División en 5º y 6º año de la escuela primaria

Una propuesta para el estudio de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto

Programa
Maestros y profesores enseñando y aprendiendo de la Dirección de Capacitación

Proyecto
Fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en el segundo ciclo de la Educación Primaria

División en 5º y 6º año de la escuela primaria

Una propuesta para el estudio de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto

Programa
Maestros y profesores enseñando y aprendiendo de la Dirección de Capacitación

Proyecto
Fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en el segundo ciclo de la Educación Primaria

Material destinado a equipos docentes, directivos e inspectores

Coordinadora
Asesora Lic. Claudia Broitman

Autoras
Prof. Mónica Escobar
Prof. Mónica Salgado

Documento de apoyo para la capacitación
DGCyE / Subsecretaría de Educación

Dirección General de Cultura y Educación
Dirección Provincial de Planeamiento
Dirección de Producción de Contenidos
calle 13 entre 56 y 57 (1900) La Plata
Provincia de Buenos Aires
Junio de 2007

Índice

El material que se presenta a continuación, fue elaborado en el marco del Proyecto Fortalecimiento para la Enseñanza de la Matemática en el segundo ciclo de la Educación Primaria. La secuencia de problemas que se incluye, fue implementada en el Desafío matemático durante el año 2006, que forma parte de dicho proyecto.

Las autoras agradecen el compromiso de trabajo de los participantes: inspectores, directores, maestros, alumnos, familia y capacitadores de Equipos Técnicos Regionales de Capacitación. Su aporte permanente, las discusiones compartidas en el seno del trabajo, los procedimientos desplegados por los niños y las diversas intervenciones de los docentes han permitido la elaboración de este documento que se acerca a las escuelas.

Presentación

El presente documento tiene el propósito de comunicar una propuesta de trabajo sobre la división en segundo ciclo de la escuela primaria, en particular sobre las relaciones entre el dividendo, divisor, cociente y resto. La secuencia de problemas que se presenta en este documento fue implementada en el marco del proyecto Desafío matemático durante el año 2006.

Se incluye un análisis de los problemas en el que se consideran diversos procedimientos de resolución y errores que los niños pueden desplegar. Se proponen posibles intervenciones docentes que tienen la intención de promover discusiones en relación con los conocimientos que circulan en la clase y que el docente tiene la responsabilidad de hacer evolucionar. A su vez, se abordan aspectos ligados al trabajo matemático de los alumnos y a los roles del docente que lo posibilitan.

El marco teórico desde el cual se ha realizado la propuesta es la Didáctica de la Matemática. Consideramos en particular los aportes de Brousseau (1986) sobre las condiciones para que haya un trabajo matemático por parte de los alumnos y de Vergnaud (1986) sobre el campo conceptual multiplicativo. A su vez, entre las principales contribuciones específicas sobre la enseñanza de la división contamos con los aportes de Saiz (1996), Sadovsky (2005) y la presentación de un recorte de la tesis de doctorado de Patricia Sadovsky realizada en el marco de la jornada “Las interacciones con los procedimientos de los otros. Nuevos problemas, nuevos conocimientos” organizada por la Red Latinoamericana de Alfabetización (2003).

Otros materiales de apoyo sobre la enseñanza de las operaciones han sido los siguientes: de la DGCyE de la provincia de Buenos Aires, “Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la Multiplicación en los tres ciclos de la EGB” (2001), “Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la División en los tres ciclos de la EGB” (2001) y “Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB” (2001); de la Ciudad de Buenos Aires, “Documento Curricular Número 4” (1997) y “Documento de actualización curricular para 7º grado” (2000). [1]

1 Los documentos mencionados están disponibles en el portal www.abc.gov.ar y en www.buenosaires.gov.ar.

Acerca de la enseñanza de la división en la escuela primaria

La enseñanza de la división genera en los docentes muchas inquietudes. Por un lado, se cuestiona qué significa “saber dividir”. Las respuestas que la escuela puede dar a este interrogante son muy amplias y de acuerdo con ellas se enfatizará el trabajo sobre diferentes aspectos, por ejemplo, el dominio de los algoritmos o la resolución de determinado tipo de problemas. A su vez, se tomarán decisiones respecto del año en que será objeto de estudio o del tiempo que se le destinará a lo largo de varios años.

Otra preocupación –presente también en la enseñanza de la suma, la resta y la multiplicación– se vincula a *cómo ayudar a los alumnos a reconocer las ocasiones de empleo de la división como herramienta de resolución de determinado problema*. Y suele ocupar un lugar central la pregunta sobre *¿cómo enseñar el algoritmo de la división?*, fundamentalmente al entrar en escena la división por dos cifras. Se discute habitualmente si se habilita la escritura de la resta y cuándo “sacarla”.

A partir de la producción didáctica de los últimos años, se ha empezado a reconocer que la división es un concepto muy complejo que requiere ser abordado a lo largo de muchos años. Veamos algunos aspectos de un recorrido posible.

El concepto de división permite resolver diversos problemas, entre los que se encuentran los que permiten averiguar cuánto le corresponde a cada parte dentro de un reparto o en cuántas partes se puede repartir determinada cantidad conociendo lo que recibe cada una. Ya desde 1º y 2º año los alumnos pueden resolver problemas por medio de diferentes estrategias (dibujar, contar, sumar o restar). Por ejemplo: “*Se quieren repartir 24 caramelos entre 6 chicos y que todos reciban la misma cantidad. ¿Cuántos le dan a cada uno?”* (problema de reparto) o “*Se quieren ordenar 24 discos compactos en estuches con capacidad para 6 discos. ¿Cuántos estuches se necesitan?*” (problema de partición).[1]

En 3º y 4º año, el maestro podrá proponer problemas de reparto y partición que impliquen analizar qué sucede con el resto, por ejemplo: “*Se quieren ordenar 26 discos compactos en 4 estuches con capacidad para 6 discos. ¿Puedo colocarlos a todos? ¿Sobran? ¿Cuántos*?” En este problema de reparto, sobran discos. Al analizar qué se hace con el resto, se podrá concluir que en este caso no se puede seguir repartiendo. En otros problemas el resto admite ser fraccionado. Por ejemplo al repartir chocolates o dinero: “*Juan tiene 15 alfajores y quiere repartirlos entre sus dos amigos en partes iguales. ¿Cuántos alfajores obtendrá cada uno?*”. Este tipo de problemas es una buena

[1] Para ampliar sobre la enseñanza de la división en primer ciclo consultar DGCyE (1999), Broitman (1998 y 1999).

vía de entrada al uso de 1/4 o 1/2. En otros problemas el resto exige considerar “uno más”, por ejemplo: “*Se quieren ordenar 26 discos compactos en estuches con capacidad para 6 discos.¿Cuántos estuches se necesitan?* Si bien el cociente es 4, al sobrar 2, se necesita un estuche más. La respuesta al problema será: “5 estuches”.

En estos grados, simultáneamente a trabajar una diversidad de problemas, es posible abordar algunas relaciones entre multiplicación y división. Por ejemplo: “*Si se usa que 5 x 7 = 35, ¿cuánto será 35 : 5? ¿Y 35 : 7?”*. También será interesante presentar cálculos mentales antes de conocer los algoritmos: 1000: 2= 5000:5= 500:2= 2000: 4= .

Entre 3º y 4º los alumnos pueden estudiar diferentes algoritmos de la división, tales como aquellos en los que se evidencian las restas explicitando los pasos intermedios –siendo por ello más extenso y a la vez más transparente–. Por ejemplo:

```
   4560          /4_____
 -4000 (x4)      1000
   560
 - 400   (x4)      100 +
   160
 - 160  (x4)        40
       0         1140
```

Este cálculo involucra poner en juego conocimientos sobre la descomposición de números y la multiplicación por la unidad seguida de ceros. Será de gran importancia promover el apoyo en la estimación del cociente para favorecer el control de los resultados que obtienen. Progresivamente se irá avanzando hacia la comparación entre diversos algoritmos producidos por los alumnos y algoritmos convencionales. El trabajo simultáneo con el cálculo mental, el cálculo estimativo, el cálculo con calculadora y el cálculo algorítmico (cuentas más convencionales) permitirá ir enriqueciendo los recursos para resolver problemas cada vez más complejos.

Entre 4º y 6º grado los alumnos pueden conocer y estudiar diferentes tipos de problemas que amplían el sentido de la división a nuevos problemas, por ejemplo los problemas que implican averiguar cuántas veces entra un número dentro de otro:[2] “*Estoy en el número 125, si doy saltos para atrás de 4 en 4, cuál es el número al que llegaré antes del 0? ¿Cuántos saltos daré?*”. Inicialmente los alumnos no reconocen a la división como una herramienta de resolución. Podrán recurrir a dibujar la recta señalando los saltos, a restar 4 sucesivamente a 125. La reflexión y comparación de estrategias en torno a los procedimientos desplegados permitirá avanzar hacia el reconocimiento de la división como un recurso más económico.

Otro conjunto de problemas a proponer a los alumnos, a partir de 3º y 4º año, promueve la reflexión sobre el funcionamiento de la división como herramienta que permite resolver problemas de proporcionalidad, como: “*¿En 8 paquetes iguales hay 1000 alfileres, cuántos habrá en cada paquete?”* y problemas que involucran “filas y columnas” por ejemplo, “*Si hay 240 baldosas para un patio y se disponen en 8 filas, cuántas baldosas por fila hay?*”. [3] En el 2º ciclo se profundiza el estudio de estrategias de cálculo mental y las relaciones entre la división y la multiplicación, por ejemplo:[4] *“A partir del resultado de esta división 2400 : 30 = 80, resolvé los siguientes cálculos:*

2 Estos problemas aparecen en documentos ya mencionados como problemas de “iteración” o “congruencia”.
3 Estos problemas aparecen en documentos ya mencionados como problemas de organizaciones rectangulares y serán abordados en la primera etapa de este documento.
4 Otras propuestas similares en Broitman, C. (2005).

80 x 30 = *1.200 : 30 =* *1.200 : 40 =*

El estudio de las propiedades de las operaciones entre 5º y 6º grado permitirá incluso avanzar hacia la anticipación de resultados sin hacer cálculos. Por ejemplo: "*¿Dará lo mismo 144 : 12 que 144: 4 : 3? ¿Y que 144: 6 : 2?*". "*A partir del cálculo 13200: 3= 4400, ¿cuánto será el resultado de 13200: 6?¿Y 13200: 12?*".

En 6º año se espera, a su vez, que se inicien en el estudio de los criterios de divisibilidad y en el uso de conceptos de múltiplos y divisores para resolver una amplia gama de problemas que involucran también la división. Por ejemplo: "*¿Será cierto que si un número termina en 3 es múltiplo de 3?*". "*¿Será cierto que si divido a un número por 12 y su resto es 0, si lo divido por 6 también el resto será 0?*" Es importante vincular estos conceptos con los problemas antes mencionados (de iteración), por ejemplo: "*Si estoy en el número 136 y doy saltos para atrás de 3 en 3, ¿llegaré justo al 0?*".

Hemos planteado algunos aspectos de un recorrido –excesivamente sintético e incompleto– para enfatizar el largo plazo en el estudio de este concepto y mostrar la diversidad de aspectos que compromete. Saber dividir implica reconocer a la división como herramienta de resolución en las mencionadas clases de problemas y dominar cada vez más variadas estrategias de cálculo mental, estimativo, algorítmico y con calculadora.

En 5º y 6º año es importante también que los alumnos se enfrenten a la resolución de problemas que les permitan "dar una vuelta de tuerca" sobre la división, analizando, con más profundidad las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto[6]. Este será el tema de este documento.

[6] Se retomará el análisis de esta clase de problemas que aparece en "Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en la EGB", DGCyE. (2001).

Una propuesta para trabajar las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto

Este tipo de problemas permite estudiar un nuevo aspecto de cómo funciona la división, herramienta a la que se ha recurrido para resolver diversidad de problemas en años anteriores y sobre la que ahora se propondrá una mirada más “interna” respecto de su funcionamiento.

La propuesta sobre la enseñanza de la división que se presenta a continuación fue trabajada con alumnos de 6° año en el marco del proyecto Desafío matemático durante el año 2006 en las escuelas de gestión pública de la provincia de Buenos Aires. La intención de comunicarla tiene el doble propósito de promover el análisis de lo sucedido durante su implementación –dirigida especialmente a los docentes participantes del proyecto– y, a su vez, ser comunicada como propuesta a todos los docentes de escuela primaria para que pueda ser nuevamente implementada dentro y fuera del marco de este proyecto.

Los contenidos que se abordan son los siguientes:

1. Análisis de la relación *Dividendo = Cociente x divisor* + *resto* y *resto menor que divisor y mayor o igual a 0*.
2. Establecimiento de condiciones a partir de las cuales se admiten infinitos valores, una solución única, no se admite solución o se admite una cantidad determinada de valores.
3. Uso de la calculadora para reconstruir el resto de la división.

La propuesta consta de cinco etapas, cada una de ellas podrá requerir de una o más clases. En cada una se abordan contenidos ligados a la enseñanza de la división y, simultáneamente, otros ligados al modo de producir propio de la matemática, referidos a las normas, a las reglas del juego matemático.

En la **primera etapa** se proponen una o dos clases en las que se presentan problemas donde se estudia la división como herramienta para resolver problemas de organización rectangular. Es propósito de esta etapa poner en circulación algunos conocimientos que tienen los alumnos sobre multiplicación y división.

En la **segunda etapa** se ponen en juego las relaciones mencionadas a través de problemas que involucran averiguar el dividendo y el divisor teniendo como dato los valores del cociente y del resto. En esta etapa, se introduce la pregunta sobre la cantidad de soluciones que admite el problema, siendo infinitas en el caso seleccionado. Se inicia la reflexión sobre un aspecto ligado a las normas del trabajo matemático que puede resultar una ruptura respecto de lo habitual: adjudicar valores arbitrarios al divisor.

En la **tercera etapa** se proponen problemas que implican analizar cómo varían el resto o el dividendo cuando se modifican los valores de los otros números. Se avanza en el análisis de la cantidad de soluciones que admite cada problema.

En la **cuarta etapa** se propone inicialmente analizar cómo determinar el divisor y el resto a partir del dividendo y el cociente y, luego a la inversa, cómo determinar el dividendo y el cociente a partir del divisor y el resto. Se profundiza el análisis de la cantidad de soluciones. Se introduce el uso de la calculadora para averiguar el resto a partir de la expresión decimal de un cociente.

En la **quinta etapa** se propone retomar las conclusiones a las que se arribaron en las etapas precedentes. Si bien este trabajo se propone al iniciar cada etapa, es interesante plantear una revisión global, al finalizar la secuencia, que aborde todo lo realizado a lo largo de la misma. Se apunta a favorecer la identificación de los conocimientos que circularon en este conjunto de clases, a comparar unos problemas con otros estableciendo semejanzas y diferencias y a que los alumnos tomen conciencia de lo que han aprendido. Es una etapa dirigida especialmente a organizar aquello que se ha estudiado. Consta de actividades individuales, grupales y colectivas.

En cada etapa se presenta una colección de problemas y su análisis didáctico que incluye cuáles son los conocimientos puestos en juego por los alumnos para resolver los problemas, cuáles son nuevos y forman parte de los conocimientos que van elaborando al resolverlos, un análisis de posibles procedimientos y errores que los niños pueden desplegar y posibles intervenciones docentes.

Primera etapa: la división como herramienta para resolver problemas de organización rectangular

Los problemas de organización rectangular son aquellos que involucran una organización espacial en filas y columnas. Este tipo de problemas puede ser abordado desde primer ciclo. Los primeros problemas que se presentan a los alumnos plantean como incógnita la cantidad total de elementos. Por ejemplo, en 2º o 3º año: "*En la escuela se organiza una función de títeres. Las sillas para el público se colocarán en 9 filas de 15 sillas cada una. ¿Cuántas sillas se usarán?*".

Inicialmente, para resolverlos los niños podrán dibujar las sillas y proceder a contarlas. Más adelante, pondrán en juego procedimientos de cálculo realizando sumas. Para promover el avance del dibujo al cálculo se podrá aumentar la cantidad de sillas. A partir del análisis de lo realizado, se apuntará a que los niños identifiquen que las filas y columnas tienen la misma cantidad de elementos y que la suma es un recurso de cálculo que permite resolver el problema. Más adelante, se tenderá a que reconozcan que estos problemas también se pueden resolver multiplicando.

En 3er año se avanza en el estudio de estos problemas y se inicia el reconocimiento de la división como herramienta de resolución de este tipo de problemas, aspecto que será profundizado en el 2do ciclo. Por ejemplo: "*En la escuela se organiza una función de títeres. Se colocarán 120 sillas para el público. Si en cada fila se colocan 15 sillas, ¿cuántas filas pueden armarse?*". Algunos niños no recurrirán a la división desde un inicio: dibujarán filas de 15 sillas hasta completar las 120 que constituyen el total, buscarán cuál es el número que multiplicado por 15 da 120. Se irá avanzando hacia el reconocimiento de la división como herramienta que permite averiguar el factor faltante.

En otros problemas en que se sabe la cantidad de filas se puede preguntar por la cantidad de sillas que tendrá cada fila: "*En la escuela se organiza una función de títeres. Se colocarán 120 sillas para el público. Se armarán 9 filas de la misma cantidad de sillas cada una. ¿Cuántas sillas tendrá cada fila?*".

Los problemas presentados hasta el momento, tienen resto cero. En este tipo de problemas la multiplicación y la división funcionan como operaciones inversas. Si se conoce el valor de las filas y las columnas puede averiguarse el total de las sillas a través de una multiplicación. Si, en cambio, se dispone del dato del total de sillas y de la cantidad de filas, se puede averiguar cuántas sillas tiene cada fila dividiendo los datos entre sí. Asimismo, si se conocen el total y la cantidad de sillas por fila, se puede arribar a la cantidad de filas dividiendo ambos valores.

Se presenta a continuación un ejemplo en el que el resto es distinto de cero: "*En la escuela se organiza una función de títeres. Hay 123 sillas para los actos escolares. Si se colocan en 9 filas, ¿cuántas sillas tendrá cada fila? ¿Sobran sillas? ¿Cuántas?*". En este caso, el resto no se puede seguir repartiendo, por lo cual sobran sillas[7]. Para resolver este problema los alumnos podrán recurrir a gráficos o a cálculos que representen la situación:

1. Sumar 9 tantas veces como sea necesario hasta llegar a 123. En este caso llegan a 120 y sobran 3.
2. Restar desde 123 muchas veces 9
3. Buscar una multiplicación
   9 x 15 = 120
   120 + 3 = 123
4. Usar la división
   123 / 9
   3 15

Comparar las diversas estrategias utilizadas permitirá reconocer a la división como una manera económica de encontrar la solución.

Si los alumnos no hubieran estudiado esta clase de problemas entre 3º y 4º año, será un buen momento para hacerlo antes de iniciar la 1º etapa de esta secuencia. La colección anterior de problemas podrá ser planteada en una o dos clases.

En esta primera etapa se presenta el siguiente problema:

Problema 1

"El piso del aula es rectangular y tiene en total 330 cerámicos. Todos los cerámicos son cuadrados y están enteros. En cada fila hay más de 12 y menos de 18 cerámicos.

a. ¿Cuántos cerámicos hay en cada fila?
b. ¿Cuántos en cada columna?
c. ¿Hay una sola posibilidad? ¿Por qué?".

Se espera que al avanzar en la resolución del problema los alumnos reinviertan sus conocimientos respecto de la multiplicación y la división. Podrán desplegar procedimientos más ligados a representaciones gráficas de la situación, otros vinculados con la multiplicación y otros con la división. Podrán iniciar la resolución por algún procedimiento más costoso y en el proceso abandonarlo por otro que consideran más económico o confiable. La diversidad de procedimientos brindará un marco apropiado para generar espacios de discusión en el momento de trabajo colectivo en el que se propiciará la comparación entre los variados intentos argumentando a favor de unos u otros teniendo en cuenta su pertinencia, economía, confiabilidad.

¿En qué sentido este problema "prepara el terreno" para las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto? En este primer problema se inicia el análisis de las relaciones entre dividendo, divisor y cociente cuando el resto es 0. En las siguientes etapas se avanza en el análisis de las relaciones que se establecen con el resto y cómo se modifican unos números respecto de los cambios de otros.

[7] Este aspecto será abordado en la etapa 4 de este documento. En el problema 3 de esa etapa se presenta una situación de reparto de caramelos, el resto no admite ser dividido, el cociente no admite una expresión decimal.

Por otra parte, se profundizan las relaciones entre multiplicación y división. Frecuentemente, los alumnos asumen ambas operaciones como desvinculadas, y de no mediar un trabajo que tienda a explicitar estas relaciones podrían permanecer ocultas para los niños. Enfrentarse a este tipo de problemas colabora en hacer evidentes las relaciones entre ambas. Algunos de los procedimientos que despliegan los alumnos se vinculan con este aspecto: "*Tengo que encontrar un número entre 12 y 18 que me dé justo 330 porque no tienen que sobrar cerámicos. El 15 da justo 330. Entonces tengo que encontrar un número que multiplicado por 15 me dé 330*". Este tipo de razonamiento hace jugar las relaciones entre multiplicación y división aunque no se registren por escrito en forma de cálculo. O bien puede ser pensado como una división con incógnitas, donde 330 es el dividendo, el divisor es un número entre 12 y 18 y el resto es 0. La idea implícita de múltiplos y divisores está presente en varias estrategias. Algunos alumnos podrán apelar incluso explícitamente a dichos conceptos: buscar divisores de 330 entre 12 y 18.

En este primer problema comienza a circular un procedimiento que será puesto en juego en las siguientes etapas: emprender la búsqueda de factores (d x c) que den como resultado el dividendo. El problema está contextualizado en una situación hipotética y en las siguientes etapas se va desprendiendo de estos contextos de modo de centrarse en el análisis de las relaciones entre D, d, c y r.

El problema enfrenta a los alumnos a reflexionar sobre la cantidad de soluciones posibles. Poner en discusión esta respuesta permite un avance en sus conocimientos dirigido a reconocer que hay problemas que tienen una solución8, otros que tienen varias, otros que tienen infinitas, otros que no tienen solución. Este aspecto será retomado a lo largo de toda la secuencia. A su vez los alumnos podrán advertir que diferentes estrategias permiten resolver un mismo problema, que una misma operación –en este caso la división– permite resolver distintos tipos de problemas.

¿Cómo organizar la clase? Inicialmente los alumnos interactúan con el problema en forma individual. En este momento de trabajo el alumno se enfrenta al problema e intenta comprender lo que el mismo plantea. El docente puede intervenir para favorecer su comprensión por parte del alumno brindando la información que resulte necesaria para entender la consigna sin informar sobre la resolución del mismo. Durante la clase, el docente podrá reiterar la consigna o las condiciones del problema (por ejemplo, que la cantidad de cerámicos está entre 12 y 18) de modo de favorecer que el alumno se centre en la tarea. El tipo de trabajo requerido al alumno exige una posición sin duda exploratoria: el alumno no conoce la respuesta y tampoco le es evidente cómo llegar a ella. Pero a la vez tiene recursos para explorar.

Los niños inician un procedimiento de resolución poniendo en juego los conocimientos de los que disponen, abandonan los caminos que consideran erróneos e intentan nuevas alternativas. El docente observa el trabajo de los alumnos pudiendo intervenir para sugerir un procedimiento al alumno que no puede iniciar la resolución, solicitar el registro escrito de sus procedimientos para facilitar el intercambio grupal al comunicar sus estrategias de resolución.

Posteriormente se propone generar un espacio en pequeños grupos en el que los alumnos intercambian ideas, comparten procedimientos, dan cuenta de las razones que los llevaron a tomar algunas decisiones, se hacen preguntas, revisan errores propios y ajenos, interpretan sus propias anotaciones y las de sus pares, reformulan su producción, llegan a una respuesta común o admiten diversas respuestas posibles. Al finalizar la resolución, deberán explicar al resto de la clase lo realizado en el grupo (pudiendo comunicar parte del proceso, errores, caminos descartados, motivos de la elección de la respuesta).[9]

8 Los niños pueden confundir cantidad de soluciones con diversidad de procedimientos por los que se puede arribar a la solución. Será interesante advertir si los niños logran distinguir estas dos ideas.

9 Es conveniente que esta explicación oral se apoye en un registro escrito que el grupo realice durante el trabajo grupal.

Finalmente se realiza un intercambio con el grupo total en el que cada grupo comunica a los otros grupos el trabajo realizado, se analizan o comparan procedimientos, se arriba a conclusiones. La puesta en común presenta la oportunidad de analizar los errores producidos, tarea relevante ya que los alumnos identifican los procedimientos que no llevan a la solución correcta ampliando el sentido de los conocimientos trabajados. Este análisis mejora las condiciones de control de sus producciones y les ayuda a descartar procedimientos inadecuados en la resolución de nuevos problemas.

El Problema 1 en las aulas

A continuación se relevan algunos procedimientos, acertados o erróneos, que fueron producidos por los alumnos al enfrentarse a la resolución de este problema en el marco del trabajo grupal o colectivo. Los mismos dan cuenta de la diversidad de respuestas y conocimientos que se ponen en circulación en las aulas[10]. A su vez, nos muestran la profundidad y claridad de las explicaciones de los niños cuando se crean las condiciones didácticas que favorecen la discusión con los pares, la expresión de ideas y la explicitación de argumentos.

Una de las respuestas observadas se basó en una representación gráfica y la puesta en juego de los conocimientos sobre la multiplicación y la división que tenían disponibles. En este caso resultó pertinente analizar en la puesta en común cómo llegaron a determinar la cantidad de cerámicos de cada pared. Algunos niños realizaron el gráfico para comunicar su respuesta, calcularon que eran 22 filas de 15 cerámicos cada una y luego lo graficaron.

Otros niños produjeron distintos intentos gráficos o numéricos hasta encontrar el correcto. Por ejemplo, comenzaron dibujando una fila de 13 cerámicos y continuaron superponiendo filas de 13 cerámicos. Al terminar cada fila, contaban el total. Fueron realizando ajustes. Si bien algunos niños abandonaron este procedimiento por ser costoso, les permitió reconocer que podían resolver el problema sumando o multiplicando.

Al analizar y comparar los distintos procedimientos durante la puesta en común, los niños expresaron: *"Este problema se puede resolver dibujando y contando uno por uno los cerámicos pero es muy largo*". Esta idea pudo ser retomada al registrar las conclusiones a las que arribaron a partir del trabajo realizado. Otros iniciaron la búsqueda probando con diferentes pares de factores que arrojaran 330 como producto, poniendo en juego sus conocimientos sobre la multiplicación. Este procedimiento resultó más costoso. Por ejemplo: *"Hicimos 13 x 36 = 468 y no da, después probamos con 14, con 15, con 16 y con 17 porque son los números con los que se podía*". Si bien el intervalo acota los números con los cuales explorar, el segundo factor no está determinado. Los alumnos que no logran anticipar un número posible, toman al azar distintos números lo cual extiende la búsqueda y la torna estéril.

Al no reconocer que pueden dividir 330 por esos números para encontrar el número de filas, dejan abierto a infinitas posibilidades con las cuales probar. Podrán ir realizando ajustes en función de los resultados que obtienen, dicen *"me paso, tiene que ser más chico*", "*estamos cerca*". Los que emprenden este camino reconocen que es costoso e infructuoso y tienden a abandonarlo. En la fase individual no todos logran iniciar otro procedimiento, pero sí logran reconocer otros en la instancia del pequeño grupo. Al analizarlos, los niños dicen "*no te conviene probar con cualquier número*".

Varios buscaron sucesivos múltiplos de 13, 14, 15,16 y 17 para ver en qué casos lograban arribar a 330. Al explicar sus ideas expresaron: "*Para que el número termine en cero (330) debe ser múltiplo de 15 porque 330 termina en cero, por lo que el divisor debe terminar en cero o en cinco. Además*

[10] Los procedimientos, errores e intervenciones docentes fueron relevados en el marco del trabajo realizado en el Desafío Matemático 2006 en distintas aulas de 6to. año.

no puede ser otro número de los posibles porque 'dice bien claro en el problema' que los cerámicos son enteros". Un grupo registra en su hoja los múltiplos de 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195, 210, 225, 240, 255, 270, 85, 300, 315, 330.

En una de las escuelas, en el momento colectivo, se genera este diálogo entre un alumno y la docente:

Alumno: *El resultado es 15 y 22* (no realizó cálculos).
Maestro: *¿Cómo sabés que es 22?*
Alumno: *Conté los múltiplos y para llegar a 330 tengo 22 y como le agregué 15 son 22 veces el 15.*

Otro alumno explicó: "*Yo formé el 330 como 30 por 11, pero como 30 es igual a 15 x 2, para formar el 330 utilizo el 15 y duplico el 11*". Algunos partieron de la división, buscando un divisor de 330 que se encuentre entre 12 y 18. Este procedimiento resultó más económico, tanto para encontrar la respuesta como para asegurar que es la única.

Otros explicaron cómo llegaron a la respuesta: "*Sabíamos que era 15 x 22 = 330, porque si hacés 15 x 2 es 30 y si hacés 15 x 20 te da 300. Entonces 15 x 22 te da 330*" y otro alumno explica, "*Hice 15 x 20 = 300, había que agregar 30 (15 x 2) son 2 filas más. 22 filas*". Su docente durante la puesta en común pregunta: "*¿Se puede hacer otra cuenta para resolver el problema?*". Los alumnos mencionan estas posibilidades:

- "*Este problema se puede resolver restando 15 a 330 hasta que se acaben los cerámicos, después contás cuántas veces le restaste 15 y sabés cuántas son las filas*".
- *"Este problema se puede resolver sumando 15 veces 22 ó 22 veces 15 o multiplicando para no tener que sumar todas las cantidades que se repiten haciendo 15 x 22 ó 22 x 15*".
- *"La más rápida es 330 : 15 = 22*".

Para saber si había otras posibilidades, realizaron las divisiones faltantes con los números incluidos en el intervalo propuesto por el problema: 330 : 13, 330 : 14, 330 : 16 y 330 : 17. Confirmaron lo que sospechaban: 22 x 15 es la única respuesta. "*Este problema se puede resolver dividiendo 330 : 13, 330 : 14, 330 : 15, 330 : 16 y 330 : 17. Al dividir se busca el número que se pueda multiplicar por 15 y te dé 330. Te tiene que dar resto 0*".

La pregunta "¿Hay una sola posibilidad?", apunta a instalar la preocupación por determinar si el problema admite una, varias o infinitas respuestas. En este caso, la respuesta es única. Se propone someter a discusión este tipo de respuesta de los niños: "*Encontré esta respuesta, pero no sé si puede haber otras*", y arribar a expresiones como: "*Sé que sólo tiene esta respuesta*" avanzando en su fundamentación. Preguntar por la cantidad de soluciones puede presentar dificultades a los alumnos ya que no es frecuente que se los enfrente a reflexionar sobre este aspecto. Los problemas que habitualmente se les proponen en la escuela tienen una sola respuesta. La interacción con este tipo de problemas conduce a considerarlo como única posibilidad. Los problemas que se trabajarán en las siguientes etapas retoman este tipo de preguntas presentando una, varias o infinitas respuestas posibles.

Entre los errores relevados aparecieron los siguientes. Algunos alumnos consideraron erróneamente que el piso del aula tenía forma de cuadrado. Esto los llevó incluso a calcular el perímetro en vez del área dividiendo por cuatro el número de cerámicos. Otros calcularon el área del cuadrado multiplicando por sí mismos los números que utilizaron.

Un error que cometieron algunos niños fue considerar al "12" y al "18" como posibles cantidades de cerámicos por fila. Estos dos números no cumplen con la condición de "estar entre" y aunque 330 no es múltiplo de ninguno de ellos, considerarlos en la búsqueda de la solución constituye un error de interpretación. Esta situación fue sometida a discusión en el momento de trabajo colectivo ya que, a primera vista el alumno podría considerar que el hecho no reviste importancia por no afectar el resultado final de las acciones.

Entre las intervenciones sugeridas a los docentes, en el momento de trabajo colectivo, enfatizamos que se registraran las conclusiones por escrito, tanto en carteles o en el pizarrón, como de manera individual. La intención es que todos los alumnos puedan considerar los avances producidos de manera grupal y que dicho registro sea una fuente de consulta en los siguientes problemas. Algunas de las ideas que han sido mencionadas, fueron registradas:

- este problema se puede resolver contando uno por uno los cerámicos pero es muy largo;
- este problema se puede resolver restando 15 a 330 hasta que se acaben los cerámicos, después contás cuántas veces le restaste 15 y sabés cuántas son las filas;
- este problema se puede resolver sumando 15 veces 22 ó 22 veces 15 o multiplicando para no tener que sumar todas las cantidades que se repiten haciendo 15 x 22 ó 22 x 15;
- este problema se puede resolver dividiendo 330 : 13, 330 : 14, 330 : 15, 330 : 16 y 330 : 17. Al dividir se busca el número que se pueda multiplicar por 15 y te dé 330. Te tiene que dar resto 0;
- este problema se puede resolver multiplicando o dividiendo porque son operaciones inversas;
- este problema tiene una sola solución.

En este momento de cierre de la clase, el docente podrá intervenir ayudando a reformular las ideas de algún alumno de modo que sean entendidas por todos, a recapitular lo discutido estableciendo vínculos con debates anteriores con el fin de favorecer que todos los alumnos se apropien del conocimiento que ha circulado en la clase.

Más problemas para reinvertir lo trabajado[11]

Se presenta a continuación una serie de problemas que permite reinvertir los conocimientos abordados en el Problema 1. Se tiende con ellos a promover un trabajo más autónomo por parte de los alumnos. Su resolución permitirá al docente identificar a aquellos niños que requieren mayor tiempo de estudio y volver a enfrentar estos problemas prolongando el espacio de interacción con el docente y con sus pares.

El docente podrá iniciar las clases en torno a estos problemas evocando lo trabajado en la clase anterior de tal manera de explicitar su reutilización.

Problema 2
Una escuela rural recibió una donación de 176 plantas. Van a colocarlas en un sector rectangular. En cada fila pueden ubicar 11 plantas. ¿Cuántas filas pueden completar?

Para algunos alumnos será ocasión de poner en juego lo que han aprendido, para otros será una nueva oportunidad para pensar lo trabajado a propósito del problema anterior. En caso de que los niños identifiquen que la cuenta 176 : 11 es un recurso para resolver el problema, el docente podrá preguntar, ¿cómo podés estar seguro que son 16 filas? Los alumnos podrán recurrir a distintos procedimientos para demostrar que llegaron al resultado correcto.

- Si 176 : 11 = 16, puedo hacer al revés: 16 x 11 = 176.
- Si 176 : 11 = 16, puedo hacer 176 : 16 y me va a dar 11.

[11] Los problemas que se incluyen en este apartado no fueron implementados en el Desafío Matemático 2006.

• Si con una fila tengo 11 plantas, con dos filas tengo 22... (podrán listar las 16 filas sumando de 11 en 11 y comprobar que llegan a 176. Para este tipo de procedimientos, el número 11 facilita el control de lo realizado ya que los resultados de estas sumas no presentan dificultad y están en condiciones de resolverlos mentalmente).

El docente podrá alentar el análisis de las relaciones entre la multiplicación y la división en torno a este problema a partir de plantear diferentes incógnitas con los mismos datos.

Problema 3
Un tablero de ajedrez está formado por 64 cuadraditos blancos y negros dispuestos en filas iguales. Cada fila está formada por 8 cuadraditos. ¿Cuántas filas tiene el tablero? Escribí el cálculo que realizaste para resolver este problema.

En este problema los números en juego facilitan el cálculo mental. Solicitar que escriban el cálculo apunta a que expliciten las operaciones a las que recurrieron para resolver este tipo de problemas.

Problema 4
Se quieren dibujar en hoja cuadriculada distintos rectángulos formados por 18 cuadraditos. ¿Cuántas posibilidades hay? ¿Cómo hiciste para averiguarlo?

Este problema apunta a enfrentarse a problemas que admiten distintas soluciones, aspecto que será retomado a lo largo de la secuencia. Para resolverlo podrán recurrir a dibujar distintos rectángulos que cumplan con las condiciones solicitadas. Algunos podrán prescindir de los gráficos y recurrir a multiplicaciones que dan 18 como resultado. Otros alumnos podrán recurrir a la idea de buscar “pares de divisores” de 18 (2 y 9; 3 y 6, etc.).

Problema 5
Se quieren dibujar en hoja cuadriculada distintos rectángulos formados por 36 cuadraditos. ¿Cuántas posibilidades hay? ¿Cómo hiciste para averiguarlo?

Este problema apunta a reinvertir los conocimientos que han circulado en el problema 4. En este caso, al aumentar el tamaño del número, se dificulta encontrar todas las soluciones a través de dibujos. Podrán dibujar varias pero no podrán estar seguros de que ese procedimiento garantice la exhaustividad de la respuesta. El problema fuerza la búsqueda de la respuesta a través de recursos de cálculo. Nuevamente puede estar implícita o explícita la idea de múltiplos y divisores.

Segunda etapa: cómo averiguar el dividendo y el divisor a partir del cociente y el resto

Se proponen una o más clases en la que se presenta un conjunto de problemas que ponen en juego las relaciones entre los números de una división. Desde el primer problema será necesario escribir en un cartel o en el pizarrón cuál es el dividendo, el divisor, el cociente y el resto y dejar disponible la información.

Dividendo <u>/divisor</u>
Resto cociente

Las relaciones entre estos elementos “dividendo = divisor x cociente + resto” y “resto menor que divisor” serán exploradas y sistematizadas a lo largo de las clases. Por ello no se espera que sean comunicadas de antemano. Si los alumnos las conocieran como “prueba de la división” aprenderán en estas etapas a usar las relaciones para resolver problemas.

Problema 1

a. Escribí una cuenta de dividir entre números naturales que tenga cociente 25 y resto 12.

b. ¿Se pueden escribir otras cuentas con estas condiciones? ¿Cuáles?

c. ¿Cuántas cuentas se pueden escribir? ¿Por qué?

La parte **1.a** propone escribir una cuenta de dividir donde se informa el cociente y el resto y hay que averiguar el dividendo y el divisor. Posiblemente los alumnos han resuelto gran cantidad de cuentas de dividir a lo largo de su escolaridad teniendo como dato el dividendo y el divisor. En este problema, parten del cociente y el resto y deben averiguar el dividendo y el divisor.

Los alumnos apelan a sus conocimientos sobre la división y la multiplicación al emprender la resolución del problema. Podrán tener en cuenta que el resto tiene que ser menor que el divisor o poner en juego su conocimiento sobre la "prueba de la cuenta de dividir". Considerar que la multiplicación y la división son operaciones inversas puede parecer contradictorio si no consideran que esta relación solo se cumple cuando el resto es 0. En este caso, el resto es distinto de cero, aspecto que se irá poniendo en evidencia a medida que avanza la resolución del problema y se profundizan las discusiones grupales.

La parte **1.b** invita a explorar si hay otras cuentas posibles. Para muchos alumnos no será habitual enfrentarse a este tipo de cuestión, ya que suelen resolver problemas que tienen una única solución. Este tipo de preguntas favorece un aspecto del trabajo matemático que se pretende instalar en la clase, preguntarse si el procedimiento que se utilizó para escribir una cuenta, sirve para encontrar otras. Se trata de identificar el procedimiento utilizado y ponerlo a prueba.

La parte **1.c** pregunta por la cantidad de soluciones posibles. En este caso, el problema admite infinitas soluciones. Será interesante detenerse en este aspecto. Si bien las cuentas posibles son infinitas, no puede escribirse cualquier número: el resto debe ser menor que el divisor. Este aspecto confunde a los niños quienes tienden a pensar que "*si hay números con los que no se puede, entonces no son infinitas*".

Este problema permite cargar de sentido una de las condiciones que debe cumplir el resto en la división entre números naturales. Tal vez los alumnos ya sabían que el resto tiene que ser menor que el divisor, pero inicialmente no lo tienen en cuenta al proponer las cuentas. Posiblemente se trate de un conocimiento que "sabían" pero no habían usado para resolver problemas.

Se propone inicialmente un espacio para la resolución individual del problema de modo de favorecer la producción personal de procedimientos y el trabajo exploratorio. Luego, reunidos en pequeños grupos, se propicia un espacio de intercambio de los procedimientos desplegados individualmente. Luego, lo producido en los pequeños grupos se comunica al resto de la clase en un momento de trabajo colectivo coordinado por el maestro. Se analizan algunos procedimientos, se comparan los que presentan diferencias y se instalan debates y preguntas. Luego de este momento de discusión y análisis se arriba a algunas conclusiones que serán retomadas y profundizadas en las etapas siguientes. Es conveniente registrar por escrito, en carteles y en las carpetas, las conclusiones que elaboraron de modo de tenerlas disponibles para resolver nuevos problemas.

El Problema 1 en las aulas

A continuación se registran algunos procedimientos, acertados o erróneos, que fueron producidos por los alumnos al enfrentarse a la resolución de este problema en el marco del trabajo grupal o colectivo.

En muchos casos los niños confundían el significado de los términos (por ejemplo, cociente), aunque sabían la función que cumplía cada uno. Por lo que fue necesario que los docentes hicieran la aclaración sobre el significado de estas palabras escribiendo en un cartel:

Dividendo <u>/ divisor</u>
resto cociente

En general los niños inician la resolución de la parte **1a.** probando con divisores menores que el resto. Gran parte de los alumnos logran realizar ajustes y comienzan a probar con otros divisores, algunos en forma azarosa y otros demostrando darse cuenta de que tienen que ser números mayores que 12. Veamos cómo lo resuelve un niño:

Inicia probando con 2 como divisor. Calcula 2 x 25 + 12 = 62. Anota:

62 <u>| 2__</u>
25

Luego toma a 3 como divisor. Calcula 3 x 25 + 12 =87 y anota:

87 <u>| 3__</u>
25

Al detenerse en las cuentas que escribió, se da cuenta que en ambas divisiones podría seguir dividiendo porque el resto es mayor que el divisor. Retoma su resolución con divisores mayores que 12 al advertir o “recordar” esta condición que en un comienzo no tuvo en cuenta.

Resulta interesante comentar lo siguiente: muchos de los alumnos, en el momento de la resolución individual, comenzaron a vincular lo que estaban realizando con “la prueba de la división” y con un conocimiento del que ellos disponían pero que no habían puesto en juego desde el inicio, “el resto debe ser menor que el divisor”.

A partir de esto es conveniente reflexionar sobre el modo en que se ha abordado tradicionalmente la enseñanza de estos conceptos. Habitualmente son comunicados por el docente y se propone una serie de ejercicios de aplicación a los alumnos. Los conceptos en cuestión no surgen como herramientas para resolver problemas. Brindar la ocasión de resolver problemas que implican la puesta en juego de ese conocimiento, colabora con la construcción de sentido de esos conceptos. Para los alumnos “la prueba de la división” sólo es “aplicable” luego de hacer la cuenta usando el algoritmo para determinar si fue obtenido el resultado correcto. Tener oportunidad de hacer jugar esas relaciones en nuevos contextos, amplía su sentido y lo deja disponible para resolver nuevos problemas.

Al realizar la puesta en común, los alumnos expresan ideas como las siguientes respecto de este problema:

> *“Para encontrar una cuenta, se puede multiplicar el cociente por cualquier número mayor que 12 y sumarle 12, es la ‘prueba de la división’”*
> *“El menor de los números para el dividendo es 337 (25 x 13 + 12), esa es la primera cuenta de todas, la más chica”.*

Mientras avanzan en la resolución de las partes **1.b**. y **1.c**. del problema, algunos alumnos se van aproximando a una generalización. Veamos algunos ejemplos.

A partir de la primera cuenta correcta que logran escribir en el marco de las condiciones que plantea el problema (por ejemplo divisor 13), van escribiendo nuevas cuentas buscando dobles sucesivos (13, 26, 52...) o múltiplos del divisor planteado (13, 26, 39, 52...). Al respecto un alumno, al relatar lo sucedido en el pequeño grupo, dice: “*Sabíamos que el divisor tenía que ser mayor que*

12 porque nos dijo León que se había dado cuenta cuando lo hizo solo. Manolete dijo que había infinitas y que se podían obtener haciendo el doble del dividendo y del divisor muchas veces. Cuando hicimos el doble de la primera (señala la tercera) nos dio resto 24, así que le sacamos 12. Lo mismo nos sucedió cuando hicimos el doble de la segunda (y señala la tercera) tuvimos que sacarle 12 porque nos daba resto 24. Al hacer el doble de esta (la cuarta) antes de hacer la división le restamos 12 y nos dio bien".

En otro grupo se produjo el siguiente intercambio: Una alumna, comenzó buscando divisiones por 25 con resto cero, luego le sumaba 12 y obtenía el dividendo. El primer intento lo hizo con 300 : 25 (apoyándose en el repertorio disponible de cálculo mental: "*si con cuatro de 25 formo 100, puedo formar 300 con doce de 25 y tengo resto 0*)". A partir de ese dato, fue sumando 25 al dividendo y luego sumando 12. "*Hay muchas*" dijo.
"*–Sí, porque vas aumentando el dividendo en 25 y el divisor en 1 siempre y cuando el divisor sea mayor que 12*".

```
337 |13
 12  25
 13
```

"*–Si se hace eso (*refiriéndose a la afirmación anterior*), hay infinitas formas porque vas sumando infinitamente 25 y 1 porque los números son infinitos*".

Algunos alumnos elaboraron hipótesis erróneas que se ponen a prueba en el momento del trabajo colectivo: "*Se pueden inventar muchísimas, mientras que el divisor sea impar, se puede*". Otros elaboran ideas que podrán ser sometidas a prueba por el resto de los alumnos. Por ejemplo: "*Si el divisor es par, el dividendo termina en 2 y si es impar termina en 7*".

La pregunta acerca de si se pueden escribir otras cuentas que solucionen el problema, brinda interesantes comentarios que dan cuenta de las ideas de los alumnos. Para algunos se trata de ir probando, con lo cual no pueden determinar la cantidad de cuentas que se pueden escribir: "*Sí, se puede inventar otras porque si vas probando te va a dar*". Otros piensan que son infinitas: "*Se puede inventar cualquier cuenta, pero el divisor debe ser mayor que 12*". Se retoma este aspecto vinculado a la cantidad de soluciones que fue abordado en la etapa anterior. En este caso, a diferencia de la primera etapa, el problema admite infinitas soluciones. En las siguientes etapas se vuelven a proponer preguntas que invitan a pensar en este aspecto. Los niños mostraron avances en este sentido. En la primera etapa, no estaban atentos sobre la posibilidad de que el problema admita más de una solución. Al avanzar la interacción con este tipo de problemas, se mostraron más preocupados por determinar la cantidad de soluciones a la vez que evidenciaron estar en mejores condiciones para argumentar sus ideas.

En el espacio colectivo, el docente retoma los conocimientos que circularon durante los trabajos grupales y la puesta en común e identifica el contenido de la clase. El rol del docente en este momento es de gran importancia, colabora en la toma de conciencia por parte de los alumnos sobre qué han aprendido lo que favorece su reinversión en nuevos problemas, se comparan las estrategias empleadas –pudiendo el docente proponer otras estrategias que no fueron utilizadas de modo de enriquecer la discusión–, se analizan los procedimientos correctos e incorrectos, los más costosos y más económicos, los que permiten garantizar la exhaustividad de la respuesta y los que no.

En diferentes grupos se han registrado en carteles y en la carpeta las ideas a las que se arriban.
La intención de este registro es la sistematización para el posterior estudio y la reutilización en los problemas siguientes. Entre las diferentes conclusiones que anotaron, encontramos:

• las soluciones son infinitas, siempre que el divisor sea mayor que 12
• son infinitas porque los números son naturales, y siempre puedo sumar uno más;

• el menor de los números para el dividendo es 337 (25 x 13 + 12), esa es “la primera cuenta de todas” o “la más chica”;
• el dividendo aumenta cada 25;
• si el divisor es par, el dividendo termina en 2 y si es impar termina en 7;
• para encontrar una cuenta, se puede multiplicar el cociente por cualquier número mayor que 12 y sumarle 12, es la “prueba de la división”.

Más problemas para reinvertir lo trabajado[12]

Del mismo modo que en la etapa anterior, se presenta una serie de problemas que permite reinvertir los conocimientos que circularon, apunta a promover un trabajo más autónomo por parte de los alumnos y a extender el tiempo de estudio para quienes más lo precisan.

Problema 2
a. Escribí una cuenta de dividir entre números naturales que tenga cociente 12 y resto 7.
b. ¿Se pueden escribir otras cuentas con estas condiciones? ¿Cuáles?
c. ¿Cuántas cuentas se pueden escribir? ¿Por qué?

Problema 3
Al dividir un número por 32, se obtuvo 16 y un resto de 4. ¿Qué número se dividió?

Este problema requiere poner en juego la relación D = d x c + r para averiguar el valor del dividendo. Se puede proponer que inventen problemas parecidos, intercambien con sus compañeros y los resuelvan.

Problema 4
Completá el dividendo y el divisor de esta cuenta. ¿Hay una única posibilidad?

/_____
4 6

Problema 5
Completá la tabla:

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto	Cantidad de soluciones
	12	13	8	
202	22		4	

Podrán proponerse nuevas tablas variando los datos que se ofrecen. Es interesante que los niños intenten completar la tabla sin hacer la cuenta de dividir basándose en las relaciones sobre las que se ha trabajado. Luego, pueden realizar la cuenta de dividir para comprobar si la completaron correctamente.

Tercera etapa: cómo varían el resto o el dividendo cuando se modifican los otros números

Se proponen una o más clases en la que se presenta un conjunto de problemas que continúan poniendo en juego las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto abordadas en la segunda etapa. Se retoman las conclusiones a las que se arribó en la etapa anterior, se someten a revisión y se profundizan los conocimientos que circularon.

[12] Los problemas que se incluyen en este apartado no fueron implementados en el Desafío Matemático 2006.

A medida que se resuelvan los problemas de esta etapa, los mismos alumnos lograrán establecer vínculos entre los problemas propuestos y lo realizado en la etapa anterior. En el caso en que no hubieran establecido estas relaciones (o no las hubieran hecho explícitas), el docente podrá avanzar en ese sentido. Establecer vínculos entre lo que se realizó y lo que se está trabajando es fundamental ya que favorece la toma de conciencia de lo que se va aprendiendo, la sistematización de los conocimientos que circulan en las clases y la continuidad del proyecto personal de aprendizaje de los alumnos.

Se analiza cómo varía el resto en función de la modificación del dividendo (Problema 1). Se solicita que se busque una manera de encontrar los restos de cada una de las divisiones propuestas sin hacer la cuenta, esto obliga a centrarse en las relaciones entre los números que intervienen en la división. Este problema y la pregunta por la cantidad de soluciones, intenta a su vez avanzar hacia una generalización.

Problema 1

Lisandro hizo la cuenta 103 : 12, obteniendo de cociente 8 y resto 7.
Ahora tiene que hacer estas otras cuentas de dividir:

104 : 12 105 : 12 106 : 12 107 : 12

a. ¿Puede Lisandro determinar el resto de esas cuentas sin hacerlas? Si es posible, explica cómo puede hacerlo. Si no, explica por qué no.
b. ¿En cuánto tiene que modificar Lisandro el dividendo de la cuenta que hizo para obtener de cociente 9 y resto 0 manteniendo el mismo divisor?
c. ¿Cuántas cuentas puede escribir Lisandro que tengan como divisor 12, como cociente 9 y como resto no necesariamente 0?

Al resolver la parte **1.b**, los alumnos podrán reutilizar lo realizado en la parte 1.a. Del mismo modo, se espera que al resolver la parte **1.c** reinviertan lo realizando en los problemas anteriores.

El Problema 1 en las aulas

En esta etapa los alumnos están en mejores condiciones para considerar desde un inicio que el resto debe ser menor que el divisor, aspecto que en la etapa anterior para muchos niños no había sido tenida en cuenta al emprender la resolución del problema. Al resolver el problema **1.a** un alumno explica: "*Las otras cuentas tendrán: resto 8, resto 9, resto 10 y resto 11, porque el dividendo aumenta 1 entonces el resto también mientras sea menor que el divisor*".

Se han enfrentado en la segunda etapa a la pregunta por la cantidad de soluciones posibles. Los alumnos incorporan progresivamente esta pregunta al quehacer matemático de la clase. Es de algún modo para muchos de ellos una nueva norma matemática. En este caso las soluciones no son infinitas. En un comienzo, al vincular este problema con el de la etapa anterior, algunos arriesgan rápidamente una respuesta: "*son infinitas*". Poner en discusión esta respuesta permite un avance en sus conocimientos pudiendo concluir, como ya se dijo anteriormente, hay problemas que tienen una solución, otros que tienen varias, otros que tienen infinitas, otros que no tienen solución.

En **1.a** se propone analizar las variaciones del resto a medida que varía el dividendo y se mantiene constante el divisor: cuando el dividendo aumenta una unidad el resto también. Este problema plantea una restricción interesante: se solicita la búsqueda de la respuesta *sin hacer las cuentas*. Esta condición apunta a que los alumnos se centren en las relaciones entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto a partir de las cuales, se espera que anticipen la respuesta.

Si bien se apunta a que los niños no requieran de la cuenta para resolver el problema, se admite su uso para controlar lo realizado. Algunos niños pueden preguntar: "*¿puedo hacer la cuenta para ver si está bien?*". Puede suceder que no "confíen" en sus procedimientos y necesiten verificar lo realizado a través de la cuenta en la que sí confían.

Muchos alumnos requerirán iniciar la resolución apoyados en la cuenta. Si bien se admitirá en un comienzo este tipo de procedimientos, se presentarán nuevos problemas para que todos los niños puedan centrarse en las relaciones entre el dividendo, divisor, cociente y resto.

Resulta oportuno realizar un comentario al respecto. Al formular o seleccionar un problema, se toman ciertas decisiones respecto de las condiciones de resolución. Estas variaciones modifican los procedimientos que producen los niños y los conocimientos que ponen en juego. En la parte 1.a se bloquea un procedimiento: "sin hacer las cuentas". En otros casos se toman decisiones respecto del tipo y tamaño de los números que se ponen en juego en el problema. Estas modificaciones no son ingenuas ya que habilitan o inhiben el uso de ciertos procedimientos, fuerzan el avance de los conocimientos de los que dispone el alumno o presenta una situación que, si bien no es más compleja que otra, presenta un cambio que permite reinvertir lo aprendido.

En relación con lo mencionado, al seleccionar los números que se presentarían en el problema de esta etapa, se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

- que los números no sean muy grandes para permitir el control sobre lo realizado;
- que no permitan apoyarse fuertemente en el cálculo mental para provocar que los alumnos focalicen en las relaciones entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto.

En caso de presentarse el mismo problema con otros números que facilitaran el cálculo mental, los alumnos desplegarían procedimientos que se apoyan en los resultados de las multiplicaciones que tienen disponibles en la memoria y no necesitarían centrarse en las relaciones mencionadas para resolverlo.

Los números que se seleccionaron aumentan de 1 en 1 lo que se hace rápidamente identificable por parte de los niños. Al iniciar la resolución, un procedimiento muy utilizado es aumentar el resto de 1 en 1. Los alumnos expresan así sus respuestas: "*Me parece así porque los dividendos son diferentes por un solo punto, si el resto de la primera cuenta es nueve, a la que sigue vas a tener que agregarle 1 y te va a dar 10". "Porque si es el mismo cociente y al dividendo se le va sumando uno, en el resto me van a dar números consecutivos*".

En el trabajo en pequeños grupos y en el momento colectivo, será oportuno buscar las razones por las cuales este procedimiento funciona a la vez que será interesante preguntar si es posible utilizar indefinidamente esta "regla". Algunos niños dicen: "*No, hasta que el resto sea igual al divisor, entonces ya aumenta uno más el divisor y el resto vuelve a 0*". En clases siguientes se puede proponer nuevos problemas donde los dividendos no aumenten de 1 en 1, que obliguen a modificar el divisor y el cociente.

Resulta interesante realizar un comentario sobre esta solicitud del problema: "*Si es posible, explicá cómo puede hacerlo. Si no, explicá por qué no*". Solicitar a los alumnos que expliquen "*cómo puede resolverse el problema*", "*cómo lo hizo Lisandro*", "*por qué no se puede*", colabora con la explicitación de los conocimientos que muchas veces los niños ponen en juego implícitamente y que podrían permanecer en ese nivel de no mediar un trabajo del docente que tenga el propósito de explicitarlos.

Avanzar en este trabajo favorece la toma de conciencia por parte de los niños de lo que están aprendiendo y la identificación de las herramientas de las que disponen para resolver nuevos problemas.

La explicitación de conocimientos puede propiciarse en el momento individual, grupal o colectivo. Durante el trabajo individual a través de preguntas que, entre otras posibles, soliciten una explicación, una fundamentación o el establecimiento de vínculos con otros problemas. El trabajo grupal y colectivo se constituye también en un buen marco para la tarea. El intercambio con otros –ya sea en un pequeño grupo o en el grupo total con el docente– obliga a formular ideas, ajustar argumentos, dar razones sobre lo realizado, interpretar lo hecho por otros y realizar nuevas preguntas.

El docente puede intervenir apuntando a favorecer estos intercambios, solicitando explicaciones, reformulando lo dicho por algún alumno de modo que todos lo comprendan, contraargumentando para provocar ajustes a lo expresado por un alumno, sin validar o invalidar las respuestas desde un inicio para que esta clase de actividad se sostenga por más tiempo.

A continuación registramos procedimientos puestos en juego por alumnos que utilizaron otros caminos para llegar a la respuesta. Es interesante relevar los diversos procedimientos que los niños producen y someterlos a discusión en el momento de la puesta en común, buscando semejanzas y diferencias. Por ejemplo: "*Puedo determinarlo haciendo 12 x 8 y luego restándolo por el dividendo. Lo mismo con la siguiente*". En este caso el niño no aumenta el resto en 1 como sucede con el dividendo, sino que se basa en un conocimiento que ha circulado en la etapa anterior: "*Si multiplico el cociente por el divisor y le sumo el resto, entonces obtengo el dividendo. Entonces, si quiero obtener el resto, multiplico el cociente por el divisor y se lo resto al dividendo*".

Transcribimos a continuación la explicación de otro alumno: "Porque si con dividendo 103 me da resto 7, con 104 *me va a dar* 8, con 105 *me va a dar* 9, con 106 *me va a dar* resto 10 y con 107 *me va a dar* resto 11". Destacamos *"me va a dar"* ya que lleva implícito un aspecto muy importante de la actividad matemática. Este alumno *no necesita* realizar efectivamente las cuentas para estar seguro del resultado *que le va a dar.* El trabajo matemático permite anticipar resultados basándonos en argumentos que encuentran fundamento en propiedades de los números y de las operaciones matemáticas.

En caso de que ningún alumno en la clase exprese su explicación de esta manera, será interesante que el docente pregunte o presente problemas de este tipo: Ejemplo (Para el cálculo 103 : 12 = 8 y resto 7) *María dice que está segura sin hacer las cuentas que con dividendo 103 da resto 7, con 104 dar resto 8, con 105 da resto 9, con 106 da resto 10 y con 107 da resto 11. ¿Se puede estar seguro sin hacer las cuentas? ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?*

En el momento colectivo, los niños elaborarán respuestas y reflexiones, ideas que podrán ser reorganizadas, con la intervención del docente, para registrar conclusiones en relación con este problema. Por ejemplo, en algunos grupos llegaron a elaborar las siguientes ideas:
–"*Si el resto es igual al divisor, entonces ya aumenta uno más el divisor y el resto vuelve a 0*".
–"*Si el dividendo aumenta 1, el resto aumenta 1*".

En la parte **1.b**. se propone analizar cómo se modifica el dividendo al variar el cociente y el resto y mantener constante el divisor. Al enfrentarse a la resolución de este problema, los alumnos hacen jugar las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto analizando cómo se modifican unos respecto de los otros. Algunos niños al resolver este problema, pueden realizar el cálculo **9 x 12** para averiguar el dividendo. "Porque tenía que dar como cociente 9, entonces hice 12 x 9 y me dio 108 y el dividendo se podía cambiar y le puse 108 y me dio resto 0".

Otros niños podrán sumar 5 al dividendo considerando el dato del resto: "*a 7 le faltan 5 para llegar a 12*". Otros expresan: "*Al dividendo le sumé el resto para que me dé 9 como cociente y 0 como resto*". "*En el resto no puede ser doce porque se le agrega uno más al cociente, entonces si le agregas 5 al dividendo el 12 del resto se hace 9 en el cociente*".

En el siguiente ejemplo es interesante observar que el alumno necesitó realizar la cuenta para asegurarse que el procedimiento que utilizó era válido: “*Hice 12 x 9 que son el divisor y el cociente que me dio 108 y después me fijé y hice 108 : 12 y me dio cociente 9 y resto 0*”.

Un procedimiento poco frecuente basado en el cálculo mental es el siguiente: “*La división de 120 por 12 da 10, entonces tengo que sacarle 12 para que me dé*”. (120 – 12 = 108). En caso de no haber surgido en la clase este procedimiento, puede ser interesante presentarlo como un problema o en el momento de trabajo colectivo, por ejemplo: **Eduardo resolvió el problema de la siguiente manera**: “**La división de 120 por 12 da 10, entonces tengo que sacarle 12 para que me dé”. Explicá lo que hizo Eduardo.** Los alumnos podrán arribar a explicaciones como las siguientes: “**Si 12 x 10 = 120 (doce veces 10), entonces 12 x 9 es = 108 (un doce menos), por eso se lo restó**”.

Una respuesta semejante que se basa en lo realizado en el Problema **1. a** (en el que se aumentaba 1, en este caso se hace uno menos), no resulta evidente el apoyo en el resultado del cálculo 12 x 10 = 120. “*Puedo encontrarlo haciendo uno menos*”. En la puesta en común será interesante establecer vínculos entre lo realizado en **1. a** y en **1. b.** En la fase colectiva podrán arribar a conclusiones como la siguiente: “*Para encontrar una cuenta, se puede multiplicar el cociente por el divisor*”.

En **1. c** se reitera la pregunta por la cantidad de soluciones, aspecto trabajado en la segunda etapa. En este caso las soluciones no son infinitas, pero muchos alumnos, al iniciar la resolución del problema pueden considerar erróneamente que son infinitas.

Algunos niños podrán no tener en cuenta que el resto debe ser menor que el divisor. Al avanzar en la resolución del problema podrán lograr ajustar sus producciones. Este problema presenta una nueva oportunidad para poner en juego esta condición que debe cumplir el resto.

Un error frecuente se presenta cuando los niños determinan que la cantidad de cuentas posibles son 11 ya que no consideran el resto 0 como una de las posibilidades. Por ejemplo: “*Podríamos hacer 11 cuentas, porque si hago 12 o más cuentas el divisor ya pasaría a ser 12*”.

En la puesta en común el docente podrá preguntar de un modo más general: *¿Cuántas cuentas se pueden escribir si no varía el divisor?* Esta pregunta apunta a explicitar la condición que cumple el resto pudiendo vincularlo con lo ya trabajado en la primera etapa.
Transcribimos algunas de las respuestas más frecuentes:
– “*Se pueden hacer 12 cuentas: y así hasta que el resto dé 11*”.
–”*Las cuentas que podés escribir son 12. Porque si te pasas de 12, podés seguir dividiendo y el cociente sería 10*”.

Será interesante preguntar cómo anticipar la cantidad de cuentas que es posible escribir con otros valores en el divisor o del cociente. Se apunta a ir instalando preguntas propias del trabajo matemático: *¿pasará siempre?, ¿qué pasa si cambio el divisor?*

Un niño expresa la siguiente idea en la puesta en común: “*Se pueden hacer 12 cuentas de dividir.Si se pudiera cambiar el cociente se podrían hacer más*”. Durante la puesta en común de una de las escuelas una alumna –luego de explicar el trabajo de su grupo– comenzó a formular preguntas como la siguiente: “*¿Si dejamos fijo el dividendo y cambiamos el valor del divisor, ¿qué pasa?*”. Vemos aquí que esta niña –como muchos otros– se hace nuevas preguntas a partir del problema con el que se enfrentó. Es importante destacar que no se trata sólo de resolver problemas sino de que el docente propicie, además, espacios de reflexión sobre los mismos con la posibilidad de generar nuevas preguntas y nuevos problemas. Se propone pues, invitar a los niños a generar y producir nuevo conocimiento, esto es posible si se dan ciertas condiciones en las clases de matemática.

Algunas ideas posibles de ser registradas

Se espera que los niños puedan arribar a conclusiones como las siguientes, que el docente podrá registrar:

- si el dividendo aumenta 1, el resto aumenta 1;
- en este problema las soluciones no son infinitas, el resto no puede ser mayor que el divisor. Si el divisor es 12, las soluciones son 12: resto 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11;
- para encontrar una cuenta, se puede multiplicar el cociente por el divisor;
- si el resto es igual al divisor, entonces ya aumenta uno más el divisor y el resto vuelve a 0;
- se pueden hacer 12 cuentas de dividir. Si se pudiera cambiar el cociente se podrían hacer más.

Más problemas para reinvertir lo trabajado[13]

Como se mencionó anteriormente, los problemas que se presentan a continuación apuntan a reinvertir los conocimientos abordados. Se intenta propiciar un espacio de trabajo más autónomo por parte de los alumnos que han logrado producir avances en sus conocimientos, y a la vez ofrecer más tiempo de enseñanza y estudio sobre una misma cuestión, a quienes más lo precisan.

Problema 2
Agustina hizo la cuenta 1029 : 12, obteniendo de cociente 85 y resto 9.
Ahora tiene que hacer estas otras cuentas de dividir:
1030 : 12 1032 : 12 1035 : 12
a) ¿Puede Agustina determinar el resto de esas cuentas sin hacerlas? Si es posible, explica cómo puede hacerlo. Si no, explica por qué no.
b) ¿En cuánto tiene que modificar Agustina el dividendo de la cuenta que hizo para obtener de cociente 87 y resto 0 manteniendo el mismo divisor?
c) ¿Cuántas cuentas puede escribir Agustina que tengan como divisor 12, como cociente 86 y como resto no necesariamente 0?

Este problema presenta una oportunidad para reinvertir lo trabajado en el Problema 1, con la única variación en el tamaño de los números.

Problema 3
Fernando hizo la cuenta 153 : 8, obteniendo de cociente 19 y resto 1.
Ahora tiene que hacer estas otras cuentas de dividir:
155 : 8 158 : 8 160 : 8 162 : 8
¿Puede Fernando determinar el resto de esas cuentas sin hacerlas? Si es posible, explica cómo puede hacerlo. Si no, explica por qué no.

Este problema, si bien retoma el Problema 1, presenta un nuevo desafío: los dividendos no aumentan en 1 sino que se amplía el intervalo. Esto lleva a repensar cómo se modifica el resto en relación a ese aumento. En las dos últimas cuentas si aumentan el resto en función del aumento del dividendo sin considerar el tamaño del divisor cometerán un error, ya que deben respetar la condición de que el resto debe ser menor que el divisor. Deberán realizar un ajuste que los llevará a modificar el cociente.

Problema 4
Completá las siguientes cuentas colocando dividendo y resto.

13 Los problemas que se incluyen en este apartado no fueron implementados en el Desafío Matemático 2006.

/ 6
 7

/ 7 .
 6

Se espera que reinviertan lo trabajado en el Problema 1 en cuanto a que el divisor condiciona la cantidad de cuentas ya que no admite restos que sean mayores que él. En el caso de la primera cuenta puedo obtener 6 soluciones, las que tienen restos 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

Problema 5

a. Completá los números que faltan en las cuentas.

b. ¿Cuántas soluciones puede tener cada una?

/15
6 3

/ 8
5

22 /
4 3

Cuarta etapa: cómo determinar divisor y resto o dividendo y cociente. Cómo averiguar el resto usando la calculadora

Se proponen una o más clases en la que se presenta un conjunto de problemas que continúan poniendo en juego las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto abordadas en la segunda y tercera etapas. Se avanza en un trabajo de tipo anticipatorio que había sido iniciado en las partes **1.b** y **1.c** de la segunda etapa con las preguntas: "*¿Se pueden escribir otras cuentas con estas condiciones? ¿Cuáles?" "¿Cuántas cuentas se pueden escribir? ¿Por qué?*". En la parte **1.a** de dicho problema los alumnos inician la resolución a través de una exploración de cuentas posibles, intentando, ajustando a partir de los resultados que obtienen. Los problemas siguientes invitan a poner a prueba el procedimiento utilizado para resolverlo, y determinar si permite anticipar otras cuentas posibles.

En esta etapa se espera que los alumnos consideren desde un inicio que el resto debe ser menor que el divisor, aspecto sobre el que se ha reflexionado en las etapas anteriores. A su vez, se vuelven a enfrentar a la pregunta por la cantidad de soluciones posibles.

Se presentan nuevos desafíos: determinar si una cuenta es posible "mirando" el resto – Problema 1– ; estar seguro que las cuentas posibles son infinitas –Problema 2– y determinar el resto a partir de una expresión decimal usando la calculadora –Problema 3–.

Problema 1

¿Cuál o cuáles de los siguientes números pueden completar correctamente esta cuenta?

24 /
 3

	Divisor	Resto	SI o NO	¿Por qué?
A	4	12		
B	8	0		
C	7	3		
D	5	9		
E	6	6		

Este problema tiene el propósito de poner nuevamente en circulación los conocimientos que han sido abordados en las etapas anteriores sobre las relaciones entre los números que intervienen en la división. Para muchos, será ocasión de reinvertir esos conocimientos de los cuales han alcanzado mayor dominio. Para otros, será una nueva oportunidad de aproximarse a las relaciones entre el dividendo, divisor, cociente y resto. En relación a lo anteriormente expuesto, puede suceder que algunos niños, si bien pueden llegar a responder correctamente a la pregunta: "*¿puede el resto ser mayor que el divisor?*", no lo tengan en cuenta al momento de resolver el problema. Seguramente, en la instancia grupal, muchos lograrán llegar a la respuesta correcta. Este aspecto podrá ser abordado en la puesta en común donde será interesante discutir sobre los errores iniciales producidos por los alumnos.

Es importante destacar que en este caso se han seleccionado números en los que si el resto es menor que el divisor, es posible realizar la cuenta. Pero podrían incluirse casos, como por ejemplo divisor 6 y resto 4, que el resto es menor e igual no es posible ya que 3 x 6 + 4 no es 24. El docente podrá proponer este caso para analizarlo colectivamente.

Problema 2

a. Escribí una cuenta que tenga divisor 12 y resto 5.

b. ¿Cuántas cuentas se pueden escribir que cumplan con esas condiciones?

En la segunda y tercera etapa se ha propuesto a los alumnos completar cuentas en las que faltaba el divisor, el cociente, el dividendo o el resto. En este caso, se presenta una cuenta incompleta en que se ofrecen como datos el divisor y el resto debiendo averiguar el dividendo y el cociente. Nuevamente se propone analizar la cantidad de soluciones posible.

Problema 3

Lisandro llevó una bolsa con 315 caramelos para compartir con sus compañeros y maestra porque era su cumpleaños. Le dijo a la maestra:-"Estos caramelos son para compartir entre todos mis compañeros y yo, que somos 30. Para cada uno la misma cantidad de caramelos. Los que sobran son para vos seño".
Marcelo, su amigo, para saber cuántos caramelos le tocaba a cada uno, tomó la calculadora
e hizo el cálculo 315 : 30. Al apretar el signo = en el visor de su calculadora apareció el número $\boxed{\mathbf{10.5}}$
Y dijo a su maestra:
"Son 10 caramelos para cada uno de nosotros y 5 para vos".
¿Te parece que la solución que aporta Marcelo a partir del uso de la calculadora es correcta? ¿Por qué?

(Es necesario contar con una calculadora por cada grupo de 3 ó 4 alumnos)

En este problema se propone analizar la respuesta dada por otro niño, en este caso, propuesta dentro del enunciado del problema. Los números fueron seleccionados de modo de favorecer el control, por parte de los alumnos, de sus propias producciones apoyándose en resultados de cálculos conocidos. Este problema ofrece al docente una oportunidad para que puedan reflexionar sobre los límites en el uso de la calculadora como herramienta para resolver problemas: la calculadora "hace bien" las cuentas, pero no "sabe" qué se está repartiendo. La tarea solicitada al alumno le exige aprender a determinar el resto de la división usando la calculadora.

El Problema 1 en las aulas

Se seleccionó el siguiente fragmento para poder detenernos en una cuestión compartida con los docentes y que es motivo de preguntas y dudas en la tarea del aula: ¿En qué medida el docente puede intervenir para aclarar la consigna del problema? ¿Es responsabilidad del alumno interpretarla por sí mismo? ¿Es conveniente realizar una lectura por parte del docente en la que se vayan realizando las aclaraciones necesarias sobre términos desconocidos o aspectos que resulten confusos para los alumnos?

La interpretación de la consigna puede resultar complicada. Ante esta situación se genera una tensión entre dos aspectos. Por un lado, se espera que el alumno comprenda lo que el problema le plantea y, por otro lado, la consigna encierra el asunto que va a abordarse en la clase, lo que puede llevar a que el alumno termine de comprenderla a medida que avanza en la resolución del problema.

El docente puede intervenir para aclarar el significado de los términos que lo requieran, puede brindar la información que los alumnos soliciten en la medida que no ofrezca la solución del problema, también puede realizar una lectura general. Si bien se aspira a que los alumnos puedan leer la consigna o el enunciado de un problema de manera autónoma, si no comprendieran el tipo de tarea que se les solicita, el docente podrá intervenir para abonar a su comprensión.

El siguiente fragmento corresponde a una puesta en común. Los alumnos ya se habían enfrentado individual y grupalmente a la resolución del problema. Aún así, seguían precisando aspectos ligados a la interpretación del enunciado del problema.

> ***Docente****: En realidad la consigna decía que tenía que estar correctamente hecha.*
> ***Alumna 1****: Pero una no puede cambiar los números de las cuentas.*
> ***Alumno 2****: No pusimos lo del resto porque es esencial y se sabe que todos lo van a poner, nosotros pusimos otra cosa. Teniendo en cuenta que 24 es el dividendo y 3 es el cociente, nosotros podríamos haber puesto ahí el 4 y resto 12, pero sabíamos que no porque se podía seguir dividiendo, entonces acá en vez de poner que el resto era mayor que el divisor…*
> ***Docente:*** *Ella lo que quiere aclarar, es que no pusieron acá que el resto es menor que el divisor porque ya se sabe. Entonces se dedicaron a decir que si este es el divisor, ¿cuál es el cociente exacto? ¿Entienden?*
> ***Alumnos****: Si.*
> ***Alumno 1****: Sabe qué pasa, ella está hablando de una "probabilidad"14, cuando yo hago una cuenta, con el problema que usted está explicando, con lo que usted está planteando, está pidiendo un resultado exacto.*
> ***Docente:*** *¿Cuál sería la "probabilidad"?*
> ***Alumno 1****: Porque ella pone, ¿podría ser que el cociente me cambie a 4? Vos lo que tenés que hacer con esto, es hacer una cuenta o llegar a un resultado exacto.*
> ***Docente****: Vos lo que me estás diciendo es que si al 24 lo divido en 4 me va a dar un número, me va a dar 6, no me da 5 ó 4 ó 3.*
> ***Alumno 2****: No me va a cambiar el resultado, podrá haber distintos caminos pero el resultado es el mismo, por lo tanto, "probabilidades" nunca hay, o sea, hay "probabilidades" pero hay un resultado exacto. Lo conveniente es encontrar el resultado exacto.*
> ***Alumno 3:*** *Pero están faltando a la consigna de que el cociente debe ser 3. No podés cambiarlo.*
> ***Docente****: La consigna ¿qué nos pedía?*
> *Alumno 3: ¿Con qué números podíamos completar la cuenta de dividir con cociente 3 y divisor 24?*
> ***Docente****: Entonces tenemos que respetar esas condiciones.*

A propósito de este fragmento es interesante señalar que la maestra interviene reformulando lo que dice una alumna ("*Ella lo que quiere aclarar es...")* de modo de garantizar la comprensión por

[14] Vale aclarar que el alumno en este caso usa el término "probabilidad" como sinónimo de "posibilidad" y no haciendo referencia al significado del concepto en el área de matemática. La docente retoma el término "al modo en que lo usa el alumno".

parte de todos y favorecer el sostenimiento del debate. Si los alumnos pierden el sentido de lo que se está discutiendo, la puesta en común se va cerrando a un intercambio que se restringe a aquellos que siguen participando de la discusión, mientras el resto queda fuera de lo que se está planteando.

En el siguiente caso la docente invita a buscar una explicación más general, intervención que resultó fértil para identificar el contenido que se estuvo trabajando y para posibilitar su reconocimiento como herramienta de resolución en nuevos problemas.

> ***Docente**: Ustedes en el cuadro argumentaron el por qué de cada inciso. Si tuvieran que escribir un argumento que valga para todos los incisos, ¿qué dirían?*
> ***Alumna 3:** Que los restos tienen que ser menores que los divisores porque si no podés seguir dividiendo.*
> ***Docente**: ¿Pero entonces, si el resto es menor que el divisor no se puede seguir dividiendo?*
> ***Alumna 3**: Sí, pero te da con coma.*
> ***Docente**: Entonces cómo podemos aclarar lo que dijeron recién.*
> ***Alumna 3**: Cuando el resultado es un número sin coma el resto debe ser menor que el divisor, sino no[15].*
> ***Docente**: Volviendo a la tabla, si yo hubiera tenido en cuenta la conclusión a la que llegaron, ¿era necesario hacer las cuentas para contestar SI o NO?*
> ***Alumna 4:** No, porque miras los restos y los divisores.*

El siguiente fragmento corresponde a un momento organizado en pequeños grupos.

> ***Alumno 1**: En la de resto 12 y divisor 4 puse que si.*
> ***Docente:** ¿Qué opinan los demás?*
> ***Alumno 2**: Qué está bien.*
> ***Alumno 3:** Yo calculé así. Divisor 4 y resto 12, cociente 3, porque 3 por 4 es 12*
> ***Docente:** ¿Todos tienen lo mismo?*
> *(Todos contestan que sí, menos un alumno)*
> ***Alumno 4:** Yo puse que no, porque el resto es mayor que el divisor.*
> ***Docente:** ¿Y cuánto da el resto?*
> ***Alumno 4**: 12 y es más grande que 4 que es divisor.*
> ***Alumno 1**: ¡Claro! No me di cuenta.*
> ***Alumno 2:** Si, tenés razón.*
> *(Comienzan a borrar en sus hojas)*
> ***Docente:** No borren, porque ya se dieron cuenta donde está el error. Acuérdense de esto para el momento de registrar lo que hicieron.*

En el fragmento precedente, el docente somete al análisis colectivo lo considerado correcto o incorrecto para avanzar en la fundamentación por parte de los alumnos. El docente no es quien determina si *está bien* o *está mal* desde el inicio. Brinda un espacio al intercambio con los pares favoreciendo el análisis sobre los resultados correctos y los erróneos. Al compartir esta responsabilidad, favorece la autonomía por parte del alumno en el control de sus producciones.

Se observa al final del extracto una intervención que apunta al modo de trabajo en la clase de matemática: "*no borren"*. Esta indicación apunta a rescatar el error como parte del proceso. Tener disponible las producciones erróneas permitirá someterlas a análisis en esa misma clase o en

15 Esta se acepta como una "verdad" provisoria. Ya que en realidad siempre el resto tiene que ser menor que el divisor

clases posteriores. En muchos casos los errores, merecen ser abordados en forma colectiva, y en otros casos serán fértiles para retomarlos de manera individual.

Es interesante destacar otra intervención: “*Acuérdense de esto para el momento de registrar lo que hicieron*”. Esta intervención es otra marca del tipo de trabajo que se propone a los niños. Se está compartiendo con ellos la responsabilidad de identificar aquello que es importante, que deberán tener en cuenta en otras clases para resolver nuevos problemas. A la vez se está comunicando que es importante anotar lo que se debe retener, lo cual resulta sumamente significativo para el estudio en el área de matemática.

El Problema 2 en las aulas

El siguiente extracto muestra una intervención del docente que apunta a la evocación de conocimientos que circularon en la clase de manera de vincular lo trabajado anteriormente con la tarea a la que se enfrentan.

> **Alumno:** ¿Hay que hacer una división que tenga resto 12 y divisor 4?
> **Docente:** Bien, ¿se acuerdan de Lisandro, el chico que nombraban en la clase anterior?

Una cuestión interesante a analizar es el tipo de práctica que se le solicita a los alumnos. Algunos problemas les proponen un desafío al que habitualmente no se han enfrentado: se pueden atribuir valores arbitrarios al cociente o al divisor para empezar a probar cuáles son las cuentas posibles. Los alumnos se han enfrentado generalmente a problemas en que se les brindan los datos con los que tienen que operar. En éstos pueden atribuir valores arbitrarios a uno o más de los datos faltantes. Por ejemplo, para el problema de la segunda etapa: “**Escribí una cuenta de dividir entre números naturales que tenga cociente 25 y resto 12**”, una alumna realizó lo siguiente: Multiplica los datos de los que dispone entre sí (cociente y resto): 25 x 12 = **300** Esto le permite obtener, a partir de los datos que ofrece el problema y no arbitrariamente, un número con el cual continuar. De esta manera resuelve la tensión que le genera la necesidad de atribuir al divisor un número al azar. Luego realiza **300** x 25 + 12 = 7512 obteniendo el dividendo a partir de multiplicar cociente por divisor y sumarle el resto.

En este problema también se puede “probar” con uno o varios números, si bien es esperable que los niños logren “encontrar” la cuenta solicitada a partir de la relación: D = d x c + r. Se promueve que vayan avanzado progresivamente de estrategias de ensayos sucesivos hacia un trabajo más anticipatorio.

En la siguiente intervención el docente favorece la reflexión sobre un procedimiento, apunta a que el alumno se plantee si es necesario realizar las cuentas o es posible basarse en otros conocimientos para obtener la respuesta.

> **Docente:** Piensen si a ustedes les hace falta hacer las cuentas. A lo mejor sí o a lo mejor no.

Se trata de un problema que tiene infinitas soluciones, aunque los alumnos, en la primera búsqueda de la solución, no lo anticipen. Algunos niños podrán obtener como respuesta que las cuentas posibles son infinitas mientras que otros dirán que son 12 dado que el divisor, en otros casos, determinaba la cantidad de soluciones posibles. En la puesta en común se podrán someter a discusión ambas respuestas de modo de avanzar en la justificación de sus afirmaciones.

Aquí se puede notar cómo el docente interviene solicitando razones sobre lo que han realizado en la instancia grupal.

***Docente**: ¿Y cuántas cuentas podés hacer?*
***Alumna 2:** Muchas*
***Alumna 4**: Yo puse que con esas condiciones se pueden hacer infinitas cuentas siempre y cuando el cociente sea mayor que el resto. Hice como ella, el divisor por el cociente y le sumé el resto.*
***Docente:** Con respecto a cuántas cuentas pueden hacerse, ustedes pusieron muchas, infinitas, un montón de cuentas. ¿Qué diferencia hay?*

El pasaje de “muchas” a “infinitas” es muy complejo y requerirá, en muchos casos de intervenciones y explicaciones del docente.

El Problema 3 en las aulas

Un procedimiento al que recurrieron frecuentemente los alumnos es el siguiente: “...*si somos 30 y le dan 10 a cada uno, van 300. A la maestra le quedan 15. La respuesta de Marcelo está mal*”. El docente podrá proponer la discusión de esta idea: *¿por qué lo que plantea Marcelo es incorrecto?* Intervención que apunta a explicitar las razones por las cuales consideran erróneo lo que se plantea. Algunos niños explican: *“No, porque hicimos 10 x 30 y nos dio 300 y como eran 315 le sumamos 15 y el resultado sería 10 a cada chico y 15 a la maestra*”.

Será interesante discutir qué informa el resultado “10,5”. Algunos niños que consideran incorrecta la respuesta de Marcelo dicen: “*No, son 10 para cada chico y 15 para la maestra porque Marcelo se equivocó al leer el resultado”.* Esta respuesta resulta interesante ya que como dijimos, el cálculo mental 30 x 10 = 300, le permite determinar que para la maestra quedan 15 caramelos. El hecho de que haya usado la calculadora (en la que confían plenamente) y el cálculo efectivamente arroje en el visor 10,5 como resultado, hace dudar al niño quien supone que Marcelo debe haber *leído mal* el resultado.

Otra respuesta que aparece es: “*No, porque los caramelos no se pueden escribir con decimales*”. En este caso puede orientarse la discusión a cómo determinar qué se hace con lo que sobra en un reparto, qué se puede seguir repartiendo y qué no, si siempre se pueden obtener resultados con decimales.

Algunos alumnos respondieron: “*No porque no son dos números distintos, sino que es uno solo que es ´10 y medio’ a cada uno”*. Esta idea también podrá ser abordada en la fase colectiva avanzando en otorgar sentido a las escrituras decimales en función del contexto de este problema.

Otras voces expresan: “*No porque 5 no es un número entero”* y “,5” “*es medio caramelo*” (distinguiendo 5 de 0,5); “*No, no es correcta. Porque son 10 caramelos y medio, o sea, 10 caramelos para los chicos y medio caramelo para la señorita*” (en este caso, el alumno no aclara que se trata de medio caramelo para la maestra por parte de cada uno de los 30 niños, lo cual conforma un total de 15 caramelos que le corresponden en el reparto).

Algunos niños dicen: “*Para mí la solución que aporta Marcelo es correcta*”, “*Me parece que es correcto porque hice la división y me dio 10,5”.* A partir de este tipo de respuestas puede comentarse algo que sucede frecuentemente entre los niños. El uso de la calculadora[16] les ofrece cierta confianza, el resultado les parece correcto e indiscutible: “*Si la calculadora dice **10,5**, entonces está bien*”.

Una de las cuestiones a discutir podría ser si la calculadora es la herramienta de cálculo más apropiada para resolver este problema; si es una herramienta que permite resolver todo tipo de

[16] Por cuestiones de espacio no nos extenderemos en las implicancias del uso de la calculadora. Remitimos a la lectura del documento nª6: “Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB” de la DGCyE de la provincia de Buenos Aires (2001) y Broitman, C. (2005): Enseñar diferentes estrategias de cálculo en el segundo ciclo de EGB, Editorial Santillana.

situaciones; ¿en qué medida puedo usar los datos que me ofrece el visor para responder?; en el caso de ser posible ¿cómo usarlos? A esta última cuestión, algunos niños responden: “*No, porque el resultado sería 10,5 y la tendría que hacer en un papel para saber cuánto tiene de resto”; “No porque lo que le sobra, o sea, el resto es lo que le va a dar a la señorita y no el cociente como hizo Marcelo*”.

En una clase un alumno expresa: “*Lo que pasa es que la calculadora siempre te da un número exacto sin que te sobre nada*”. La docente a cargo de este intercambio con la alumna anota en su registro de la clase: *Podría haber trabajado esta idea, pero no me daba el tiempo.* Ella considera que el asunto que este alumno plantea requiere ser analizado, pero decide no discutirlo en esta clase y retomarlo en clases siguientes. El docente en estos casos puede anunciar esta decisión al alumno o a la clase si surgió en el momento de la puesta en común. “*Es muy interesante lo que estás diciendo, vamos a retomarlo la próxima clase*”. A veces resulta pertinente seleccionar sólo algunos de los aspectos que surgen en el desarrollo de una clase en función, entre otras variables posibles a considerar, del propósito y del tiempo del que disponemos para la misma.

Algunas ideas posibles de ser registradas

Se espera que luego de los tres problemas se elaboren algunas ideas como las siguientes:
- El resto no puede ser ni igual ni mayor que el divisor;
- En el problema 1 no necesitamos hacer las cuentas, podemos mirar el resto y saber si esa cuenta es posible o no;
- En el problema 2 las soluciones son infinitas. Se puede poner cualquier número en el cociente, lo multiplicás por el divisor y le sumás el resto;
- No se pueden escribir los caramelos con números decimales, la respuesta no es la que aparece en el visor de la calculadora;
- El problema 3 se puede hacer así: multiplicás la parte entera del cociente por el divisor y se lo restás el dividendo, así te da el resto: 15 30 x 10 = 300, 315 – 300 = 15

Será muy fértil registrar las conclusiones elaboradas, para que puedan ser retomadas en actividades siguientes.

Más problemas para reinvertir lo trabajado

Los siguientes problemas apuntan a reutilizar los conocimientos que circularon y a propiciar un desempeño más autónomo por parte de los alumnos.

Problema 4
¿Cuál o cuáles de los siguientes números pueden completar correctamente esta cuenta?

65 /__________
5

	Divisor	Resto	SI o NO	¿Por qué?
A	13	0		
B	11	10		
C	10	15		
D	9	20		
E	12	5		

Este problema permite reinvertir lo trabajado en el Problema 1. Se espera que estén atentos a que el resto cumpla con la condición de ser menor que el divisor. Este problema también admite varias soluciones.

Problema 5
A las siguientes cuentas les faltan números. Complétalas.

___ / 4	96 / ___	___ / 9
7	7	5

¿Cuántas soluciones hay para cada cuenta?

La primera cuenta no tiene solución porque el resto es mayor que el divisor. Se amplían las posibilidades: los problemas pueden tener una, varias, infinitas o ninguna solución. Para resolverlas se retomarán las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto.

Problema 6
Constanza tenía que resolver este problema: "Se quieren colocar globos en cada una de las 12 aulas de la escuela de manera que en cada aula se coloque la misma cantidad. Tienen 126 globos. ¿Cuántos se van a colocar en cada aula? ¿Sobran? ¿Cuántos?". Constanza hizo la cuenta 126 : 12 y en el visor de la calculadora apareció el siguiente resultado: "10,5". Escribió esta respuesta: "Se deben colocar 10,5 globos en cada aula". ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

Este problema permite retomar los aspectos trabajados en el Problema 3: si el resto se puede repartir o no, si admite un resultado decimal. Se podrá discutir si se pueden resolver o no con la calculadora y cómo se puede reconstruir el resto usándola.

Problema 7
Luis usó la calculadora para resolver la siguiente división: 237 : 5. En el visor de la calculadora apareció el número 47,4. Luis dice que usando la calculadora pudo averiguar el resto de esta división. ¿Estás de acuerdo? ¿Cómo habrá hecho Luis para averiguarlo?

Este problema permite reinvertir lo trabajado en los problemas 3 y 6 pero se presenta más descontextualizado. Reconstruir el resto con la calculadora permite poner en juego un conocimiento que circula en la clase a lo largo de las distintas etapas: las relaciones entre el dividendo, divisor, cociente y resto. Si bien muchos niños harán la cuenta escrita para determinar el resto, se apuntará a reconocer que es posible multiplicar la parte entera del cociente por el divisor y restar el producto al dividendo, obteniendo así el resto: 47 x 5 = 235 / 237 – 235 = 2.

Problema 8
¿Cómo se puede resolver este problema usando la calculadora?
En una escuela se organiza la exposición de trabajos que los alumnos realizaron para participar de un concurso.
Se recibieron 318 dibujos del mismo tamaño.
Hay 22 paneles para colgarlos, se coloca la misma cantidad en cada panel.
Se necesita saber cuántos quedan sin colgar.

Al resolver este problema con la calculadora se obtiene como resultado 14,5. Nuevamente se trata de reconstruir el resto con la calculadora a partir de considerar la parte entera del cociente, multiplicarla por el divisor y luego restarla al dividendo.

Quinta etapa: reorganizar los problemas y sistematizar el estudio[17]

Esta última etapa tiene el propósito de generar un espacio de análisis de lo realizado a lo largo de la secuencia propuesta. Se intenta favorecer la identificación de los conocimientos que han circulado en este conjunto de clases, comparar unos problemas con otros estableciendo semejanzas y diferencias. También es una intención de esta etapa que los alumnos tomen conciencia de lo que han aprendido y puedan explicitar sus nuevos conocimientos y tenerlos disponibles para nuevas situaciones.

Si bien este tipo de trabajo se propone en cada etapa, es interesante plantear una revisión que tenga una mirada global sobre lo realizado al finalizar la secuencia. Para ello será necesario que se retomen las conclusiones elaboradas en etapas precedentes y se establezcan relaciones entre los conocimientos que circularon. Sistematizar y organizar, entre otros aspectos, forman parte de las prácticas que el alumno despliega para estudiar.
Se sugieren actividades de carácter colectivo y en pequeños grupos, tales como hojear carpetas, evocar conclusiones, retomar problemas más complejos, compararlos, listar las estrategias para resolverlos. En este momento pueden elaborarse también nuevas conclusiones que incluyan relaciones entre conocimientos que circularon en distintas etapas. Entre las actividades individuales se propone un nuevo grupo de problemas que permite reinvertir los conocimientos puestos en juego en las distintas etapas. A su vez, constituye una nueva oportunidad para que todos aprendan. Se espera que al resolverlos pongan en juego los cocimientos y las estrategias que fueron objeto de discusión en las distintas etapas.

Este espacio de problemas, brindará al docente una nueva oportunidad de identificar el grado de apropiación de los conocimientos que fueron objeto de trabajo por parte de sus alumnos. Permitirá al maestro tomar decisiones respecto de aquellos aspectos que será necesario retomar, los errores que persisten, las nuevas relaciones que ya han sido incorporadas por la mayor parte de la clase.

Actividad 1 (colectiva)

El maestro podrá preguntar “¿qué hemos aprendido sobre la división en estas clases?” Se irán registrando en el pizarrón o en un afiche las ideas vertidas por los alumnos durante este intercambio. Será oportuno que, posteriormente, estas ideas sean volcadas en las carpetas de los niños para que puedan ser retomadas en nuevas oportunidades. Esta tarea puede apoyarse en la lectura de las conclusiones a las que se arribó en cada una de las etapas y que se encuentran registradas en las carpetas o en afiches. Estas conclusiones iniciales podrán ser revisadas o reformuladas incluyendo varias de ellas en una formulación de carácter más general, intentando que sean más claras o incorporando vocabulario más ajustado. En las nuevas conclusiones pueden incluirse ejemplos.

Actividad 2 (en pequeños grupos)

Mirar la carpeta con todos los problemas y elegir los cinco más difíciles. Rehacerlos buscando, al menos, dos maneras diferentes de encontrar la solución.

Actividad 3 (colectiva)

Clasificar los problemas resueltos según “parecidos”. Hacer un listado de las clases de problemas que ya aprendieron a resolver.

17 Esta etapa no fue implementada durante el Desafío Matemático 2006.

Actividad 4 (en pequeños grupos)

Inventar una “prueba” con un problema de cada clase que tenga entre cinco y ocho ítems. Luego, en una instancia colectiva, comparar las cuatro o cinco pruebas preparadas analizando qué clases de problemas no están presentes en las otras. Usarlas para estudiar. Unirlos a los propuestos en la actividad 6.

Actividad 5 (en pequeños grupos)

Elaborar un “machete” con todas las anotaciones que es necesario retener para poder resolver los problemas. Incluir ejemplos.

Actividad 6 (individual)

Resolvé estos problemas. Podés usar los “machetes” y las conclusiones como consulta. Entregalos por escrito y ya resueltos el día .... Luego de la resolución individual realizaremos una puesta en común para analizar dificultades y errores.

1. Hay que colocar 288 cerámicos. Se sabe que cada fila tiene que tener entre 14 y 17 cerámicos, ¿cuántas filas habrá si no sobra ningún cerámico?

2.

a) Escribí una cuenta de dividir entre números naturales que tenga cociente 19 y resto 6.
b) ¿Se pueden escribir otras cuentas con estas condiciones? ¿Cuáles?
c) ¿Cuántas cuentas se pueden escribir? ¿Por qué?

3. Inés hizo la cuenta 346 : 7, obteniendo de cociente 49 y resto 3. Ahora tiene que hacer estas otras cuentas de dividir:

   347 : 7   348 : 7   350 : 7   352 : 7

   ¿Puede Inés determinar el resto de esas cuentas sin hacerlas? Si es posible, explica cómo puede hacerlo. Si no, explica por qué no.

4. Verónica hizo la cuenta 87 : 6 y en el visor de la calculadora apareció el siguiente resultado: “14,5”. Explicá cómo puede averiguar el resto de esta cuenta usando la calculadora.

5. ¿Cuál o cuáles de los siguientes números pueden completar correctamente esta cuenta?

   96 /__________
        8

	Divisor	Resto	SI o NO	¿Por qué?
A	11	7		
B	12	0		
C	10	16		

6. A las siguientes cuentas les faltan números. Completálas.

       / 6_____   86 /_________   /_____8___
   6   5   2

   ¿Cuántas soluciones hay para cada cuenta?

Palabras finales

Queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a todos los niños, maestros, directores, inspectores, equipos técnicos regionales de Capacitación que durante el año 2006 implementaron esta propuesta. Sus voces permiten que nuevos maestros puedan llevar esta propuesta a sus aulas anticipando una posible gestión de clase.

Hemos intentado, a través de este documento, ofrecer una colección de problemas, que pueda permitir a los alumnos del 5º o 6º año dar una "vuelta de tuerca" sobre la división, visitando aspectos más desconocidos para ellos vinculados con esta operación y a la vez involucrándolos en un tipo de trabajo intelectual propio de la matemática: mirar con más profundidad el funcionamiento de un objeto para estudiarlo, analizar las relaciones involucradas e intentar generalizarlas, preguntarse por la cantidad de soluciones, por si sucederá siempre, por qué está o no permitido hacer en matemática.

Ha sido enfatizada la necesidad de considerar las condiciones del aula para que efectivamente se propicie esta clase de trabajo matemático por parte de los alumnos. Hacemos nuestras las palabras que usó en una entrevista la Prof. Patricia Sadovsky[18]:

> "*Dar clase no es un proyecto individual, un acto privado, sino un hecho colectivo y público. Y se necesita contribuir con el docente, [...] (para que) pueda concebir al alumno como productor y aquello que el alumno va a decir en relación a una problemática como constitutivo del conocimiento matemático. No es que yo lo convoco a producir, para después, y encima de eso, colocarle la verdad matemática, aplastándolo; sino que el alumno pueda proponer, usando sus conocimientos, al trabajo matemático; que sienta que eso que él produce es parte de la matemática que se construye. Por poner un ejemplo. Si uno abre el juego y plantea un problema, y los alumnos dan distintas propuestas, al ponerse esas propuestas en relación entre sí se producen relaciones nuevas que son inéditas, y que sólo se producen si esas propuestas se ponen en relación entre sí. Y ahí aparece nuevo conocimiento, que es el conocimiento de esa clase. Obviamente que tiene una referencia en la actividad matemática, no es que inventan una matemática distinta, pero ligan a una cierta problemática relaciones que fuera de ese contexto no necesariamente están ligadas [...]".*

Hemos visto estos problemas "funcionando" en las aulas y su posibilidad de generar un tipo de trabajo en el que la producción colectiva de nuevos conocimientos enriquece la mirada sobre la división, a la vez que permite a más alumnos involucrarse en el placer de una actividad puramente intelectual y matemática. Este documento es también una invitación a extender dichas condiciones.

18 Reportaje a Patricia Sadovsky: "¿Enseñar división es transmitir cultura?", en Revista "La Educación en nuestras manos" N°54, marzo de 1999.

Anexo: problemas de las diferentes etapas

Primera etapa: la división como herramienta para resolver problemas de organización rectangular

1. El piso del aula es rectangular y tiene en total 330 cerámicos. Todos los cerámicos son cuadrados y están enteros. En cada fila hay más de 12 y menos de 18 cerámicos.
   ¿Cuántos cerámicos hay en cada fila?
   ¿Cuántos en cada columna?
   ¿Hay una sola posibilidad? ¿Por qué?

2. Una escuela rural recibió una donación de 176 plantas. Van a colocarlas en un sector rectangular. En cada fila pueden ubicar 11 plantas.
   ¿Cuántas filas pueden completar?

3. Un tablero de ajedrez está formado por 64 cuadraditos blancos y negros dispuestos en filas iguales. Cada fila está formada por 8 cuadraditos.
   ¿Cuántas filas tiene el tablero?
   Escribí el cálculo que realizaste para resolver este problema.

4. Se quieren dibujar en hoja cuadriculada distintos rectángulos formados por 18 cuadraditos.
   ¿Cuántas posibilidades hay?
   ¿Cómo hiciste para averiguarlo?

5. Se quieren dibujar en hoja cuadriculada distintos rectángulos formados por 36 cuadraditos.
   ¿Cuántas posibilidades hay?
   ¿Cómo hiciste para averiguarlo?

Segunda etapa: cómo averiguar el dividendo y el divisor a partir del cociente y el resto

1. a) Escribí una cuenta de dividir entre números naturales que tenga cociente 25 y resto 12.
   b) ¿Se pueden escribir otras cuentas con estas condiciones? ¿Cuáles?
   c) ¿Cuántas cuentas se pueden escribir? ¿Por qué?

2. a) Escribí una cuenta de dividir entre números naturales que tenga cociente 12 y resto 7.
   b) ¿Se pueden escribir otras cuentas con estas condiciones? ¿Cuáles?
   c) ¿Cuántas cuentas se pueden escribir? ¿Por qué?

3. Al dividir un número por 32, se obtuvo 16 y un resto de 4. ¿Qué número se dividió?

4. Completá el dividendo y el divisor de esta cuenta. ¿Hay una única posibilidad?

/______
4 6

5. Completá la tabla

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto	Cantidad de soluciones
	12	13	8	
202	22		4	

Tercera etapa: cómo varían el resto o el dividendo cuando se modifican los otros números

1. Lisandro hizo la cuenta 103 : 12, obteniendo de cociente 8 y resto 7.
Ahora tiene que hacer estas otras cuentas de dividir:
104 : 12 105 : 12 106 : 12 107 : 12
a) ¿Puede Lisandro determinar el resto de esas cuentas sin hacerlas? Si es posible, explica cómo puede hacerlo. Si no, explica por qué no.
b) ¿En cuánto tiene que modificar Lisandro el dividendo de la cuenta que hizo para obtener de cociente 9 y resto 0 manteniendo el mismo divisor?
c) ¿Cuántas cuentas puede escribir Lisandro que tengan como divisor 12, como cociente 9 y como resto no necesariamente 0?

2. Agustina hizo la cuenta 1029 : 12, obteniendo de cociente 85 y resto 9.
Ahora tiene que hacer estas otras cuentas de dividir:
1030 : 12 1032 : 12 1035 : 12
a) ¿Puede Agustina determinar el resto de esas cuentas sin hacerlas? Si es posible, explica cómo puede hacerlo. Si no, explica por qué no.
b) ¿En cuánto tiene que modificar Agustina el dividendo de la cuenta que hizo para obtener de cociente 87 y resto 0 manteniendo el mismo divisor?
c) ¿Cuántas cuentas puede escribir Agustina que tengan como divisor 12, como cociente 86 y como resto no necesariamente 0?

3. Fernando hizo la cuenta 153 : 8, obteniendo de cociente 19 y resto 1.
Ahora tiene que hacer estas otras cuentas de dividir:
155 : 8 158 : 8 160 : 8 162 : 8
¿Puede Fernando determinar el resto de esas cuentas sin hacerlas? Si es posible, explica cómo puede hacerlo. Si no, explica por qué no.

4. Completá las siguientes cuentas colocando dividendo y resto.

/ 6________ / 7______
7 6

5. a) Completá los números que faltan en las cuentas.
b) ¿Cuántas soluciones puede tener cada una?

```
     /  15______          /  8_________        22 /_______
6       3                    5                  4      3
```

Cuarta etapa: cómo determinar divisor y resto o dividendo y cociente.
Averiguar el resto usando la calculadora.

1. ¿Cuál o cuáles de los siguientes números pueden completar correctamente esta cuenta?

```
24 /__________
      3
```

	Divisor	Resto	SI o NO	¿Por qué?
A	4	12		
B	8	0		
C	7	3		
D	5	9		
E	6	6		

2. a) Escribí una cuenta que tenga divisor 12 y resto 5.
b) ¿Cuántas cuentas se pueden escribir que cumplan con esas condiciones?

3. Lisandro llevó una bolsa con 315 caramelos para compartir con sus compañeros y maestra porque era su cumpleaños. Le dijo a la maestra:

-"Estos caramelos son para compartir entre todos mis compañeros y yo, que somos 30. Para cada uno la misma cantidad de caramelos. Los que sobran son para vos seño".
Marcelo, su amigo, para saber cuántos caramelos le tocaba a cada uno, tomó la calculadora e hizo el cálculo 315 : 30. Al apretar el signo =, en el visor de su calculadora apareció el número $\boxed{\textbf{10.5}}$
Y dijo a su maestra: "Son 10 caramelos para cada uno de nosotros y 5 para vos".
¿Te parece que la solución que aporta Marcelo a partir del uso de la calculadora es correcta? ¿Por qué?

4. ¿Cuál o cuáles de los siguientes números pueden completar correctamente esta cuenta?

```
65 /__________
      5
```

	Divisor	Resto	SI o NO	¿Por qué?
A	13	0		
B	11	10		
C	10	15		
D	9	20		
E	12	5		

5. A las siguientes cuentas les faltan números. Complétalas.

```
     / 4_____        96 /_______        /   9____
7                        7                  5
```

¿Cuántas soluciones hay para cada cuenta?

6. Constanza tenía que resolver este problema: “Se quieren colocar globos en cada una de las 12 aulas de la escuela de manera que en cada aula se coloque la misma cantidad. Tienen 126 globos. ¿Cuántos se van a colocar en cada aula? ¿Sobran? ¿Cuántos?”
Constanza hizo la cuenta 126 : 12 y en el visor de la calculadora apareció el siguiente resultado: “10,5”. Escribió esta respuesta: “Se deben colocar 10,5 globos en cada aula”. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

7. Luis usó la calculadora para resolver la siguiente división: 237 : 5. En el visor de la calculadora apareció en número 47,4. Luis dice que usando la calculadora pudo averiguar el resto de esta división. ¿Estás de acuerdo? ¿Cómo habrá hecho Luis para averiguarlo?

8. ¿Cómo se puede resolver este problema usando la calculadora? “En una escuela se organiza la exposición de trabajos que los alumnos realizaron para participar de un concurso. Se recibieron 318 dibujos del mismo tamaño. Hay 22 paneles para colgarlos, se coloca la misma cantidad en cada panel. Se necesita saber cuántos quedan sin colgar”.

Quinta etapa: reorganizar los problemas y sistematizar el estudio

1. Hay que colocar 288 cerámicos. Se sabe que cada fila tiene que tener entre 14 y 17 cerámicos, ¿cuántas filas habrá si no sobra ningún cerámico?

2. Escribí una cuenta de dividir entre números naturales que tenga cociente 19 y resto 6.
¿Se pueden escribir otras cuentas con estas condiciones? ¿Cuáles?
¿Cuántas cuentas se pueden escribir? ¿Por qué?

3. Inés hizo la cuenta 346 : 7, obteniendo de cociente 49 y resto 3.
Ahora tiene que hacer estas otras cuentas de dividir:
347 : 7   348 : 7   350 : 7   352 : 7
¿Puede Inés determinar el resto de esas cuentas sin hacerlas? Si es posible, explica cómo puede hacerlo. Si no, explica por qué no.

4. Verónica hizo la cuenta 87 : 6 y en el visor de la calculadora apareció el siguiente resultado: “14,5”
Puede averiguar el resto de esta cuenta usando la calculadora. Explicá cómo puede averiguarlo.

5. ¿Cuál o cuáles de los siguientes números pueden completar correctamente esta cuenta?
96 /__________
8

	Divisor	Resto	SI o NO	¿Por qué?
A	11	7		
B	12	0		
C	10	16		

6. A las siguientes cuentas les faltan números. Complétalas.
___ / 6_____   86 /_________   ___ /_____ 8___
6   5   2
¿Cuántas soluciones hay para cada cuenta?

Bibliografía

Sobre el enfoque didáctico

Brousseau, G., “Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática”. Publicación de la UNCba, 1993.

Lerner; D. “La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición” en Castorina y otros. *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate.* Buenos Aires, Paidós, 1996.

Wolman, S. y Quaranta, M.E., “Discusiones en la clase de matemática. Qué, para qué y cómo se discute”, en Panizza, M. (comp.) *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB.* Buenos Aires, Paidós, 2003.

Sadovsky,P. “La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática” en Alagia H., Bressan A. y Sadovsky, P. *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

Sadovsky P., *Enseñar Matemática hoy*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

DGCyE, “Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en EGB”, 2004. Disponible en www.abc.gov.ar.

DGCyE, *Desafío Matemático 2005*. 2005. Disponible en www.abc.gov.ar

Sobre la enseñanza de la multiplicación y la división

Broitman, C., “La Enseñanza de la División en el Primer Ciclo” en revista *El Aula*, Ministerio de Cultura y Educación, 1998. En: http://www.zona.lacarabela.com/ZonaAula/ZonaAula06/2.html.

Broitman, C., *La Enseñanza de las Operaciones en el Primer Ciclo*. Buenos Aires, Novedades Educativas, 1999.

Broitman, C., *Enseñar diferentes estrategias de cálculo en el segundo ciclo de EGB.* Buenos Aires, Santillana, 2005.

DGCyE, “Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la Multiplicación en los tres ciclos de la EGB”, 2001. Disponible en www.abc.gov.ar.

DGCyE, “Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la División en los tres ciclos de la EGB”, 2001. Disponible en www.abc.gov.ar.

DGCyE, “Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB”, 2001. Disponible en www.abc.gov.ar.

Dirección de Currículum. MCBA, “Documento Curricular Número 4”. Matemática. Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 1997. Disponible en www.buenosaires.gov.ar.

Dirección de Currículum. GCBA, “Documento de actualización curricular para 7º grado”, 2000. Disponible en www.buenosaires.gov.ar.

Sadovsky, P., “¿Enseñar división es transmitir cultura?” en revista *La Educación en nuestras manos*, n°54, marzo de 1999. En http://www.suteba.org.ar/index.php?r=1591.

Saiz, I., “La dificultad de dividir o dividir con dificultad” en Parra y Saiz, *Didáctica de Matemática*, Buenos Aires, Paidós, 1994.

Vergnaud, G., *El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las matemáticas en la escuela*. México, Trillas, l991.

Esta publicación se terminó de
imprimir en Junio de 2007