoria comienzan a estudiarse en el segundo ciclo de la escuela primaria, por lo que los/as estudiantes deberían estar familiarizados con aquellos que pueden resolverse con permutaciones o variaciones con o sin repetición, aunque no dispongan de los nombres para clasificarlos. En ese sentido, este problema permite evocar esas situaciones para sistematizarlas y luego complejizarlas.

El/la docente podrá sugerir la resolución de la parte a) en parejas. Luego de un tiempo de resolución, podrá proponer una instancia de trabajo colectivo con el objetivo de recuperar la noción de permutación.

Se espera que los/as estudiantes resuelvan el problema de diferentes maneras:

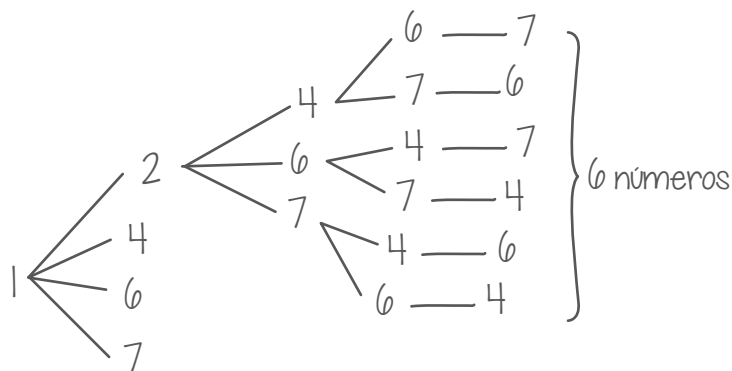
- Algunos/as intentarán enumerar los distintos casos, con la dificultad que esto conlleva. Al ser tantos, es muy difícil ser exhaustivo y no repetir alguna opción.

En el proceso de enumeración, algunos/as podrán elaborar algunas conjeturas como, por ejemplo, que si las tres primeras cifras quedan fijas hay dos números diferentes que se pueden formar, o que si las dos primeras cifras quedan determinadas, son 6 los números distintos.

A partir de estas observaciones, el/la docente podrá proponer analizar la existencia de un cálculo que permita hallar los valores obtenidos.

- Habrá estudiantes que intenten hacer un diagrama de árbol, completo o no, que incluya todos los casos o no.

En el siguiente ejemplo, el/la estudiante dibuja parte del diagrama, que le permite saber que hay 6 números que comienzan con 12. Sabrá, entonces, que hay $6 \cdot 4 = 24$ números que empiezan con 1. Y como el primer dígito puede ser cualquiera de los cinco disponibles, entonces es posible formar $5 \cdot 24 = 120$ números diferentes



La estructura del diagrama de árbol posibilita vincular la cantidad de casos con un cálculo multiplicativo que permite hallar el total de números que pueden formarse con estos dígitos: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Si la última estrategia no surgiera, el/la docente podrá sugerir la construcción del diagrama de árbol. Resulta importante hacerlo porque se constituye como una base para analizar la estructura multiplicativa y llegar al cálculo correspondiente a las permutaciones de 5 elementos.

Finalmente, el/la docente podrá evocar que la cantidad de permutaciones de n elementos, es decir, la cantidad de reordenaciones posibles de todos ellos, se obtiene a partir del cálculo $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$, que es el producto entre todos los números naturales menores o iguales que n .

Para avanzar sobre la conceptualización, se podrá preguntar:

¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar si es posible repetir los dígitos?

Retomando la idea de la cantidad de posibilidades que hay para cada cifra que conforma el número, en este caso serán $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3125$.

Con el mismo objetivo, se podrá considerar que para formar números de 3 cifras, habrá $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades si no pueden repetirse las cifras, o $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ si es posible repetirlos.

La situación planteada en la parte b) puede resultar compleja porque requiere de dos prácticas habituales al resolver problemas de combinatoria que no resultan naturales ni evidentes para los/as estudiantes. Por un lado, consiste en resolver a partir del complemento, es decir, considerar todos los casos y “quitar” los que no cumplen con la condición.

Por otro lado, considerar que los números 6 y 7 forman “un dígito” del número, lo que equivale a que tengan ubicaciones contiguas. Estas cuestiones, que se constituyen en prácticas tan específicas, requieren muchas veces que el/la docente las proponga de manera explícita, y que se discuta con los/as estudiantes por qué resultan estrategias válidas para resolver ciertas situaciones.

Este problema resulta más fácil ser resuelto a partir del complemento, considerando el total de casos menos aquellos en los que los dígitos 6 y 7 están juntos. Por esta razón, el/la docente podrá proponer a los/as estudiantes que, entre todos/as, intenten resolverlo de manera directa, para analizar luego por qué la estrategia del complemento resulta más conveniente.

Una vez que se haya establecido que se utilizará esta última forma de resolución, la tarea de los/as estudiantes se transforma en hallar la cantidad de números de 5 cifras distintas en los que el 6 y el 7 tienen posiciones contiguas. Para eso, podrán considerar la cantidad de números diferentes que se pueden formar con los cuatro números 1, 2, 4 y “67”, que es $4! = 24$. Como los dígitos 6 y 7 pueden, a su vez, estar ubicados de dos maneras diferentes, habrá $2 \cdot 4! = 48$ números diferentes en los que ocupan posiciones contiguas. Finalmente, el total de números será $120 - 48 = 72$.

Problemas que involucran el valor absoluto de una expresión

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Identificar al módulo de una expresión como el valor absoluto de sus valores posibles.
- Identificar al módulo de una expresión como su distancia al cero o al valor absoluto de una diferencia como la distancia entre los números involucrados.
- Desarrollar estrategias algebraicas o funcionales para resolver una inecuación que involucre un módulo.

Problema

Hallen los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple $\left| \frac{2}{x-1} - 1 \right| < 1$.

La situación propuesta puede ser resuelta en pequeños grupos, debido a la posibilidad de debate entre los/as estudiantes.

El propósito es desarrollar y analizar diferentes estrategias de resolución, tanto desde perspectivas algebraicas como funcionales, y ponerlas en relación.

Luego de que los/as estudiantes hayan intentado resolver el problema, el/la docente puede proponer un espacio de discusión colectiva para compartir algunas de las estrategias que haya seleccionado, particularmente una algebraica y una funcional. Si alguna de las dos no hubiese surgido, podrá ser propuesta por el/la docente para ser analizada.

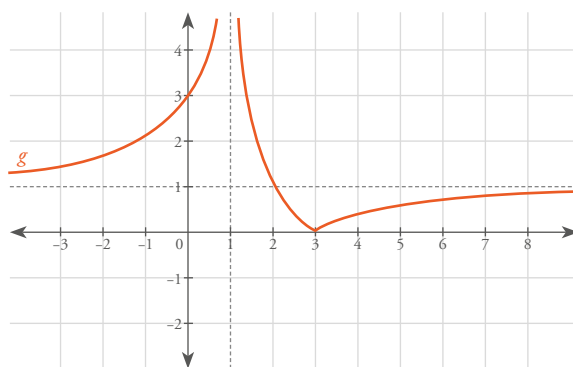
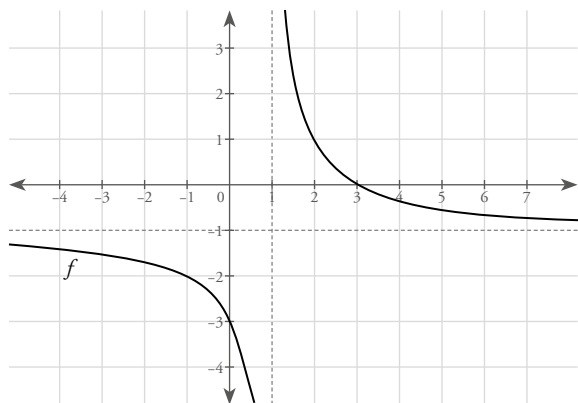
La resolución en un marco algebraico consiste en interpretar que se buscan los valores de x para los cuales la distancia entre $\frac{2}{x-1} - 1$ y 0 es menor que 1; o bien para que la distancia entre $\frac{2}{x-1}$ y 1 sea menor que 1.

En cualquiera de los casos, se trata de resolver la inecuación $-1 < \frac{2}{x-1} - 1 < 1$, que equivale a $0 < \frac{2}{x-1} < 2$.

Desde el punto de vista de la lectura de la información que porta la expresión, cuyo trabajo se inició en el Ciclo Básico, se trata de determinar para qué valores de x el cociente es positivo y menor que 2. Se podrá analizar que para que el cociente sea positivo, es necesario que $x - 1$ lo sea, es decir, cuando $x > 1$. Por otro lado, para que un cociente de

dividendo 2 sea menor que 2, el divisor tiene que ser mayor que 1, es decir, $x - 1 > 1$, por lo que $x > 2$. Ambas condiciones se cumplen cuando $x > 2$.

Desde el punto de vista funcional, los/as estudiantes podrán graficar la función $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{2}{x-1} - 1$, para luego graficar $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \left| \frac{2}{x-1} - 1 \right|$:



A partir del gráfico de la función g y verificando que $g(2) = 1$ puede analizarse que $g(x) < 1$ para $x > 2$.

Funciones y álgebra

Además del estudio de los distintos tipos de funciones en particular, en este eje se dedica parte del trabajo a la modelización, a través del uso de modelos cuadráticos, polinómicos, exponenciales y trigonométricos. Se considera que el trabajo en profundidad con cada tipo de función que se estudia en el Ciclo Orientado es a la vez particular y general. Lo trabajado a propósito de cada tipo de función –la mirada particular– resignifica el aprendizaje de las demás funciones y profundiza los conocimientos sobre las funciones en cuanto un concepto matemático general.

Las situaciones presentadas en contextos intra- y extramatemáticos requieren hallar fórmulas, resolver ecuaciones, analizar la existencia y cantidad de soluciones para diferentes problemas, etcétera. Se trata, en todos los casos, de trabajar de manera más o menos simultánea sobre el sentido de cada objeto matemático y las técnicas asociadas a él, de manera que ambos conocimientos no queden disociados.

La mirada propuesta supone un tratamiento que ponga en relación las prácticas algebraicas, las representaciones gráficas y los contextos de los problemas.

El *Diseño Curricular* plantea una enseñanza y un aprendizaje centrado en las características de las funciones, en contraposición a un abordaje basado en el aprendizaje y aplicación de fórmulas. A partir de esto, algunos de los problemas que se plantean serán de corte más conceptual, donde los/as estudiantes tendrán que poner en juego propiedades de las funciones y relacionarlas entre sí.

Función cuadrática

Si bien en el Ciclo Básico se analizan gráficos de funciones con diversas características, la función cuadrática es la primera de las funciones “con fórmula” que se estudian en la escuela secundaria cuyo crecimiento no es constante. De este modo, se constituye como una oportunidad para resignificar los conocimientos referidos a funciones de variación uniforme. Analizar lo que no varía uniformemente puede también dotar de sentido a lo que sí y, de esa manera, comenzar a vislumbrar la existencia y el estudio de funciones cuyas gráficas son curvas.

Otra cuestión a destacar de las funciones cuadráticas es la posibilidad que brinda de expresar su fórmula de tres maneras diferentes: desarrollada, factorizada y canónica. Cada una de ellas permite reconocer algún aspecto que las demás posiblemente oculten, por lo que el análisis de las fórmulas y de los gráficos correspondientes favorece el aprendizaje de la interrelación que existe entre ellos. En este sentido, la existencia de diferentes formas de expresar las fórmulas pone en escena la toma de decisiones en cuanto a cuál resulta más conveniente utilizar, según el problema que se esté resolviendo.

Intervenciones de enseñanza

A continuación, se presentan situaciones de enseñanza referidas al estudio de las funciones cuadráticas que consideran dos asuntos principales a abordar con los/as estudiantes: *Problemas que se modelizan mediante funciones cuadráticas* y *Determinación de la existencia y la cantidad de soluciones en ecuaciones cuadráticas del tipo $f(x) = k$* .

Problemas que se modelizan mediante funciones cuadráticas

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Utilizar funciones cuadráticas y sus características para modelizar y resolver problemas situados en contextos extramatemáticos.
- Resolver ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ sacando factor común y leyendo la información que porta el cálculo.
- Utilizar la simetría para hallar preimágenes de una función cuadrática, en problemas situados en contextos extramatemáticos.

Problema

La altura que alcanza un objeto que es arrojado hacia arriba puede ser modelizada a través de una función definida por la fórmula $h(t) = 80t - 5t^2$, donde t representa el tiempo en segundos transcurrido desde que fue lanzado y h su altura en metros.

- a) ¿Cuánto tarda el objeto en caer al piso?
- b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza y cuánto tarda en alcanzarla?
- c) A los 1,5 segundos de haber sido lanzado, el objeto alcanza una altura de 108,75 metros. Sin resolver ecuaciones, hallá en qué otro momento el objeto se encuentra a la misma altura.

Se propone aquí un problema referido a un contexto que es posible modelizar a través de una función cuadrática. Así, los conocimientos que hayan desarrollado los/as estudiantes a propósito de estas funciones se constituirán en un apoyo para hallar las respuestas de cada uno de los ítems.

Para resolver la parte a) de este problema, los/as estudiantes deberán identificar que se trata de hallar el valor de t para el cual la altura, es decir $h(t)$, vale 0. Es posible que muchos escriban la ecuación $0 = 80t - 5t^2$, aunque no todos logren resolverla. Resulta entonces importante plantear un espacio de trabajo colectivo donde se discuta acerca de por qué $h(t) = 0$ es una representación de lo que solicita el problema. Una vez acordado que la/s soluciones de la ecuación permite/n saber cuándo el objeto está en el piso, pues en esos casos la altura es cero, resulta importante debatir acerca de cómo es posible resolverla.

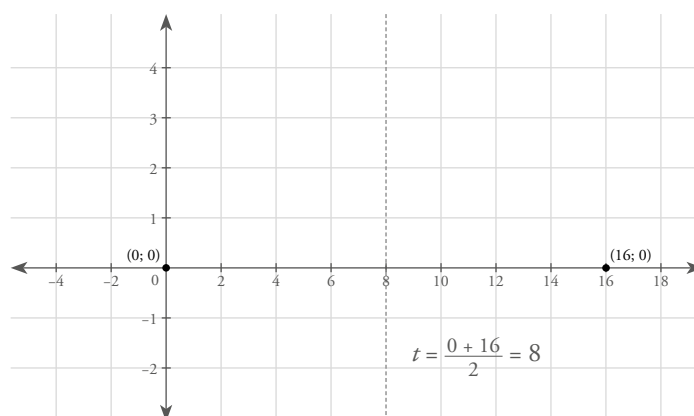
Es probable que las ecuaciones que contienen expresiones cuadráticas desarrolladas sean de las primeras que surgen en la escuela que no se pueden resolver despejando la variable. Este es uno de los obstáculos más importantes. Entonces una categoría de ecuaciones que se resuelven utilizando alguna técnica de factorización:

$$0 = 80t - 5t^2 \Rightarrow 0 = 5t(16 - t)$$

A partir de interpretar la ecuación como una multiplicación entre dos números cuyo producto tiene que ser 0, es posible determinar que 0 y 16 son sus soluciones. Estos valores corresponden al momento inicial, cuando el objeto está en el piso, y a 16 segundos luego de haber sido lanzado, donde vuelve a estar en el piso. Esta resolución debería quedar registrada en las carpetas para que se convierta en una fuente de consulta frente a situaciones similares.

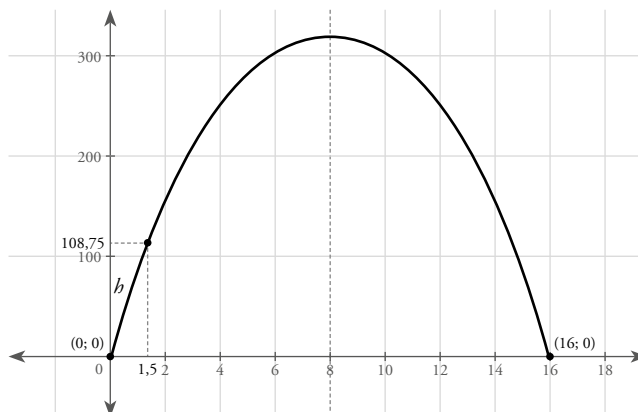
Para la parte b), los/as estudiantes necesitan reconocer que lo que se pregunta está relacionado con el máximo de la función y con el vértice de la parábola que es su gráfico. Las resoluciones que se esperan variarán según si disponen o no de una fórmula para hallar la primera coordenada del vértice de la parábola. En el caso de que dispongan de ella, bastará con reemplazar los parámetros y luego calcular la imagen del valor obtenido. Para aquellos casos en los que los/as alumnos/as no conozcan o decidan no aplicar la fórmula, se espera que se relacione el vértice con el eje de simetría; para determinar la primera coordenada del vértice bastará con hallar el promedio de dos elementos del dominio que tengan la misma imagen.

En una puesta en común, se considera importante que el/la docente recupere la idea de simetría. Podrá construir un gráfico marcando las dos raíces y registrando el cálculo del promedio en el punto medio.

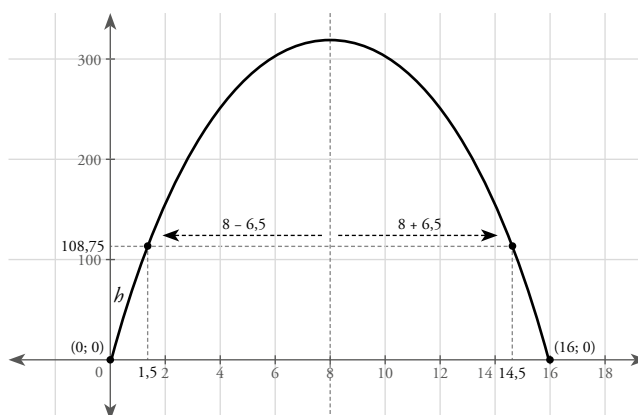


Una vez obtenida la ecuación del eje de simetría, la imagen de $t = 8$, $h(8)$, permite determinar la altura máxima.

El registro gráfico suele ser de gran ayuda para comprender la situación que se describe y los datos del problema, así como aquello que se solicita hallar. El/la docente podrá sugerir a quienes no logren comprender o resolver la parte c) del problema que hagan un gráfico similar al siguiente:



Se espera, entonces, que los/as estudiantes utilicen la noción de simetría y la relación entre los valores del dominio que tienen igual imagen, es decir, que están a igual distancia del eje de simetría:



Como conclusión del trabajo desarrollado en las últimas dos partes del problema, se podría registrar lo siguiente:

Para cada valor de la imagen de una función cuadrática, que no sea el máximo o el mínimo, existen dos valores diferentes que son sus preimágenes. Esos valores de la variable independiente están a la misma distancia de la primera coordenada del vértice. En el gráfico de la función, los puntos sobre la parábola que representan esos valores son simétricos con respecto al eje de simetría.

Determinación de la existencia y la cantidad de soluciones en ecuaciones cuadráticas del tipo $f(x) = k$

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

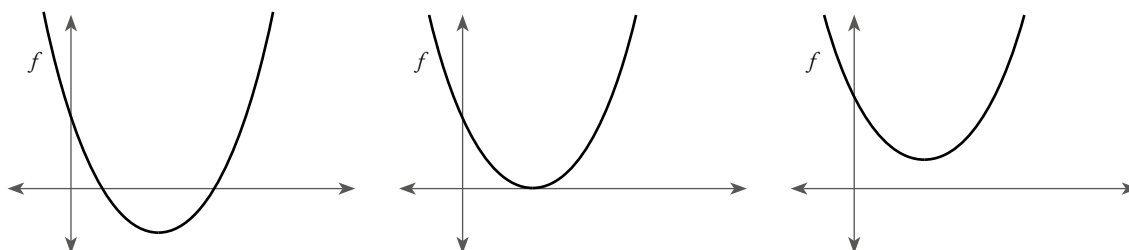
- Determinar la existencia y la cantidad de soluciones en ecuaciones cuadráticas del tipo $f(x) = k$ a partir de un análisis desde el marco funcional.
- Determinar la existencia y la cantidad de soluciones en ecuaciones cuadráticas del tipo $f(x) = k$ desde un marco algebraico.

Problema

Se consideran las funciones cuadráticas definidas por una fórmula como la siguiente: $f(x) = x^2 + bx + 9$, $b \in \mathbb{R}$. Determiná para qué valores de b la función que queda definida tiene una sola raíz. ¿Y dos raíces? ¿Y ninguna?

El problema que se plantea permite diferentes estrategias de resolución, algunas más relacionadas con una mirada algebraica, mientras que otras están más asociadas a una interpretación desde un marco funcional.

Los/as estudiantes que analizan la situación desde un marco funcional podrán interpretar que el gráfico de la función dada es una parábola cóncava hacia arriba, por lo que su vértice corresponde al mínimo de la función. Más allá de los desplazamientos horizontales, el gráfico podrá presentar tres situaciones respecto de sus raíces, ilustradas por los siguientes diagramas:



Podrán realizar exploraciones utilizando algún graficador o gráficos esquemáticos a partir de las características de las parábolas que conocen. En cualquiera de los dos casos, se espera que vinculen la cantidad de raíces de la función con la segunda coordenada del vértice: si es negativa, hay 2 raíces; si es cero, hay una sola raíz (doble); mientras que, si es positiva, no habrá ninguna.

Si los/as estudiantes no pudieran o no supieran cómo encontrar una relación entre cada uno de los casos y el valor del parámetro b , el/la docente puede sugerirles que intenten hallar una expresión de las coordenadas del vértice en función de b :

$$x_v = -\frac{b}{2}, y_v = f\left(-\frac{b}{2}\right)$$

$$y_v = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) + 9 = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + 9 = 9 - \frac{b^2}{4}$$

Las condiciones que fueron planteadas a partir del análisis de los elementos de la parábola ahora pueden tratarse dentro de un marco algebraico. Por ejemplo:

- La parábola interseca al eje x en un solo punto si $y_v = 9 - \frac{b^2}{4} = 0$:

$$9 - \frac{b^2}{4} = 0 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \text{ ó } b = -6$$

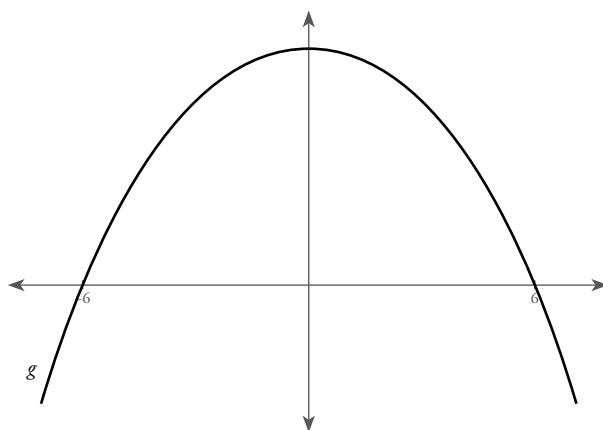
- La parábola interseca al eje x en dos puntos si $y_v = 9 - \frac{b^2}{4} < 0$:

$$9 - \frac{b^2}{4} < 0 \Rightarrow 36 < b^2 \Rightarrow b < -6 \text{ ó } b > 6$$

- La parábola no interseca al eje x si $y_v = 9 - \frac{b^2}{4} > 0$:

$$9 - \frac{b^2}{4} > 0 \Rightarrow 36 > b^2 \Rightarrow -6 < b < 6$$

Las dos inecuaciones y la ecuación pueden ser resueltas de manera algebraica, como mostramos, o desde una interpretación funcional. En ese caso, se trata de hallar los conjuntos de ceros, positividad y negatividad de la función definida por la fórmula $g(x) = 9 - \frac{x^2}{4}$, cuyo gráfico puede ser una herramienta útil para determinarlos:



Una vez encontradas las raíces algebraicamente, resulta que $C^+(g) = (-6; 6)$ es el intervalo de valores de b en el que la función f no corta al eje x , mientras que $C^-(g) = (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$ es el conjunto de los valores de b para los cuales la función f corta al eje x en dos puntos diferentes.

Otra estrategia de resolución esperable es que los/as estudiantes apelen al uso de la fórmula resolvente para la ecuación $x^2 + bx + 9 = 0$, o bien directamente a su discriminante, Δ . En este caso, se trata de analizar que:

- si $\Delta > 0$, la ecuación tendrá dos soluciones diferentes y la función f , dos raíces;
- si $\Delta = 0$, la ecuación tendrá una solución y la función f , una raíz doble;
- si $\Delta < 0$, la ecuación no tendrá soluciones reales y la función f no tendrá raíces.

Como $\Delta = b^2 - 36$, cada una de las opciones anteriores corresponde al conjunto de positividad, ceros y de negatividad de la función $h(x) = x^2 - 36$, respectivamente, interpretando la resolución desde un marco funcional. En cambio, si se resuelve desde un marco algebraico, se trata de hallar el conjunto solución de cada una de las inecuaciones y de la ecuación utilizando técnicas de resolución algebraicas, tal como fue señalado anteriormente.

En un espacio de trabajo colectivo, el/la docente podrá debatir con los/as estudiantes acerca de las diferentes formas de plantear y resolver el problema y, comparando ambas resoluciones, hacer hincapié en cuáles son los conocimientos en los que se apoya cada una y en los que resulta una más conveniente que la otra. Se espera que puedan ir construyendo la noción de conveniencia de una estrategia en función del problema propuesto.

Función polinómica

Al llegar el momento de tratar con funciones polinómicas, los/as estudiantes han trabajado ya con funciones lineales y cuadráticas, incorporando diversos conocimientos sobre sus gráficos y su comportamiento. Si bien estos conocimientos no resultan de utilización inmediata para este nuevo tipo de funciones, las estrategias desarrolladas para las funciones lineales y cuadráticas pueden extenderse y dar lugar al desarrollo de nuevas estrategias.

Se proponen tareas que involucran tanto el trabajo con lápiz y papel como con programas informáticos, observando las interacciones que se dan entre ellos y la información que aporta cada uno. Se pone el foco sobre el análisis del signo de las funciones polinómicas en intervalos que no contienen raíces. Por este motivo, su continuidad, el uso de programas graficadores y el lema de Gauss para hallar raíces se constituyen como herramientas para el estudio de este tipo de funciones.

Intervenciones de enseñanza

A continuación, se presentan situaciones de enseñanza referidas al estudio de las funciones polinómicas que toman en consideración dos asuntos principales a abordar con los/as estudiantes: *Estudio de la función polinómica* y *Producción de fórmulas a partir de sus raíces*.

Estudio de la función polinómica

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Aplicar técnicas algebraicas para hallar las raíces de una función polinómica.
- Hallar los conjuntos de positividad y negatividad de una función polinómica.

- Determinar el comportamiento a medida que x tiende a $+\infty$ y $-\infty$.
- Producir el gráfico de una función polinómica de manera aproximada, previendo su forma y sus características.

Problema

Analicen y realicen un gráfico aproximado de la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -x^3 + 9x.$$

El problema presentado puede constituirse en una primera situación de análisis de una función polinómica para realizar un gráfico aproximado. Puede trabajarse de manera colectiva, registrando no solo la resolución sino también las razones de cada una de las decisiones que se toman.

Si bien es cierto que el gráfico puede realizarse con un programa graficador, resulta importante que los/as estudiantes puedan dar sentido al gráfico que se obtiene. La tarea no solo consiste en la obtención de un gráfico, sino en interpretar el porqué de su comportamiento. Es por esto que, en este caso, el uso de tecnología funcionará como un mecanismo de control.

El/la docente podrá acordar con sus estudiantes cuáles son los elementos del gráfico necesarios para poder realizarlo, esperando que consideren las raíces, la ordenada al origen y los conjuntos de positividad y negatividad. También podrá aportar otros análisis durante la resolución.

Se podrá sugerir comenzar por hallar la ordenada al origen, recordando que consiste en determinar la imagen de $x = 0$:

Como $f(0) = -0^3 + 9 \cdot 0 = 0$, el gráfico contiene al punto $(0; 0)$.

Y como la imagen de $x = 0$ es 0, entonces $x = 0$ también es una raíz de la función.

Para encontrar las raíces es importante recordar que se trata de hallar los valores de x cuya imagen es 0, lo cual dará las primeras coordenadas de los puntos en los que el gráfico de f interseca al eje de abscisas: $0 = -x^3 + 9x$.

En este momento también resulta importante discutir con los/as estudiantes acerca de cómo conviene resolver este tipo de ecuación en el que la variable x no puede ser despejada. La factorización resulta necesaria para obtener una ecuación equivalente que estará expresada como un producto igualado a cero, por lo que alguno de sus factores tiene que valer 0:

$$\begin{aligned} 0 &= -x^3 + 9x \\ 0 &= x(-x^2 + 9) \end{aligned}$$

Si bien se puede seguir factorizando la expresión del miembro de la derecha, no resulta necesario para hallar las raíces. Es posible obtenerlas poniendo en juego estrategias sobre ecuaciones cuadráticas y/o por medio de cálculo mental:

$$x = 0 \text{ ó } -x^2 + 9 = 0$$

$$x = 0 \text{ ó } x = 3 \text{ ó } x = -3$$

Se obtiene así el conjunto de ceros de la función, $C^0 = \{0; 3; -3\}$.

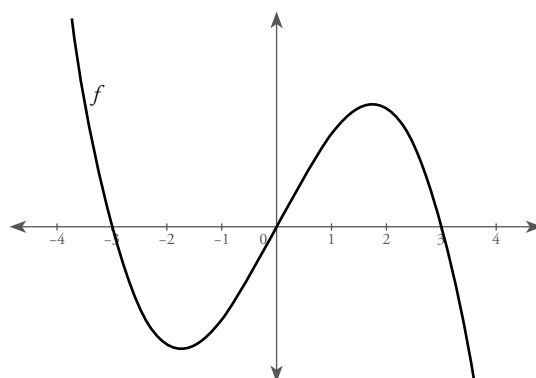
El/la docente puede continuar dialogando con los/as estudiantes para reflexionar en conjunto cómo conviene continuar el análisis. Posiblemente, acuerden que es necesario conocer el comportamiento de la función en los intervalos que determinan las raíces.

Nuevamente, los conocimientos sobre funciones cuadráticas pueden resultar útiles para determinar la variación del signo de los valores de $-x^2 + 9$. Considerando su gráfico como una parábola cóncava hacia abajo con raíces $x = -3$ y $x = 3$, toma valores positivos en el intervalo $(-3; 3)$ y negativos en $(-\infty; -3)$ y $(3; +\infty)$.

El signo de la función podrá determinarse a partir del de los factores $-x + 9$ y x . El/la docente podrá sugerir organizar la información en una tabla como esta.

	x	$-x^2 + 9$	$f(x)$
$x < -3$	-	-	+
$-3 < x < 0$	-	+	-
$0 < x < 3$	+	+	+
$x > 3$	+	-	-

Así, los conjuntos de positividad y negatividad de f son $C^+ = (-\infty; -3) \cup (0; 3)$ y $C^- = (-3; 0) \cup (3; +\infty)$. Con toda la información obtenida es posible saber que el gráfico de la función es como el siguiente:



Producción de fórmulas a partir de sus raíces

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Hallar la expresión factorizada de fórmulas de funciones polinómicas en las que la cantidad de raíces (contadas con su multiplicidad) es menor que el grado del polinomio que las define.

- Explorar con un programa graficador el comportamiento de funciones polinómicas en relación con sus raíces.

Problema

El grado de la función polinómica f es mayor o igual que 2 y tiene una única raíz simple en $x = 1$.

Hallen una fórmula posible para la función f . ¿Cuántas hay?

El problema planteado es desafiante, por lo que conviene que los/as estudiantes trabajen en grupos de cuatro integrantes.

Mientras los/as alumnos/as trabajan, el/la docente puede recorrer los grupos para intervenir en caso de que no puedan avanzar, frente a sus dudas y preguntas, y para recabar las estrategias que están poniendo en juego. Luego de un tiempo, se puede proponer un espacio de debate colectivo.

El propósito del momento de discusión no solo está destinado a resolver el problema, sino también a sistematizar aquellos conocimientos que se han trabajado y puesto en juego.

Por ejemplo, el/la docente puede comenzar preguntando cuál podría ser la forma de la fórmula de la función que se busca. Se espera que, por un lado, acuerden que conviene pensar en su forma factorizada y, por el otro, que uno de sus factores debe ser $(x - 1)$. Una vez decidido esto, es posible focalizarse sobre el otro factor, teniendo en cuenta que la función no debe tener más raíces. Una intervención posible consiste en preguntar si el otro factor puede ser lineal, para llegar a la conclusión de que no es posible porque ese tipo de factor siempre tiene una raíz.

En este punto hay entonces algunas conclusiones que conviene señalar para que todos/as trabajen desde el mismo conjunto de conocimientos:

La fórmula de f tiene que tener la forma $f(x) = a(x - 1)h(x)$, donde la función h no tiene raíces y su grado es mayor o igual que 2.

El problema se reduce, entonces, a encontrar la fórmula de una función h que no tenga raíces. A partir de los conocimientos sobre funciones cuadráticas, es posible que los/as estudiantes encuentren funciones polinómicas de grado 2 que no tengan raíces. Sin embargo, sería importante que el/la docente proponga continuar la resolución intentando hallar una función h de grado mayor que 2. Los/as alumnos/as podrían usar programas graficadores con el propósito de explorar distintas fórmulas posibles, para lo cual tendrán que interpretar que buscan una función polinómica cuyo gráfico no corte al eje de abscisas. A partir de esta exploración podrán conjeturar ciertas características de las funciones

polinómicas que no tienen raíces, por ejemplo, aquellas que deben tener grado par. No se busca una caracterización completa, sino una que permita construir fórmulas de funciones que seguro no tengan raíces. Por ejemplo, de manera coloquial, “ x elevado a una potencia par más una constante positiva”, para luego escribirlo de manera formal: $h(x) = x^{2n} + k$, con $n \in \mathbb{N}$ y $k > 0$.

Finalmente, la función buscada puede tener por fórmula $f(x) = a(x - 1)(x^{2n} + k)$, con $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $k > 0$.

Función exponencial y función logarítmica

Se ha decidido presentar las situaciones referidas a estas dos funciones en un mismo apartado por su carácter de funciones inversas entre sí.

La primera dificultad que se presenta es que el concepto de función inversa no ha sido trabajado hasta el momento. Se plantea, entonces, la necesidad y posibilidad de trabajarlo a propósito de este par de funciones. Esta manera de hacerlo tiene la ventaja de alejarse de las tareas de hallar fórmulas de funciones inversas sin objetivo alguno, solo para ejercitar una técnica. Por otro lado, el análisis del concepto de función inversa se dará a propósito de un caso concreto, con la necesidad de resolver determinados problemas.

La existencia de la función inversa de f , f^{-1} permite conjugar tres miradas:

- Dada una función biyectiva f , existe su función inversa f^{-1} ;
- Dado un valor y de la imagen de la función f , la ecuación $y = f(x)$ tiene una única solución $x = f^{-1}(y)$;
- Dado un valor k de la imagen de la función f , la recta de ecuación $y = k$ interseca al gráfico de f en un único punto.

Las funciones exponenciales y logarítmicas constituyen, entonces, una excelente oportunidad para analizar propiedades de las funciones inversas. Por ejemplo, pensar a la función inversa “deshaciendo” lo que “hace” una función: $\log_a(a^x) = x$ y $a^{\log_a x} = x$.

Durante el trabajo con ecuaciones, el uso de la función inversa muchas veces se torna necesario para hallar el conjunto solución, lo que permite dotarla de mayor sentido.

Intervenciones de enseñanza

A continuación, se presentan situaciones de enseñanza referidas al estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas que toman en consideración estos asuntos principales a abordar con los/as estudiantes: *Problemas que se modelizan mediante funciones exponenciales; Estudio de la función exponencial: ceros, crecimiento, decrecimiento, conjunto imagen, positividad, negatividad, asíntota; Estudio de la función logarítmica: ceros, crecimiento,*

decrecimiento, conjunto imagen, positividad, negatividad, asíntota y Equivalencia de fórmulas y uso de propiedades.

Problemas que se modelizan mediante funciones exponenciales

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Producir una fórmula de una función exponencial en diferentes contextos que involucren procesos de crecimiento y decrecimiento exponencial.
- Interpretar el significado de los parámetros de una fórmula en el contexto de un problema.
- Resolver ecuaciones exponenciales utilizando diferentes estrategias.
- Utilizar logaritmos para hallar preimágenes de funciones exponenciales en problemas situados en contextos extramatemáticos.

Problema

Las sustancias radiactivas se desintegran a medida que liberan ciertas partículas y, por lo tanto, pierden masa.

Un cierto tipo de sustancia radiactiva tiene una masa inicial de 4 kg. Al cabo de dos días su masa es de 3,6864 kg, y se supone que la cantidad de masa remanente a medida que transcurre el tiempo sigue una ley exponencial.

- a) ¿Qué masa tendrá la sustancia luego de treinta días?
- b) ¿Qué porcentaje de masa pierde la sustancia cada día?
- c) ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que la masa remanente sea la mitad de la original?

El planteo de este problema en una clase de Matemática permite que los/as estudiantes pongan en juego sus conocimientos disponibles y concepciones para resolverlo. En este sentido, es posible –a pesar de que se indica que la pérdida de masa sigue una ley exponencial– que algunos/as alumnos/as supongan que la disminución de la masa es constante, por lo que intenten utilizar estrategias asociadas a un comportamiento lineal. La dificultad que se plantea en este caso es que los datos del contexto propuesto no permiten descartar el modelo lineal. Será necesario acudir al enunciado para verificar que el modelo no es lineal sino exponencial.

Luego de que los/as estudiantes tengan oportunidad de resolver la parte a) del problema, el/la docente tendrá la posibilidad de poner en discusión diferentes estrategias de resolución, incluso la que se apoya en considerar una disminución constante.

En un espacio de trabajo colectivo será posible plantear la pregunta:

¿Podemos afirmar que si la masa disminuye 0,3136 en dos días, entonces cada día disminuye la mitad de ese valor?

Para descartar esta resolución habrá que volver sobre el enunciado y analizar si es posible que, al disminuir siempre la misma cantidad, se pueda tratar de un decrecimiento exponencial.

Una vez desechada la linealidad, se podrá avanzar con las demás formas de resolver.

Tal como afirma el problema, la cantidad de masa remanente responde a un modelo exponencial, por lo que la fórmula que la representa debe ser del tipo $f(x) = k \cdot a^x$, donde $k, a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$. Se espera que los/as estudiantes no tengan dificultad para considerar $x = 2$ y reemplazarlo en la fórmula $f(2) = 3,6864$, aunque seguramente algunos no se den cuenta de que, además, el valor de x que corresponde a 4 kg es cero:

$$4 = k \cdot a^0 \quad \text{y} \quad 3,6864 = k \cdot a^2$$

La puesta en común es un buen momento para revisar la resolución del sistema de ecuaciones resultante, recordando que $a^0 = 1$ y que, aunque la ecuación $3,6864 = k \cdot a^2$ tiene dos soluciones reales, solo una de ellas cumple con las restricciones planteadas para el valor de a . Si no se hubiese trabajado, es un buen momento para señalar que el valor de k siempre será la imagen de 0.

Una vez obtenida la fórmula $f(x) = 4 \cdot 0,96^x$, se espera que los/as estudiantes no encuentren mayores dificultades para decidir que es necesario hallar la imagen de 30, que representa la masa remanente de sustancia al cabo de 30 días:

$$f(30) = 4 \cdot 0,96^{30} \approx 1,1754 \text{ kg}$$

La primera parte del problema no requiere de un gran dominio conceptual de las funciones exponenciales, sino más bien de cierto dominio de técnicas. Resulta importante explicitar y analizar que se está trabajando con un modelo exponencial, que será usado en las partes siguientes del problema.

Para responder a la parte b), algunos/as estudiantes podrán “leer” la información pedida directamente de la fórmula de la función $f(x) = 4 \cdot 0,96^x$, donde 4 es la masa inicial y 0,96 representa la parte que queda luego de cada unidad de tiempo. En este caso particular, cada día que transcurre habrá 96% de la masa del día anterior, por lo que se pierde el 4%.

Otros/as alumnos/as probarán con algunos valores e intentarán calcular el porcentaje de pérdida de la masa. Por ejemplo:

Día	Masa	Perdió	Porcentaje	Porcentaje remanente
1	3,84	0,16	$\frac{0,16}{4} \cdot 100 = 4\%$	96%
2	3,6864	0,1536	$\frac{0,1536}{3,84} \cdot 100 = 4\%$	96%

Así, afirmarán que por cada día que se avanza se pierde el 4% de la masa, sin validar que esa relación se cumple en todos los casos.

Si no hubiese surgido una manera general de responder la pregunta, el/la docente podrá tomarlo a su cargo, y dejar registrado lo siguiente:

El día x quedan $4 \cdot 0,96^x$ kg de masa.

El día siguiente, $x + 1$, quedan $4 \cdot 0,96^{x+1}$ kg de masa.

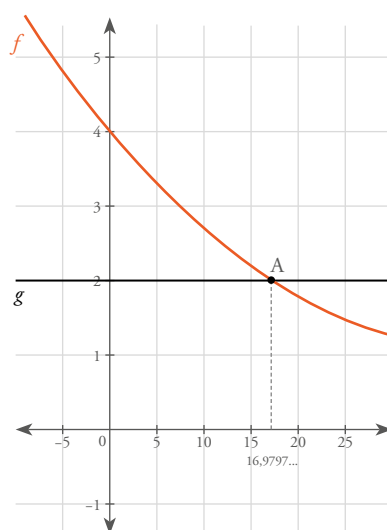
$$4 \cdot 0,96^{x+1} = 4 \cdot 0,96^x \cdot 0,96 = 3,84 \cdot 0,96^x$$

El porcentaje restante entonces es: $\frac{3,84 \cdot 0,96^x}{4 \cdot 0,96^x} \cdot 100 = 96\%$, lo cual equivale a decir que se pierde el 4%.

Como el cálculo anterior fue hecho para un día cualquiera, x , es posible decir que la masa disminuye siempre el 4% de un día al siguiente.

La última de las preguntas del problema requiere de la resolución de una ecuación para el cálculo de una preimagen de la función $f: 2 = 4 \cdot 0,96^x$.

Esta ecuación podrá ser resuelta desde un marco funcional utilizando un programa graficador, a partir de considerar las funciones $f(x) = 4 \cdot 0,96^x$ y $g(x) = 2$ y hallar su punto de intersección $A = (16,9797...; 2)$:



Es importante que los/as estudiantes dispongan también de una resolución algebraica y que junto con la resolución funcional estén disponibles en las carpetas como fuente de información para el estudio:

$$4 \cdot 0,96^x = 2 \Rightarrow 0,96^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \log_{0,96} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\ln \left(\frac{1}{2} \right)}{\ln 0,96} = 16,9797...$$

Estudio de la función exponencial: ceros, crecimiento, decrecimiento, imagen, positividad, negatividad, asíntota

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Analizar las variaciones del gráfico de una función exponencial en relación con las variaciones de su fórmula.
- Reconocer e interpretar la relación entre los valores de los parámetros de la fórmula de una función exponencial y su gráfico: ecuación de la asíntota horizontal, determinación acerca de su crecimiento, análisis de la existencia de ceros, conjunto imagen.
- Verificar las anticipaciones realizadas respecto de las características del gráfico de una función exponencial.

Problema

Consideren la función cuya fórmula es $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 8$.

- a) Anticipen todas las características posibles del gráfico de la función.
- b) Hallen los elementos necesarios para verificar si las anticipaciones que hicieron en la parte a) eran correctas o no.

Las características del problema propuesto hacen que sea una situación propicia para que los/as estudiantes resuelvan en grupos, debido a su potencialidad para generar debate y poner a prueba las anticipaciones.

Se espera que una de las características que los/as alumnos/as identifiquen sea la asíntota horizontal, aunque no todos/as puedan escribir la ecuación $y = -8$. Para determinar si la función tiende a -8 cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, es necesario tener en cuenta su monotonía, o bien realizar un análisis de los valores de $f(x)$ a medida que x se hace infinitamente grande o chico, por lo que no todos/as podrán decidirlo en este momento.

Debido a la forma en que está escrita la fórmula de la función, es posible que varios/as estudiantes consideren que como la base es menor que 1, la función será decreciente, sin tener en cuenta que el exponente es $-x$. Esta cuestión será importante para considerar en un espacio colectivo de trabajo, proponiendo una reescritura de la fórmula a partir de las propiedades de las potencias:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 8 = (2^{-1})^{-x} - 8 = 2^x - 8$$

A partir de la reescritura que vincula a la expresión con la utilizada habitualmente para definir este tipo de función, podrá considerarse que la base es 2, y que por ser mayor que 1, la función es creciente. Al crecer y tener por asíntota a la recta $y = -8$, los valores de $f(x)$ tienden a -8 cuando x tiende a $-\infty$. Otra manera de determinar el comportamiento de la función respecto de la asíntota consiste en analizar que 2^x tiende a 0 a medida que x tiende a $-\infty$, luego $2^x - 8$ tiende a -8 cuando x tiende a $-\infty$.

Resulta importante que las dos formas de resolución anteriores queden registradas en el pizarrón y en las carpetas, junto a una reflexión acerca de que no alcanza con solo mirar la base de una función exponencial. Es necesario tener en cuenta el exponente, es decir, tener una mirada global de la fórmula.

Una vez analizado el crecimiento de la función y la existencia de la asíntota, no resulta complejo determinar su conjunto imagen. En este caso, será el intervalo $(-8; +\infty)$.

En cuanto a la existencia de raíces de la función, hay distintas maneras de concluir que habrá una:

- Si el conjunto imagen de la función es $(-8; +\infty)$ y la función es (estrictamente) creciente, hay un solo punto donde la gráfica de la función interseca al eje x .
- La ecuación $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 8 = 2^x - 8 = 0$ tiene una única solución. Esta afirmación puede justificarse a partir de determinar que el único valor de x que verifica la igualdad es 3. La solución puede obtenerse por inspección de la ecuación o utilizando alguna técnica de resolución de ecuaciones.

El análisis colectivo de las distintas maneras de analizar y hallar algunos elementos del gráfico de la función permite que circulen en la clase diferentes miradas y que surja la posibilidad de seleccionar aquellas estrategias más convenientes en función del problema a resolver.

Estudio de la función logarítmica: ceros, crecimiento, decrecimiento, imagen, positividad, negatividad, asíntota

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Determinar la/s asíntota/s de una función logarítmica y analizar el comportamiento de la función “cerca” de ella/s.
- Hallar el conjunto de ceros de funciones logarítmicas, resolviendo la ecuación correspondiente.
- Producir el gráfico de funciones logarítmicas para hallar sus conjuntos de positividad y negatividad, los intervalos de crecimiento o decrecimiento.

Problema

Consideren la función cuya fórmula es $f(x) = \log_2 (x^2 - 4x) - 8$,

- hallen su dominio, asíntotas, conjuntos de ceros, positividad y negatividad y cualquier otro elemento que consideren necesario para realizar su gráfico;
- hagan un gráfico aproximado de la función f .

La situación planteada propone realizar el gráfico de una función logarítmica que no resulta conocido y, por lo tanto, es difícil de prever su comportamiento. Como la fórmula no es una composición de una función logarítmica con una lineal, será necesario hallar los elementos que solicita el problema para tener una idea de cómo será el gráfico. El problema puede ser resuelto en parejas.

Para hallar el dominio de la función es posible que algunos/as estudiantes planteen que el argumento del logaritmo no puede ser cero, y obtengan como dominio el conjunto $\mathbb{R} - \{0; 4\}$. Seguramente, esta estrategia esté relacionada con alguna noción construida por los/as estudiantes que indica que los valores de la variable que anulan el argumento están vinculados con la asíntota vertical y que, por lo tanto, no pertenecen al dominio. También es posible que extrapolen una regla utilizada en el marco del trabajo con funciones racionales, donde es necesario excluir del dominio los valores que anulan el denominador.

Otros/as alumnos/as seguramente plantearán la condición correcta y no lograrán resolver la inecuación, o lo harán de manera incompleta o incorrecta.

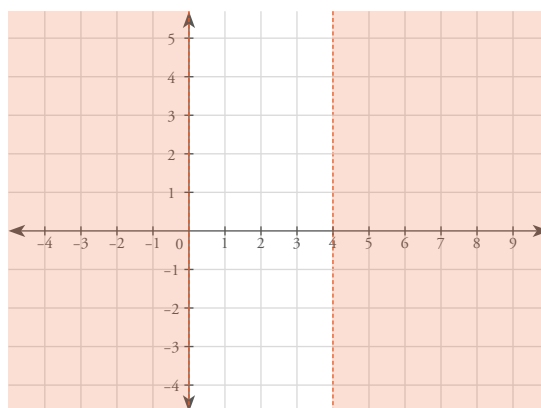
En todos los casos, lo que hayan pensado a propósito del problema será un insumo para un espacio de debate acerca de distintos asuntos:

- cómo determinar el dominio de una función logarítmica;
- cómo resolver una inecuación cuadrática.

La discusión puede estar centrada en recordar la definición de logaritmo para dar sentido al dominio:

Si a es un elemento del conjunto imagen de la función, entonces existe un valor de x para el cual se cumple que $a = \log_2 (x^2 - 4x)$, es decir que verifica que $2^a = x^2 - 4x$. Como $2^a > 0$ para todo valor de a , la ecuación solo tendrá solución si $x^2 - 4x > 0$. También pueden vincularse las escrituras anteriores con que la función logarítmica es la inversa de una exponencial, por lo que la imagen de esta exponencial $(\mathbb{R}_{>0})$ coincide con el dominio de su inversa.

En cuanto a la resolución de la inecuación, el/la docente podrá evocar junto a los/as alumnos/as una estrategia de resolución algebraica y una funcional, y obtener que $\text{Dom}(f) = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. En términos del gráfico, es posible afirmar que se va a ubicar en las zonas sombreadas siguientes:



Las ecuaciones de las asíntotas verticales suelen ser halladas por los/as estudiantes de manera algorítmica, igualando el argumento a cero. Puede plantearse una discusión colectiva para analizar por qué esos valores efectivamente están relacionados con las ecuaciones de las asíntotas.

El/la docente podrá sugerir la construcción de una tabla de valores a medida que la variable independiente tiende a 0 por la izquierda y a 4 por la derecha. Por ejemplo:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0,1	-1,286304185 ...	4,001	-7,965423656...
-0,01	-4,640253953...	4,00001	-14,60963687...
-0,001	-7,965423656...	4,000001	-17,93156821...
-0,0001	-11,28767631...	4,0000001	-21,25349666...
-0,00001	-14,60963687...	4,000000001	-27,89735285...
-0,000001	-17,93156821...	4,0000000001	-31,21928095...
$-1 \cdot 10^{-15}$	-47,82892142	$4 + 10^{-11}$	-34,54120904...

Si la notación de límite se hubiese presentado al trabajar con funciones racionales o exponenciales, será posible retomarla. En caso contrario, el/la docente podrá presentarla en esta ocasión, registrando en el pizarrón lo siguiente:

A medida que los valores de x tienden a 0 por la izquierda o a 4 por la derecha, los valores de sus imágenes son negativos y cada vez menores. Esto puede simbolizarse de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$$

Desde el punto de vista del gráfico de la función, los límites anteriores implican que cuanto más se acercan los valores de x a 0 o a 4, las imágenes seguirán decreciendo, por lo que la curva se irá “pegando” a las rectas $x = 0$ y $x = 4$, asíntotas verticales de la función, aunque no llegará a tocarlas. Esto se debe a que esos valores de la variable no pertenecen al dominio de la función.

Los límites y el dominio permiten saber más características del gráfico, que pueden volcarse en un sistema de coordenadas.

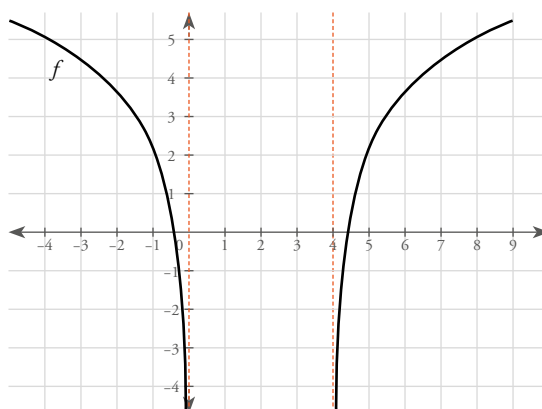


Para hallar las raíces, posiblemente los/as estudiantes logren escribir la ecuación correcta, aunque luego muestren dificultades para resolverla.

En la puesta en común será posible debatir acerca de cómo utilizar la definición de logaritmo para luego resolver la ecuación cuadrática que resulta.

Si $\log_2 (x^2 - 4x) = 0$, entonces resulta que $x^2 - 4x = 2^0 = 1$. De aquí se obtiene que el conjunto de ceros es $C^0 = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$. Uniendo estos datos con el gráfico esquemático anterior y teniendo en cuenta que la función es continua fuera de los entornos que incluyen a $x = 0$ y $x = 4$, puede determinarse que los conjuntos de positividad y negatividad son $C^+ = (-\infty; 2 - \sqrt{5}) \cup (2 + \sqrt{5}; +\infty)$ y $C^- = (2 - \sqrt{5}; 0) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$.

Con estos datos es posible completar el gráfico.



Equivalencia de fórmulas y uso de propiedades

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Reconocer y aplicar propiedades de los logaritmos.
- Analizar el dominio de una función logarítmica.
- Determinar si dos expresiones son equivalentes.

Problema

Decidan, justificando su respuesta, si la siguiente afirmación es verdadera o falsa para cualquier valor de x :

$$\log_4 [(2 - 4x)^2] = 2\log_4 (2 - 4x)$$

El problema que se propone permite poner en discusión la aplicación de propiedades de los logaritmos, que solo son válidas bajo ciertas condiciones.

Si bien muchos/as estudiantes seguramente lograrán interpretar que se ha aplicado una propiedad, no todos/as tendrán en cuenta que los dominios de validez de cada una de las expresiones son diferentes.

El/la docente podrá optar por realizar una breve discusión colectiva durante la resolución acerca de qué significa que dos expresiones son equivalentes, es decir que coinciden para todo valor posible de la variable. Posiblemente, a partir de este conocimiento, algunos/as modifiquen su estrategia de análisis.

Como ya se ha discutido a propósito de otros problemas, estas situaciones pueden resolverse desde un marco algebraico o desde uno funcional. Estos marcos se retroalimentan y dotan de sentido al objeto matemático en cuestión, por lo que una tarea de la/el docente será ponerlos en relación.

El análisis algebraico parte de la idea de que no alcanza con mostrar que las fórmulas coinciden a partir de la aplicación de una propiedad, sino que además los dominios de definición de ambas fórmulas deben ser los mismos. En este caso puede observarse, por ejemplo, que el primer miembro de la expresión está definido para $x = 1$:

$$\log_4 [(2 - 4 \cdot 1)^2] = \log_4 (-2)^2 = \log_4 4 = 1,$$

mientras que el segundo miembro no lo está:

$$2\log_4 (2 - 4 \cdot 1) = 2\log_4 (-2)$$

Este valor de la variable funciona como un contraejemplo de la igualdad: no es verdad que las dos expresiones son equivalentes porque no son iguales para $x = 1$.

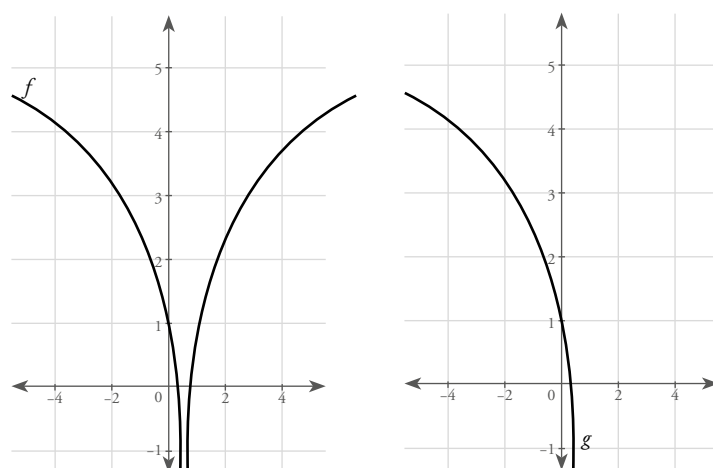
Ahora bien, más allá de haber obtenido la respuesta, el/la docente podrá proponer otro análisis, que consiste en determinar el conjunto de valores posibles para la variable independiente, para el cual la igualdad es verdadera. Aunque la aplicación de la propiedad es “correcta” —aunque solo vale para valores de la variable que pertenecen al dominio—, el primer miembro está definido para el conjunto $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, mientras que el segundo lo está para el intervalo $(-\infty; \frac{1}{2})$. Entonces, el mayor conjunto para el cual ambas expresiones están definidas es $(-\infty; \frac{1}{2})$. Considerando este dominio, las expresiones sí son equivalentes.

No se espera que este último análisis sea desarrollado por los/as estudiantes solos/as si nunca trabajaron con un problema similar. Si se lo considera como una situación de enseñanza, el/la docente puede comandarlo y realizarlo junto con los/as estudiantes. Una vez obtenidas las conclusiones, pueden registrarse en el pizarrón y en las carpetas. El siguiente es un ejemplo:

Dos expresiones son equivalentes si son iguales para todos los valores posibles de la variable. Para eso se tienen que cumplir dos cuestiones:

- que una de las expresiones pueda transformarse en la otra a través de cálculos y/o la aplicación de propiedades;
- que se considere un conjunto de valores de la variable para el cual ambas expresiones estén definidas.

Otra manera de analizar si las fórmulas son equivalentes es considerando las funciones que definen $f(x) = \log_4 [(2 - 4x)^2]$ y $g(x) = 2\log_4 (2 - 4x)$. El uso de un graficador permite visualizar que las gráficas comparten solo una rama. Esto se debe a que los dominios naturales de ambas funciones no coinciden, por lo que las fórmulas no definen la misma función.



La mirada funcional da lugar a buscar explicaciones algebraicas que den sentido a aquello que se visualiza, como sucedió en este caso con el cálculo de los dominios de ambas funciones.

Función trigonométrica

El *Diseño Curricular* vigente plantea la enseñanza de las razones trigonométricas en 3.º año. Se propone un tratamiento geométrico a partir de considerar las distintas razones invariantes que se pueden definir en una familia de triángulos rectángulos semejantes. Por otro lado, en 5.º año se plantea la enseñanza de las funciones trigonométricas, en el eje Álgebra y funciones.

Estos dos sentidos trigonométricos necesitan ser relacionados entre sí, para que los/as estudiantes comprendan que los valores de las razones trigonométricas dependen de uno de los ángulos agudos del triángulo y no de la longitud de sus lados. La extensión del dominio de las funciones a cualquier ángulo requiere independizarse de los triángulos para pensar en las coordenadas de un punto que pertenece a la circunferencia trigonométrica, considerando la cantidad de “giros” sobre ella que se quiera.

Intervenciones de enseñanza

A continuación, se presentan situaciones de enseñanza referidas al estudio de las funciones trigonométricas que toman en consideración tres asuntos principales a abordar con los/as estudiantes: *Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo y funciones trigonométricas*, *Análisis y búsqueda de soluciones de ecuaciones trigonométricas* y *Problemas que se modelizan mediante funciones trigonométricas*.

Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo y funciones trigonométricas

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Relacionar las funciones trigonométricas con las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.
- Analizar si un conjunto de condiciones que involucra valores de razones trigonométricas puede definir un triángulo rectángulo.

Problema

Decidan, en cada caso, si existe un triángulo rectángulo que verifique las condiciones pedidas. Si existe, hallen las medidas de sus lados. Si no, expliquen por qué.

- Un triángulo rectángulo que no es isósceles y tiene un ángulo agudo β tal que $\tan \beta = 1$.
- Un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α , tal que $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, el cateto opuesto a α sea de 2 unidades de longitud, y la hipotenusa, de 3 unidades.

Se presenta la parte a) del problema para que los/as estudiantes la resuelvan en pequeños grupos.

Se espera que escriban el cociente que representa la tangente del ángulo β como $\tan \beta = \frac{\text{cateto opuesto a } \beta}{\text{cateto adyacente a } \beta}$, aunque es posible que le asignen alguna variable que represente a cada uno de los catetos y/o que hagan una figura de análisis. Es esperable también que algunos/as de los/as alumnos/as no puedan seguir, mientras que otros podrán analizar cómo deben ser los catetos cuando el valor de la tangente es 1. La puesta en juego de estas estrategias por parte de los/as estudiantes resulta suficiente para proponer un espacio de discusión colectiva.

La puesta en común puede retomar el cálculo para la tangente y analizar que para que esta valga 1, los catetos deben tener la misma longitud. Si esto ocurre, el triángulo será isósceles, lo que contradice los datos dados en el problema. Luego, no existe un triángulo rectángulo que verifique las condiciones dadas.

En caso de utilizar la calculadora, obtener un ángulo de 45° y suponer que otro mide 90° lleva nuevamente a que el triángulo es isósceles.

Como parte de la discusión, el/la docente podrá poner en relación las dos formas de resolver, y proponer una caracterización de los triángulos rectángulos isósceles como aquellos que tienen un ángulo cuya tangente vale 1.

La parte b) permite poner en discusión que hay infinitos triángulos rectángulos con un ángulo cuyo seno vale $\frac{2}{3}$, todos semejantes entre sí.

Si bien en un primer momento es esperable que los/as estudiantes afirmen que es el único triángulo posible y que hallen la medida del lado faltante, $\sqrt{5}$, sin dificultad, esta resolución se constituirá en un punto de apoyo para proponer un debate acerca de la existencia de otros triángulos.

Si ningún/a estudiante hubiese concluido que existe más de un triángulo que verifica las condiciones dadas, el/la docente podrá proponer analizar uno con un cateto opuesto a α de 6 unidades y una hipotenusa de 9. El cálculo del seno dará $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, lo cual permite analizar que el seno de α vale $\frac{2}{3}$ porque el cociente que permite calcularlo se puede simplificar para obtener ese valor. Luego de analizar otros triángulos en los que $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, podrán concluir que tendrá ese valor siempre que el cateto opuesto a α mida $2k$ y la hipotenusa, $3k$, donde k es un número positivo. En ese caso, el cateto adyacente medirá $\sqrt{(3k)^2 - (2k)^2} = \sqrt{9k^2 - 4k^2} = \sqrt{5}k$. Luego, la familia de triángulos que tiene lados proporcionales a 2, $\sqrt{5}$ y 3, tendrán un ángulo agudo cuyo seno vale $\frac{2}{3}$. El/la docente podrá relacionar este hecho con la semejanza de triángulos y volver sobre la definición de las razones trigonométricas.

Análisis y búsqueda de soluciones de ecuaciones trigonométricas

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Expresar una ecuación en términos de una única función trigonométrica.
- Anticipar la existencia o no de soluciones.
- Hallar el conjunto solución de la ecuación algebraica o funcionalmente.

Problema

Resuelvan la ecuación $\cos x = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, con $x \in \mathbb{R}$.

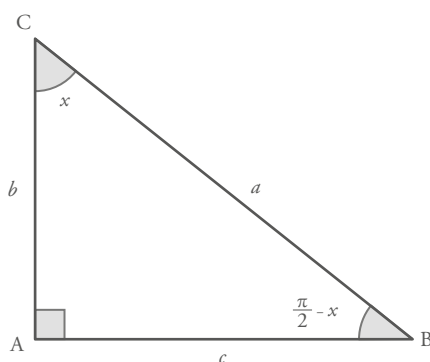
La ecuación presentada constituye un problema interesante para resolver en clase y discutir con los/as estudiantes los pasos necesarios para obtener la solución, tanto desde el marco algebraico como desde el funcional.

Se sugiere que los/as estudiantes resuelvan el problema en pequeños grupos.

El primer paso en la resolución algebraica consiste en determinar que es necesario que la ecuación esté expresada en términos de una sola función trigonométrica. Por este motivo, luego de un período de exploración, el/la docente puede plantear un primer espacio de discusión acerca de por qué es necesario y cómo lograrlo.

Si estuviera disponible la relación entre el seno y el coseno de ángulos que suman $\frac{\pi}{2}$, la sustitución de $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ por $\cos x$ sería rápida. Si no lo está o si requiere ser recuperada, entonces el/la docente deberá proponer alguna situación que permita hacerlo.

Por ejemplo, si el valor de x está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, ambos ángulos pueden considerarse como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Por ejemplo:

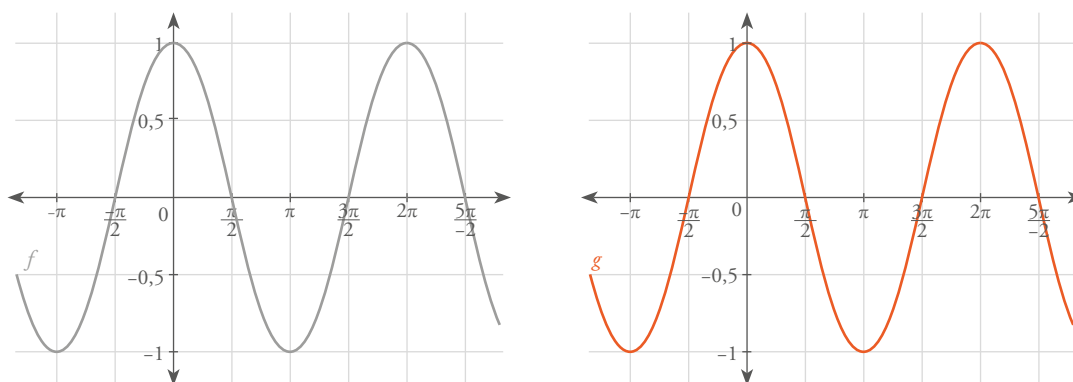


A partir de las razones trigonométricas es posible establecer:

$$\cos x = \frac{b}{a} \text{ y } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{b}{a}$$

Luego, para los valores de x considerados, la relación es verdadera. Sin embargo, es necesario mostrar que la relación es válida para cualquier ángulo. Como puede suceder que a esta altura los/as estudiantes no conozcan cómo hallar el seno de una diferencia, existe la posibilidad de apoyarse en un marco funcional para analizar que las dos fórmulas definen la misma función, aunque no constituya una validación.

Por ejemplo, se podrá proponer analizar los gráficos de las funciones de dominio Real $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

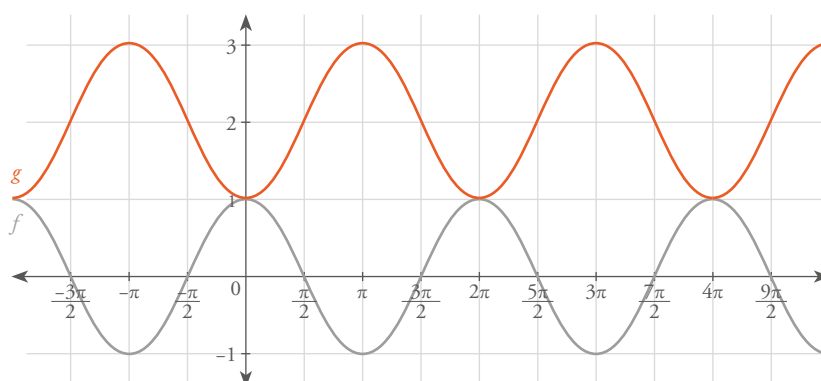


Si los/as estudiantes hubieran trabajado anteriormente con “corrimientos” de los gráficos de funciones, el/la docente podrá proponer analizar que el gráfico de $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ se obtiene a partir del gráfico de la función seno, desplazándolo $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha y haciéndolo simétrico respecto del eje y . Esas transformaciones lo convierten en el gráfico de la función coseno.

Una vez que la ecuación sea expresada en términos de una sola función trigonométrica, los/as estudiantes estarán en condiciones de elaborar una solución algebraica. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\cos x &= 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x &= 2 - \cos x \\ \cos x &= 1 \\ x &= k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

La resolución desde un marco funcional no requiere realizar transformaciones en la ecuación y puede hacerse buscando los puntos de intersección entre las funciones definidas por las fórmulas $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:



Resulta esencial que el/la docente ponga ambas formas de resolución en diálogo.

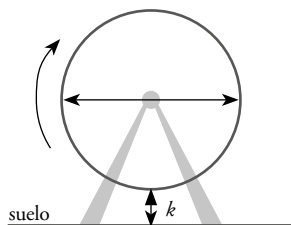
Problemas que se modelizan mediante funciones trigonométricas

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Vincular los datos de un problema situado en un contexto extramatemático con los valores de los parámetros de una función trigonométrica.
- Vincular los datos de un problema situado en un contexto extramatemático con los puntos del gráfico de una función trigonométrica.
- Utilizar la periodicidad de la función para hallar distintos valores con la misma imagen.

Problema

Un parque de diversiones tiene una vuelta al mundo de 111 metros de diámetro que gira a velocidad constante. La parte inferior de la vuelta al mundo está a k metros del suelo. Un asiento empieza la vuelta en la parte inferior de la vuelta al mundo.



El juego tarda 16 minutos en dar una vuelta completa.

- a) Sabiendo que el asiento está a 117 metros del suelo a los 8 minutos, hallen el valor de k .

La función que representa la altura del asiento a los t minutos de haber iniciado la vuelta está dada por $f: [0; 32] \rightarrow \mathbb{R} / f(t) = 61,5 + a \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right)$.

- b) Hallen el valor de a .
- c) Determinen en qué momento el asiento se encontrará a 30 metros del suelo por tercera vez.

El problema en cuestión permite poner en juego conocimientos ya elaborados acerca de funciones trigonométricas para resolver una situación en un contexto extramatemático.

Se propone que los/as estudiantes trabajen en pequeños grupos y que comiencen por resolver la parte a).

La resolución de esta parte requiere interpretar el significado del período de la función, dado como dato. Si bien es posible que los/as estudiantes logren hallar el valor de k , es importante poder explicitar en un espacio de discusión colectiva cómo fue obtenido. Para eso, luego de un momento de trabajo grupal, es posible proponer una puesta en común.

El/la docente podrá considerar algunas resoluciones que los/as estudiantes hayan desarrollado, haciendo hincapié en la validación de las estrategias. Se espera que reconozcan que si el período de la función –el tiempo que tarda en dar una vuelta completa– es de 16 minutos, entonces a los 8 minutos el asiento dará media vuelta, pues gira a velocidad constante, y se ubicará en el punto máximo de la vuelta al mundo. Luego, si la altura máxima es de 117 metros y el diámetro de la vuelta al mundo es 111 metros, la altura inicial del asiento será de $117 - 111 = 6$ metros.

Los/as estudiantes podrán resolver la parte b) del problema en los mismos grupos.

En este caso, las estrategias posibles consisten en considerar uno de los puntos que pertenecen al gráfico de la función para hallar el parámetro faltante a partir de él. Los/as estudiantes podrán elegir uno entre $(0; 6)$, $(8; 117)$ o $(16; 6)$, donde el segundo de ellos está dado de manera explícita en el problema, mientras que los otros dos se obtienen a partir del valor de k y la noción de periodicidad.

Las ecuaciones que se obtienen, en cada caso, son las siguientes:

$$\begin{aligned}6 &= 61,5 + a \cdot \cos 0 \\117 &= 61,5 + a \cdot \cos (\pi) \\6 &= 61,5 + a \cdot \cos (2\pi)\end{aligned}$$

Luego, $a = -55,5$ y la fórmula de la función resulta $f(t) = 61,5 - 55,5 \cos \left(\frac{\pi}{8}t\right)$.

Cuando se discuta con los/as estudiantes cómo resolvieron este ítem, el/la docente podrá proponer un análisis que permita comprender por qué con cualquiera de las tres ecuaciones se obtiene el valor del parámetro faltante.

Resulta importante volver sobre las partes a) y b) y proponer una reflexión acerca de los datos que fueron necesarios utilizar en cada caso, diferenciando los vinculados al contexto de los que requieren del uso del modelo. Por ejemplo, que a los 8 minutos la altura del asiento es de 117 metros es un dato del problema. Pero que en ese instante el asiento se encuentra en la parte más alta del juego es un dato que se obtiene del modelo.

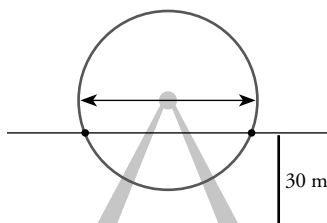
La resolución de la parte c) puede hacerse desde un marco algebraico o uno funcional. La resolución algebraica requiere resolver la ecuación $61,5 - 55,5 \cos \left(\frac{\pi}{8}t\right) = 30$:

$$\begin{aligned}61,5 - 55,5 \cos \left(\frac{\pi}{8}t\right) &= 30 \\ \cos \left(\frac{\pi}{8}t\right) &= \frac{21}{37}\end{aligned}$$

Una vez obtenido el valor del coseno, los/as estudiantes deben tener en cuenta dos cuestiones: que el valor del ángulo está dado en radianes y que se trata de hallar el tercer valor del dominio para el cual el coseno tiene el valor hallado.

Usando la calculadora se obtiene $\frac{\pi}{8}t = 0,9672478853\dots$, $t = 2,463076514\dots$, que es el primer valor de t para el cual el asiento está a 30 metros de altura.

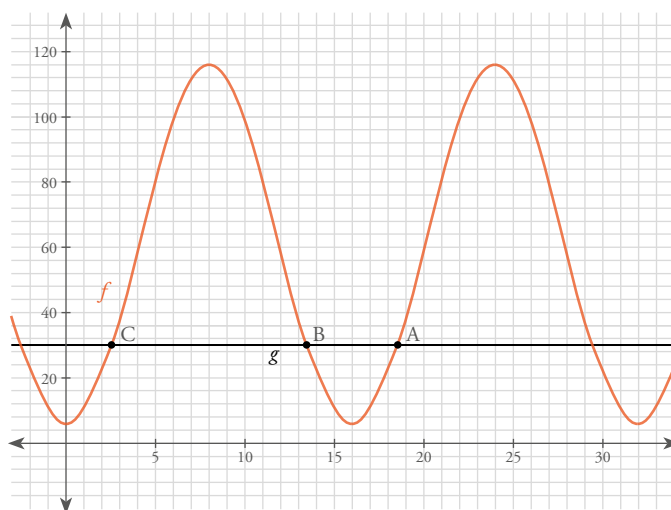
Si se usa el contexto de la vuelta al mundo, se puede observar que hay dos momentos en la primera vuelta en los que el asiento está a 30 metros de altura:



La tercera vez que esto ocurre es en la segunda vuelta, y el valor se obtiene al sumar un período al primer valor de t : $t = 2,463076514\dots + 16 = 18,463076514\dots$

Se puede discutir la importancia de la precisión necesaria para los datos. Al utilizar la calculadora, se hallan valores decimales cuyas expresiones no entran en la pantalla, por lo que deberán ser redondeados. Se podrá plantear que el uso de la fracción implica que el valor es exacto, mientras que si se lo redondea, a mayor cantidad de decimales, menor será el error que se comete.

Desde un marco funcional, se trata de hallar el tercer valor del dominio en el que se intersecan las funciones $f(t) = 61,5 - 55,5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y $g(t) = 30$, indicado como el punto A.



El uso de la función y el contexto de la vuelta al mundo, y la búsqueda de puntos de intersección entre dos funciones de manera independiente del contexto, son dos estrategias interesantes para analizar junto con los/as estudiantes. Resulta importante que ambas resoluciones queden registradas, junto con un análisis de la relación entre ellas.

Geometría y medida

Los contenidos geométricos que se proponen trabajar en el Ciclo Orientado abarcan la semejanza de figuras y el teorema de Thales, las razones trigonométricas, las posiciones relativas entre una recta y una circunferencia, y ángulos en circunferencias. Un objetivo prioritario y transversal de este eje es que los/as estudiantes continúen desarrollando un pensamiento de carácter deductivo, debido a que la geometría se constituye en un campo privilegiado para lograrlo.

En este apartado no consideraremos intervenciones de enseñanza para las razones trigonométricas, porque fueron tratadas en el eje Funciones y álgebra, en conjunto con las funciones trigonométricas.

Intervenciones de enseñanza

A continuación, se presentan situaciones de enseñanza referidas al teorema de Thales y a ángulos en circunferencias que consideran tres asuntos principales a abordar con los/as estudiantes: *Modelización de problemas que se pueden resolver mediante el teorema de Thales y/o la semejanza de triángulos, Ángulos inscriptos en una semicircunferencia y Rectas tangentes a una circunferencia.*

Modelización de problemas que se pueden resolver mediante el teorema de Thales y/o la semejanza de triángulos

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Modelizar un problema situado en un contexto extramatemático mediante triángulos.
- Analizar y decidir si dos triángulos son semejantes.

Problema

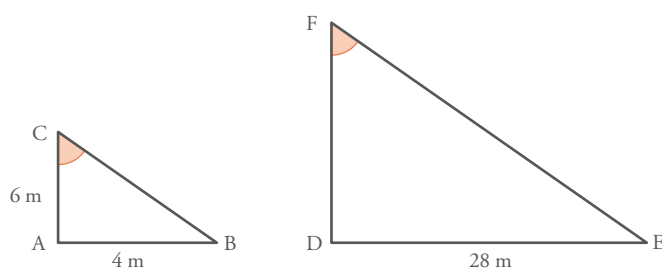
Un poste vertical de 6 metros de altura proyecta una sombra de 4 metros de longitud. A la misma hora, una torre cercana proyecta una sombra de 28 metros de longitud. Hallen la altura de la torre.

La situación que se presenta corresponde a uno de los primeros tipos de problemas en contextos extramatemáticos que abordan la semejanza y que se suelen proponer a los/as estudiantes. Además de la resolución matemática en sí, uno de los propósitos consiste en analizar de qué manera es posible modelizarlo.

El/la docente podrá proponer la resolución del problema en pequeños grupos. En un primer momento se espera que los/as estudiantes realicen figuras de análisis. En caso de que no las hagan, el/la profesor/a podrá proponer un espacio de debate acerca de su necesidad y de las características que deberían tener. También se podrían socializar algunos esquemas que hayan surgido, sean o no adecuados, y ponerlos en discusión.

La construcción de las figuras de análisis conlleva cierta reflexión, en el sentido de que algunos de sus elementos no requieren de precisión en el dibujo, aunque sí resulte necesario que representen y establezcan ciertas relaciones.

En este caso resulta importante elaborar que ambas situaciones se pueden representar mediante triángulos rectángulos:



Otro hecho fundamental, y sin el cual el problema no puede resolverse, es desentrañar el significado de que las mediciones fueron tomadas a la misma hora. Es posible que sea el/la docente el que tenga que explicitar cómo se traduce este hecho en cada uno de los triángulos. Es decir, que el ángulo que forma el sol con la vertical es el mismo en ambos casos. Esto permite saber que los ángulos ACB y DFE tienen la misma amplitud, por lo que también son congruentes entre sí los ángulos CBA y FED. Al tener sus tres ángulos congruentes, los triángulos ABC y DEF son semejantes.

El análisis anterior debería quedar registrado en las carpetas de los/as estudiantes, para que sirva de ejemplo de cómo se espera que expliciten las relaciones que permiten afirmar que los triángulos son semejantes.

El resto de la resolución del problema puede realizarse planteando las razones entre longitudes de los lados, como por ejemplo la siguiente:

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{DF}|}{|\overline{DE}|} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{|\overline{DF}|}{28} \Rightarrow |\overline{DF}| = 42$$

Los/as estudiantes también podrán notar que si los triángulos son semejantes y la longitud del segmento DE es 7 veces la del segmento AB, entonces la longitud de $\overline{DF}$ tiene que ser 7 veces la de $\overline{AC}$, es decir $6 \text{ m} \cdot 7 = 42 \text{ m}$.

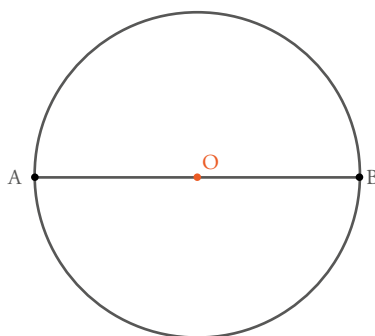
Ángulos inscriptos en una semicircunferencia

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

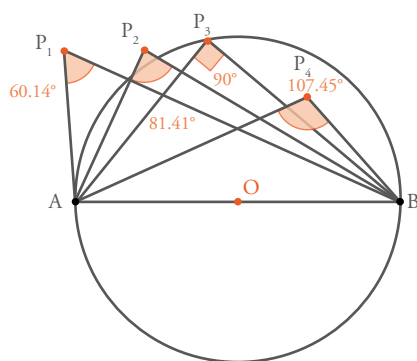
- Hallar la medida de ángulos en figuras que incluyen circunferencias mediante el análisis de las propiedades de triángulos.
- Generalizar las relaciones halladas en un caso particular a cualquier circunferencia y cualquier ángulo construido bajo estas condiciones.

Problema

Dada la siguiente circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$, ubicá un punto P tal que el ángulo APB mida 90° .



El problema planteado se trata, en un comienzo, de una situación de exploración en la que los/as estudiantes podrán ir analizando la medida del ángulo APB para distintas posiciones de P. Por ello, resulta conveniente que trabajen en pequeños grupos. Esta exploración puede ser hecha “a mano” o utilizando un programa de geometría dinámica. Podrán marcar puntos en distintas ubicaciones y obtener las medidas de los ángulos APB.



Es posible que luego de analizar la relación entre la ubicación del punto P y las amplitudes de los ángulos, algunos grupos generalicen aquello que observan y lo formulen de distintas maneras. Por ejemplo:

- A medida que el punto P se acerca al diámetro, la amplitud del ángulo se va agrandando.
- Cuanto más lejos del diámetro esté el punto P, más chico es el ángulo.
- Si P es exterior a la circunferencia, el ángulo es agudo. Si P pertenece a la circunferencia, el ángulo es recto, y si está en el interior del círculo, es obtuso.
- El ángulo es recto si P pertenece a la circunferencia.

Aunque no todas las afirmaciones responden al pedido del problema, todas abonan a hallar la relación que se busca.

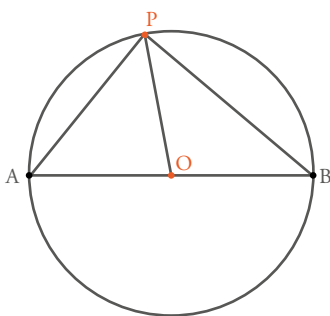
El/la docente podrá recorrer los grupos interviniendo para que los/as estudiantes intenten validar sus generalizaciones. Si bien no es simple, no se requiere que lo hagan de manera acabada. En un espacio de discusión colectiva, el/la docente podrá traccionar las explicaciones hacia una validación más formal.

Conviene comenzar por acordar cuáles son las conjeturas elaboradas, y retener las siguientes, en el orden propuesto. Este orden se debe a que cada una será utilizada en la validación de las posteriores.

- 1) Si el punto P pertenece a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$, el ángulo APB mide 90° .
- 2) Si el punto P es exterior a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$, el ángulo APB mide menos de 90° .
- 3) Si el punto P es interior a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$, el ángulo APB mide más de 90° .

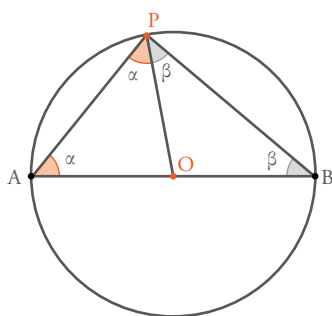
El/la docente podrá dirigir una validación conjunta con los/as estudiantes, en la que la escritura quede a su cargo. Esta decisión se debe a que es necesario trazar un radio como elemento auxiliar, uno de los asuntos más complejos en las validaciones geométricas. Luego del trazado, los/as estudiantes podrán tener un tiempo para pensar.

La validación se hará con lápiz y papel, sin utilizar la computadora, cuestión que requiere de un espacio de discusión con los/as estudiantes.



Se espera que puedan identificar que los triángulos APO y OPB son isósceles, por tener cada uno dos lados que son radios de la circunferencia. Algunos/as podrán avanzar identificando los ángulos congruentes.

Frente al pedido de la/el docente de analizar los ángulos de los triángulos, seguramente los/as estudiantes identificarán aquellos que son congruentes, lo que podrá ser anotado en el diagrama.



Se podrá preguntar si es posible hallar los ángulos faltantes de cada triángulo. Es esperable que los/as estudiantes adviertan que no es posible determinar su medida exacta pero sí que pueden ser expresados mediante letras que indiquen que miden lo mismo, aunque seguramente en un caso lo hagan en función de α y, en el otro, en función de β . Si bien no es incorrecto ni impide resolver el problema, no resulta conveniente y es interesante discutir por qué.

Así, expresarán la medida del ángulo POA como $180^\circ - 2\alpha$. A partir de aquí puede suceder que algunos/as estudiantes reconozcan que el ángulo BOP es suplementario con el ángulo POA, por lo que decidan que su magnitud es 2α . También habrá estudiantes que expresen la amplitud del ángulo BOP como $180^\circ - 2\beta$, en cuyo caso será necesario relacionar ambas y así poder expresar β en función de α :

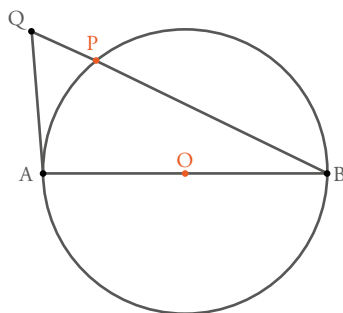
$$180^\circ - 2\beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ, \text{ que es la magnitud del ángulo APB.}$$

Otra manera de llegar a esta misma conclusión es a partir de identificar que el ángulo con vértice en P está formado únicamente por α y por β , por lo que la suma de los ángulos interiores del triángulo APB es: $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$.

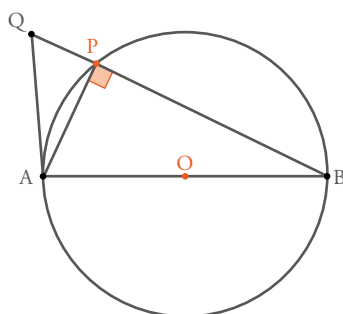
Una vez que se llega a la conclusión de que el ángulo APB mide 90° cuando el punto P pertenece a la circunferencia, resulta importante reflexionar acerca de la generalidad de esta propiedad: al no haber fijado la ubicación del punto ni haber medido, se trata de un resultado que vale siempre bajo las condiciones dadas.

Aunque la propiedad ya está validada, es un ejercicio valioso ver por qué el ángulo no puede ser recto si el punto es exterior o interior a la circunferencia. No es habitual considerar esta situación, pero aporta mucho a la construcción de estrategias de validación.

Por ejemplo, si se considera un punto Q exterior a la circunferencia, se obtiene el siguiente diagrama, donde P es la intersección entre el segmento QB y la circunferencia:

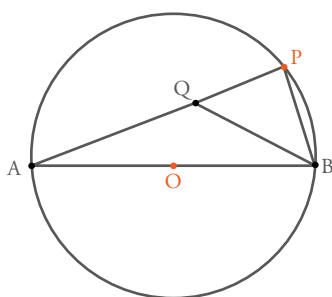


Si se traza el segmento AP , sabemos que el ángulo APB es recto por lo validado anteriormente, al igual que el ángulo APQ , adyacente a él.



Resulta así que el triángulo APQ es rectángulo en P , por lo que sus otros dos ángulos necesariamente son agudos. Luego, el ángulo AQB no es recto, sino agudo.

Del mismo modo, si el punto Q es interior a la circunferencia, se prolonga el segmento AQ , que interseca a la circunferencia en P .



El ángulo APB es recto, por lo que BQP es agudo. Luego, como el ángulo AQB es el suplemento del ángulo BQP , entonces será obtuso y no recto.

A lo largo de lo desarrollado, no solo se ha validado que un ángulo determinado por un punto P de la circunferencia y los extremos de un diámetro de la misma (distintos de P) es recto, sino que fue posible acceder a las razones acerca de por qué si se forma un ángulo recto con lados que contienen a los extremos de un diámetro, el vértice necesariamente tiene que pertenecer a la circunferencia. También fue posible clasificar al ángulo que queda determinado si el punto P es exterior o interior a la circunferencia.

A partir de la realización de actividades como la propuesta, es posible trabajar al mismo tiempo sobre la exploración, la elaboración de conjeturas y su validación, sobre como escribir una explicación y cómo elaborar un argumento.

Al finalizar el trabajo con este problema puede registrarse la propiedad en el pizarrón y en las carpetas:

Si los lados de un ángulo inscrito en una circunferencia la intersecan en los extremos de un diámetro, entonces el vértice del ángulo es un punto de la circunferencia.

A su vez, si los lados de un ángulo recto intersecan una circunferencia en los extremos de uno de sus diámetros, entonces el vértice del ángulo es un punto de la circunferencia.

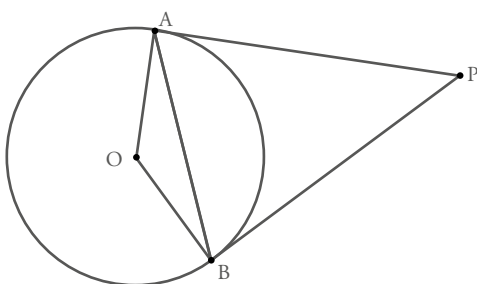
Rectas tangentes a una circunferencia

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Reconocer que si una recta es tangente a una circunferencia, forma un ángulo recto con el radio que corresponde al punto de tangencia, y viceversa.

Problema

En la siguiente figura, las rectas que contienen a los segmentos AP y BP son tangentes a la circunferencia de centro O. Si $|\widehat{APB}| = 50^\circ$, hallen las amplitudes de los ángulos interiores de los triángulos OAB y APB.



El problema se puede proponer para trabajar en parejas.

Mientras resuelven, el/la docente puede recorrer los grupos, interviniendo en caso de que los/as estudiantes no puedan avanzar en la resolución. Podrá sugerir que revisen en sus carpetas si alguna de las relaciones o propiedades vistas pueden servirles, esperando que puedan recuperar que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la circunferencia que tiene un extremo en el punto de tangencia.

Luego de un tiempo, podrá proponer un espacio de discusión colectiva.

En un primer momento, el/la docente podrá preguntar qué cuestiones tuvieron en cuenta para la resolución. Se espera que expliciten al menos las siguientes relaciones:

- Los ángulos OAP y OBP son rectos por estar determinados por una recta tangente a la circunferencia y el radio correspondiente al punto de tangencia.
- El triángulo OAB es isósceles porque dos de sus lados son radios de la misma circunferencia. Luego, los ángulos OAB y ABO tienen la misma amplitud.

Al poner el foco sobre las relaciones y por qué son válidas, se está trabajando sobre su dominio de validez, al mismo tiempo que se construyen condiciones para que puedan ser reutilizadas.

Para resolver el problema es necesario empezar por considerar el cuadrilátero OAPB, debido a que se conocen 3 de sus 4 ángulos. Resulta de mucha importancia explicitar esta decisión que se toma a partir del análisis de los datos que se conocen. Las reflexiones compartidas acerca de la elección de una determinada estrategia de resolución resultan muy fértiles para el aprendizaje de cómo se hace matemática.

Sabiendo que la suma de la amplitud de los 4 ángulos de un cuadrilátero es 360° , es posible determinar que la amplitud del ángulo AOB es de $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Ahora, teniendo en cuenta que el triángulo OAB es isósceles y que uno de sus ángulos es de 130° , cada uno de los otros dos medirá $\frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$.

Finalmente, las amplitudes de los ángulos PAB y PBA pueden hallarse mediante el cálculo $90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

Estadística y probabilidades

La enseñanza de la Probabilidad y la Estadística se inicia en la escuela primaria y se retoma desde el Ciclo Básico de la escuela secundaria.

En el caso de la Estadística, se parte del análisis de gráficos para avanzar hacia el cálculo de medidas de tendencia central y de posición, para luego calcular también medidas de dispersión.

En cuanto a la enseñanza de probabilidades, luego de un trabajo acerca de la idea de azar, se propone calcular probabilidades, caracterizadas como un número en el intervalo $[0; 1]$ que cumplen ciertas propiedades, que se van construyendo a partir de la resolución de problemas.

En estas situaciones abordaremos solo el aprendizaje de la Probabilidad.

Intervenciones de enseñanza

A continuación, se presentan situaciones de enseñanza referidas al estudio de la probabilidad que consideran dos asuntos principales a abordar con los/as estudiantes: *Problemas que involucran la probabilidad del espacio muestral y la de un suceso no elemental* y *Problemas que involucran la noción de independencia de sucesos y la probabilidad condicional*.

Problemas que involucran la probabilidad del espacio muestral y la de un suceso no elemental

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Identificar que la probabilidad del espacio muestral es 1.
- Determinar que la probabilidad de un suceso no elemental es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo constituyen.
- Decidir cuándo resulta conveniente calcular una probabilidad a través del complemento del suceso en cuestión.

Problema

Un dado cargado tiene cuatro caras numeradas 1, 2, 3 y 4. La probabilidad de que salga cada una de las caras está dada por la siguiente distribución:

Número	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	p

- Hallen el valor de p .
- Calculen la probabilidad de obtener al menos 2 puntos al tirar el dado.

El problema propuesto podría ser uno de los trabajados al inicio de una secuencia, una vez que los/as estudiantes hayan hecho cálculos de probabilidades simples.

El/la docente podrá proponer un trabajo en parejas.

Para la parte a), se busca que los/as estudiantes pongan en juego dos propiedades de la probabilidad: que la probabilidad del espacio muestral es 1 y que la probabilidad de la unión de sucesos disjuntos es la suma de sus probabilidades. Como es posible que lo hagan de manera implícita, el/la docente podrá ayudar a explicitar y registrar estas propiedades. Luego del trabajo en las parejas, conviene proponer un debate colectivo acerca de la resolución de esta primera parte del problema.

Como se dijo anteriormente, es esperable que los/as estudiantes hayan hecho el cálculo correcto para determinar el valor de p de manera implícita. Entonces el/la docente podrá, junto con ellos/as, producir una escritura donde queden registradas las propiedades utilizadas. Por ejemplo:

Si S representa el espacio muestral correspondiente al número que sale al tirar el dado, $S = \{1; 2; 3; 4\}$ y $P(S) = 1$. Por otro lado, los sucesos $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ y $\{4\}$ son mutuamente excluyentes, por lo que:

$$\begin{aligned}
 P(S) &= 1 \\
 P(\{1; 2; 3; 4\}) &= 1 \\
 P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) &= 1 \\
 \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} + p &= 1 \\
 p &= 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

Es esperable que los/as estudiantes no encuentren dificultades para la resolución de la parte b), luego del trabajo colectivo anterior. Seguramente logren identificar cuál es la probabilidad a calcular y puedan hacerlo.

El/la docente podrá poner en discusión dos maneras equivalentes de resolver el problema, una de cálculo directo y otra por el complemento.

En este caso, se trata de comparar las siguientes estrategias:

$$\begin{aligned}P(\{2;3;4\}) &= P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) \\&= \frac{2}{5} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\{2;3;4\}) &= 1 - P(\{1\}) \\&= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Más allá de los resultados numéricos iguales, la discusión debería centrarse en por qué son equivalentes las resoluciones y en cuál de las dos resulta más conveniente. La idea que podría circular es que el problema requiere hallar la suma de tres de las cuatro probabilidades que define la distribución. Como la suma de todas las probabilidades es 1, esa suma equivale a restar a 1 la única probabilidad no considerada.

En cuanto a la conveniencia, en este caso no hay mucha diferencia, pero la situación permite ponerla en discusión y puede funcionar para que los/as estudiantes tengan en consideración ambas formas de resolución para otros problemas.

Problemas que involucran la noción de independencia de sucesos y la probabilidad condicional

Se espera que un/a estudiante sea capaz de:

- Decidir si dos sucesos son o no independientes.
- Calcular la probabilidad de una intersección de dos sucesos dependientes.
- Identificar si una probabilidad es o no condicional.

Problema

En un aeropuerto, la probabilidad $P(H)$ de que todos/as los/as pasajeros/as lleguen a horario para un vuelo determinado es 0,70. La probabilidad $P(D)$ de que un avión despegue a horario es 0,85. La probabilidad de que el total de pasajeros/as lleguen a horario para su vuelo y que este despegue a horario es de 0,65.

Si se sabe que todos/as los/as pasajeros/as llegaron a horario para su vuelo, hallen la probabilidad de que el avión no despegue en horario.

La situación que aquí se presenta puede funcionar como una ocasión para reinvertir conocimientos ya trabajados. Se trata de un problema lo suficientemente conceptual como para resolver en un espacio colectivo, reflexionando sobre las herramientas de resolución posibles. Se propone una sola forma de resolución, que es la que permite una discusión acerca de la independencia de sucesos, aunque claramente no es la única.

El/la docente puede proponer una lectura individual del problema para luego registrar los datos:

$$P(H) = 0,70 \quad P(D) = 0,85 \quad P(H \cap D) = 0,65$$

Es posible que sea necesario discutir acerca de por qué la última probabilidad corresponde a la intersección de los sucesos, interpretando que el dato refiere al caso en que los dos sucesos ocurran simultáneamente.

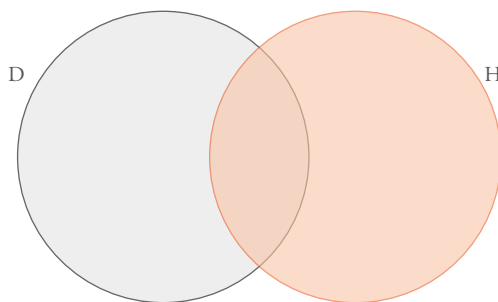
Volviendo al problema, resulta necesario interpretar la pregunta analizando por qué corresponde a la probabilidad condicional $P(\bar{D} / H)$. Teniendo en cuenta que la probabilidad condicional es un cambio de espacio muestral, es decir, el cálculo de una probabilidad referida a un espacio muestral restringido respecto del original, en este caso se pide hallar la probabilidad de que el avión no despegue a horario bajo la condición de que el total de los/as pasajeros/as llegaron a tiempo. Esta condición es la que modifica el espacio muestral.

Para calcular la probabilidad es necesario aplicar la fórmula:

$$P(\bar{D} / H) = \frac{P(\bar{D} \cap H)}{P(H)}$$

El cálculo del numerador requiere analizar si los sucesos son o no independientes. El contexto podría dar información acerca de esto, entendiendo que si los/as pasajeros/as no llegaron a horario, se modificaría la probabilidad de que el avión salga a la hora prevista. Sin embargo, será necesario verificarlo matemáticamente: habrá que analizar si, por ejemplo, $P(D \cap H) = P(D) \cdot P(H)$.

Como $P(D \cap H) = 0,65$ y $P(D) \cdot P(H) = 0,70 \cdot 0,85 = 0,595 \neq 0,65$, entonces los sucesos no son independientes. Resulta, entonces, necesario buscar alguna manera de calcular la probabilidad del numerador. El/la docente podrá proponer hacer un diagrama de Venn, que ayude a buscar relaciones útiles:



El suceso $\bar{D} \cap H$ es la parte del conjunto H que no incluye a D , es decir $\bar{D} \cap H = H - (H \cap D)$. Luego, $P(\bar{D} \cap H) = P(H) - P(H \cap D) = 0,70 - 0,65 = 0,05$.

$$\text{Finalmente, } P(\bar{D} / H) = \frac{P(\bar{D} \cap H)}{P(H)} = \frac{0,05}{0,70} = \frac{1}{14}$$

Bibliografía sugerida

- ANSES, Programa Conectar Igualdad, Plan Escuelas de Innovación de la Dirección de Comunicación y Contenidos, Equipo de Matemática: Andrea Novembre, Mauro Nicodemo y Pablo Coll (2015). *Matemática y TIC. Orientaciones para la enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: ANSES. Disponible en: <https://bit.ly/3kmnz4O>.
- GCABA. Ministerio de Educación e Innovación. Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa (2019). *Progresiones de los aprendizajes. Educación Secundaria. Ciclo Básico. Matemática*. Buenos Aires, Argentina: GCABA. Disponible en: <https://bit.ly/2NZUUGG>.
- GCABA. Ministerio de Educación e Innovación. Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología. Dirección General de Planeamiento Educativo. Gerencia Operativa de Currículum (2019). *Matemática. Funciones cuadráticas con Geogebra*. Serie Profundización de la NES. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación e Innovación. Disponible en: <https://bit.ly/2NDJ998>.
- GCABA. Ministerio de Educación e Innovación. Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología. Dirección General de Planeamiento Educativo. Gerencia Operativa de Currículum (2019). *Matemática. Funciones polinómicas con Geogebra*. Serie Profundización de la NES. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación e Innovación. Disponible en: <https://bit.ly/3uwb5MO>.
- GCABA. Ministerio de Educación e Innovación. Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología. Dirección General de Planeamiento Educativo. Gerencia Operativa de Currículum (2019). *Matemática. Funciones exponenciales*. Serie Profundización de la NES. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación e Innovación. Disponible en: <https://bit.ly/2ZSIYt7>.
- GCABA. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. Gerencia Operativa de Currículum (2015). *Diseño Curricular. Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires. Formación General. Ciclo Básico*. Buenos Aires, Argentina. Disponible en: <https://bit.ly/3ssXvYF>.
- GCABA. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. Gerencia Operativa de Currículum (2015). *Diseño Curricular. Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires. Formación General. Ciclo Orientado*. Buenos Aires, Argentina. Disponible en: <https://bit.ly/37KdcVe>.
- GCABA. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula (2007). *Matemática. Geometría*. Serie Aportes para la enseñanza. Nivel Medio. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación. Disponible en: <https://bit.ly/3ssRHYg>.
- Ministerio de Educación (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Campo de Formación General. Ciclo Orientado, Educación Secundaria*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación. Disponible en: <https://bit.ly/2ZSMiUW>.
- Ministerio de Educación. Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa (2005). *Las letras, las ecuaciones y las funciones. Reflexiones sobre su enseñanza y análisis del trabajo de los estudiantes en las evaluaciones nacionales*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación. Disponible en: <https://bit.ly/3kpxl0x>.



Vamos Buenos Aires